Доклады Академии наук СССР
1967. Том 177, № 2

УДК 551.1 ГЕОФИЗИКА

В. Н. ЖАРКОВ, В. М. ЛЮБИМОВ

ЗАТУХАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 25 I 1967)

В работах ([1]) был указан путь рассмотрения совокупности реальных моделей Земли на базе какой-либо исходной реальной модели Земли с помощью малого параметра. Для крутильных колебаний Земли (как основного тона, так и обертонов) были рассчитаны таблицы производных собственных частот по параметрам модели ([2]), которые позволяют без дальнейших расчетов переходить от одной реальной модели Земли к другой, а также рассмотреть вопрос о затухании. Применение полученных данных к физике оболочки Земли позволило в грубых чертах установить распределение диссипативной функции Q в оболочке. В настоящее время рассчитаны таблицы производных для основного радиального тона и четырех его обертонов. Ниже будут приведены формулы, по которым производилось вычисление, а также результаты расчетов затухания радиальных колебаний для распределений Q, полученных в ([3]).

В качестве исходной модели Земли была выбрана модель Гутенберга Буллена А ([4]). В этой модели кора и оболочка разбиваются на 34 слоя с кусочно-постоянными параметрами. Ядро Земли является жидким и разбито на 7 слоев: внутреннее ядро, переходный слой и внешнее ядро, состоящее из 5 слоев. Все вычисления проводились в безразмерных переменных

$$u = az_1, \quad \sigma_r = \bar{K}z_2, \quad r = ax, \quad N_1 = \bar{\mu}/\bar{K}, \quad N = {}^4/_3 N_1, \quad N_0 = {}^2/_3 N_1,$$
$$\mu^0 = \bar{\mu}\mu, \quad K^0 = K\bar{K}, \quad \rho^0 = \bar{\rho}\rho, \quad \nu = 4\bar{g}\bar{\rho}a/\bar{K}, \quad \varkappa^2 = \omega^2 a^2 \bar{\rho}/\bar{K}, \tag{1}$$

где u и σ_r — размерное смещение и напряжение при радиальных колебаниях; r — текущий радиус; a — радиус Земли; величины с индексом нуль — размерные параметры модели (μ^0, K^0, ρ^0); величины с чертой — некоторые нормирующие постоянные ($\bar{\mu}$, $\bar{K}$, $\bar{\rho}$, $\bar{g}$) такие, что безразмерные модуль сдвига μ, модуль сжатия K, плотность ρ и ускорение силы тяжести $g = g^0/\bar{g}$ везде меньше или равны единице; ω и $\varkappa$ — размерная и безразмерная круговые частоты. Интегрирование и нумерация участков производилась от центра. Граничные условия

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(1) = 0, \tag{2}$$

причем $z_1(x)$ и $z_2(x)$ непрерывны во всей области интегрирования $0 \leqslant x \leqslant 1$. z_2 в центре Земли условно принималось за единицу ($z_2(0) = 1$). Система дифференциальных уравнений для центрального участка, плотность которого ρ_1 постоянна,

$$\dot{z}_1 = -\frac{2}{x}z_1 + \frac{1}{K_1}z_2, \quad \dot{z}_2 = -\rho_1(\varkappa^2 + \nu\rho_1 D), \quad D = \frac{4\pi G\bar{\rho}a}{3\bar{g}} \tag{3}$$

имеет точное решение через функции Бесселя

$$z_1(\zeta) = (K_1 m_1)^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta^{-1/2} j_{3/2}(\zeta), \quad z_2(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\zeta^{-1/2} j_{1/2}(\zeta),$$
$$m_1^2 = \frac{\rho_1}{K_1}(\varkappa^2 + \nu D\rho_1), \quad \zeta = m_1 x. \tag{4}$$

На остальных участках жидкого ядра

$$\dot z_1 = -\frac{2}{x} z_1 + \frac{1}{K} z_2, \quad \dot z_2 = -\left(\varkappa^2\rho + \frac{\nu}{x}\rho g\right) z_1 \tag{5}$$

и в твердых областях оболочки и коры

$$\begin{gathered}\dot z_1 = -\frac{2}{x}\frac{K - N_0\mu}{K + N\mu} z_1 + \frac{1}{K + N\mu} z_2, \\ \dot z_2 = -\frac{4}{x} N_1\mu \frac{1}{K + N\mu} z_2 + \left[\frac{12}{x^2}\frac{N_1\mu K}{(K + N\mu)} - \varkappa^2\rho - \frac{\nu}{x}\rho g\right] z_1.\end{gathered} \tag{6}$$

Интегрирование производилось численно методом Рунге — Кутта.

Пусть при переходе от исходной модели $\{\rho_0(x), \mu_0(x), K_0(x)\}$, которую будем отличать индексом нуль снизу, к близкой модели

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho, \quad \mu = \mu_0 + \Delta\mu, \quad K = K_0 + \Delta K, \quad \Delta\rho \ll \rho_0, \quad \Delta\mu \ll \mu, \quad \Delta K \ll K_0 \tag{7}$$

безразмерная частота $\varkappa_0$ получит приращение $\Delta\varkappa$

$$\varkappa = \varkappa_0 + \Delta\varkappa, \tag{8}$$

причем

$$\Delta\varkappa = \sum_{i=1}^{41} (\varkappa_{\rho i}\Delta\rho_i + \varkappa_{Ki}\Delta K_i + \varkappa_{\mu i}\Delta\mu_i), \tag{9}$$

где i — номер слоя, а добавки ($\Delta\rho_i$, ΔK_i и $\Delta\mu_i$), как и исходные функции (ρ_0, K_0, μ_0), считаются кусочно-постоянными. Расчетные формулы для «производных» $\varkappa_{\rho i}$, $\varkappa_{Ki}$ и $\varkappa_{\mu i}$ имеют следующий вид:

на первом участке

$$\begin{gathered}\varkappa_{\rho 1} = \varkappa_{\rho 1}' + \varkappa_{\rho 1}'', \\ \varkappa_{\rho 1}' = -\frac{(\varkappa_0^2 + \nu\rho_{10} D)}{2\varkappa_0 J}\int_0^{x_1} x^2 z_{10}^2\, dx, \quad \varkappa_{\rho 1}'' = -\frac{\nu\rho_{10} D\int_0^{x_1} x^2 z_{10}^2\, dx + \nu D x_1^3 \int_{x_1}^{1} \frac{\rho_0 z_{10}^2 dx}{x}}{2\varkappa_0 J}, \\ \varkappa_{K1} = (2K_{10}^2\varkappa_0 J)^{-1}\int_0^{x_1} x^2 z_{20}^2 dx, \quad J = \int_0^1 \rho_0 x^2 z_{10}^2 dx, \quad \varkappa_{\mu 1} = 0;\end{gathered} \tag{10}$$

на остальных участках жидкого ядра

$$\begin{gathered}\varkappa_{\rho i} = \varkappa_{\rho i}' + \varkappa_{\rho i}'', \quad i = 2, \ldots, 7, \quad \varkappa_{\mu i} = 0, \\ \varkappa_{\rho i}' = -\frac{1}{2\varkappa_0 J}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varkappa_0^2 x^2 + \nu x g_{i0})\, z_{10}^2 dx, \\ \varkappa_{\rho i}'' = -\frac{\nu D}{2\varkappa_0 J}\left\{\rho_{i0}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x^3 - x_{i-1}^3}{x} z_{10}^2\, dx + (x_i^3 - x_{i-1}^3)\int_{x_i}^{1} \rho_0 \frac{1}{x} z_{10}^2\, dx\right\}, \\ \varkappa_{Ki} = \frac{1}{2K_{i0}^2\varkappa_0 J}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 z_{20}^2 dx\end{gathered} \tag{11}$$

и, наконец, в твердых областях оболочки и коры

$$\begin{gathered}\varkappa_{\rho i} = \varkappa_{\rho i}' + \varkappa_{\rho i}'', \\ \varkappa_{\rho i}' = -(2\varkappa_0 J)^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x} (\varkappa_0^2 x^2 + \nu g_{0i} x)\, z_{10}^2\, dx, \\ \varkappa_{\rho i}'' = -\frac{\nu D}{2\varkappa_0 J}\left\{\rho_{0i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x^3 - x_{i-1}^3}{x} z_{10}^2 dx + (x_i^3 - x_{i-1}^3)\int_{x_i}^{1} \rho_0 \frac{1}{x} z_{10}^2 dx\right\},\end{gathered}$$

$$\varkappa_{Ki} = (2\varkappa_0 J M_{0i}^2)^{-1} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx x^2 \left\{ \frac{16N_1^2\mu_0}{x^2} z_{10}^2 + z_{20}^2 + \frac{8N_1\mu_0}{x} z_{10}z_{20} \right\}, \tag{12}$$

$$\varkappa_{\mu i} = (2\varkappa_0 J\, M_{0i}^2)^{-1} N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 dx \left\{ \frac{9K_0^2}{x^2} z_{10}^2 + z_{20}^2 - \frac{6K_0 z_{10} z_{20}}{x} \right\},$$

где

$$M_{0i} = K_{0i} + N\mu_{0i}, \qquad i = 8 \div 41.$$

В (10) — (12) производная $\varkappa_\rho$ разделена на две части, $\varkappa_{\rho i}'$ определяет непосредственное изменение частоты $\varkappa_0$ при изменении плотности i-го слоя на $\Delta\rho_i$; $\varkappa_{\rho i}''$ дает изменение $\varkappa_0$ из-за изменения гравитационного поля g_0.

В работе ([1]), где было рассмотрено затухание радиальных колебаний для модели средней однородной Земли, было показано, почему затухание собственных колебаний определяется диссипативными процессами в оболочке, а диссипацией в жидком ядре можно пренебречь. Там же было указано, что при рассмотрении затухания релаксацией модуля сжатия K по сравнению с релаксацией модуля сдвига μ можно пренебречь. Так же как и в ([1], [3]), полагая частоту и модуль сдвига комплексными

$$\omega = \omega_0(1 + i\Phi), \quad \Delta\omega = i\omega_0\Phi, \quad \Phi = {}^1/_2 Q^{-1}, \quad \Delta\varkappa = i(\bar\rho / \bar K)^{1/_2}{}^1/_2 a\omega_0 Q^{-1},$$

$$\mu_i = \mu_{0i}(1 + iQ_i^{-1}), \qquad \Delta\mu_i = i\mu_{0i}Q_i^{-1}$$

и подставляя эти $\Delta\varkappa$ и $\Delta\mu_i$ в (9) $(\Delta\rho_i = \Delta K_i = 0)$, получим формулу

$$Q^{-1} = \frac{2}{\varkappa_0} \sum_{i=8}^{41} R_i Q_i^{-1}, \qquad R_i = \varkappa_{\mu i}\mu_{0i}, \tag{13}$$

связывающую диссипативную функцию для радиальных колебаний Q^{-1} с диссипативными параметрами земных недр Q_i^{-1}. Формула (13) слишком детальна. При конкретных расчетах ([3]) ее «загрубляют»

$$R^1 = \sum_{i=40}^{41} R_i, \quad R^2 = \sum_{i=27}^{39} R_i, \quad R^3 = \sum_{i=18}^{26} R_i, \quad R^4 = \sum_{i=8}^{17} R_i. \tag{14}$$

R^1 характеризует затухание в земной коре $(0 \leqslant l \leqslant 38$ км$)$, $R^2(38 \leqslant l \leqslant 300$ км$)$ — в верхней мантии, $R^3(300 \leqslant l \leqslant 1000$ км$)$ — в переходном слое Голицына, $R^4(1000 \leqslant l \leqslant 2898$ км$)$ — в нижней мантии (l — глубина). Таким образом, расчетное соотношение принимает вид

$$Q^{-1} = \frac{2}{\varkappa_0} \sum_{j=1}^{4} R^j Q_j^{-1}. \tag{15}$$

Результаты расчетов Q для основного радиального тона ${}_0S_0$ и первых четырех обертонов ${}_jS_0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ представлены в табл. 1.

В таблице ${}_0Q_{s0}$ обозначает механическую добротность (диссипативную функцию) для основного радиального колебания, а ${}_1Q_{s0}$, ${}_2Q_{s0}$, ${}_3Q_{s0}$, ${}_4Q_{s0}$ — для 1-, 2-, 3- и 4-го обертонов. В ([3]) мы остановились на распределении 6 табл. 1. Затухание радиальных колебаний в значительной мере определяется механической добротностью нижней мантии (Q_4). Затухание крутильных колебаний от Q_4 зависит не очень сильно, поэтому в ([3]) определено недостаточно уверенно. Это позволяет предположить, что величины ${}_jQ_{s0}$ варианта 32 табл. 1 представляют верхний предел для диссипативной функции радиальных колебаний.

Величины ${}_jQ_{s0}$ в последней строке таблицы могут рассматриваться как нижний предел. Мы видим, что ${}_0Q_{s0}$ примерно вдвое больше, чем ${}_1Q_{s0}$. Данные, приведенные в настоящем сообщении, можно рассматривать как теоретическое объяснение экспериментальных результатов Несса, Гаррисона и Слихтера ([4]), согласно которым ${}_0Q_{s0}$ на порядок больше величин ${}_0Q_{s9}$ и ${}_0Q_{s12}$ для основного девятого ${}_0S_9$ и двенадцатого ${}_0S_{12}$ сфероидальных тонов.

В заключение заметим, что тщательное определение величин ${}_0Q_{s0}$ и ${}_1Q_{s0}$ на опыте позволило бы проверить предположение о независимости ве-

Таблица 1

Вариант	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$10^{-3}\,{}_0Q_{s0}$	$10^{-3}\,{}_1Q_{s0}$	$10^{-3}\,{}_2Q_{s0}$	$10^{-3}\,{}_3Q_{s0}$	$10^{-3}\,{}_4Q_{s0}$
21	450	50	∞	∞	9,9	200	21	8,4	4,4
22	450	100	∞	∞	19,5	390	43	17	8,9
23	450	150	∞	∞	29	570	64	25	13
24	450	200	∞	∞	33	740	85	34	19
31	450	50	500	∞	8,1	40	6,3	3,7	2,6
32	450	100	500	∞	14	44	7,4	4,7	3,7
34	450	200	500	∞	21	46,5	8,1	5,4	4,7
41	450	50	500	1000	7,4	5,4	3,6	2,8	2,2
42	450	100	500	1000	12	5,5	4	3,3	2,8
44	450	200	500	1000	17	5,5	4,2	3,7	3,4
5	450	100	500	1500	12	7,8	4,7	3,7	3,1
6	450	100	300	1000	10	5,1	3,1	2,5	2,2

личин Q_j ($j = 1, 2, 3, 4$) от периода, которое обычно делается и принято нами при обсуждении результатов, а также позволит уверенно определить величину Q_4 для нижней мантии Земли. При радиальных колебаниях заметная доля полной энергии заключена в колебаниях гравитационного поля, диссипация же целиком обусловлена неупругими процессами в оболочке. «Перекачка» гравитационной энергии в упругую и обусловливает аномально большие значения ${}_jQ_{s0}$ для радиальных колебаний Земли.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР

Поступило
17 I 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Жарков, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, № 8 (1962). [2] В. Н. Жарков, В. М. Любимов и др., В кн. Земные приливы и внутреннее строение Земли. «Наука», 1967; Физика Земли, № 1, № 4 (1967). [3] В. Н. Жарков, В. М. Любимов и др., Физика Земли, № 2 (1967). [4] Собственные колебания Земли, М., 1964, стр. 230—232.