ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1971 МАТЕМАТИКА № 8 (111)

УДК 518.902

В. И. Жуковский

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

Рассмотрены необходимые условия существования оптимальных управлений в дифференциальных играх N лиц с интегральной платой.

1. Пусть изменение состояния игры N лиц описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, u_1, \ldots, u_N), \tag{1.1}$$

где n-вектор $x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ характеризует положение N игроков в фазовом пространстве; u_k суть r_k-мерные вектора управления ($k = 1, \ldots, N$), причем k-ое управление находится в распоряжении k-го игрока и $u_k(t)$ при $t \in (-\infty, +\infty)$ будем выбирать из класса кусочно-непрерывных вектор-функций, компоненты которых имеют конечное число точек разрыва и в каждой из них левосторонние и правосторонние пределы. Множество таких вектор-функций будем обозначать соответственно V_0^k. Управления $u_k(t)$ будем называть *допустимыми*, если

$$u_k(t) \in V^k \subset V_0^k \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{1.2}$$

При этом множества V^k считаем открытыми, именно, если $u_k(t) \in V^k$ и t_1, $t_2 \in (-\infty, +\infty)$ — некоторые числа, $t_1 < t_2$, то

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ni \left\{\bar{u}_k(t) \in V_0^k : \int_{t_1}^{t_2} |u_k(t) - \bar{u}_k(t)|\, dt < \varepsilon\right\} \to \bar{u}_k(t) \in V^k,$$

где $|\cdot|$ означает евклидову норму. Предполагаем, что система (1.1) при любых $u_k(t) \in V^k$ и

$$x(t_1) = x^{(1)} \tag{1.3}$$

допускает единственное абсолютно непрерывное решение $x(t)$, продолжимое на интервал $(-\infty, +\infty)$ (для дальнейших рассуждений достаточно продолжимости решения $x(t)$ на некоторый конечный интервал). Вектор $x^{(1)}$ и момент начала игры t_1, вообще говоря, не фиксированы. Считаем, что компоненты вектора X непрерывно дифференцируемы по аргументам.

Интересы k-го игрока определяются функционалом

$$I_k(u_1, \ldots, u_N) = \Phi_k^0(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} F_k(t, x, u_1, \ldots, u_N)\, dt$$

$$(k = 1, \ldots, N). \tag{1.4}$$

Здесь, вообще говоря, не фиксированный момент времени окончания игры $t_2 > t_1$; функции Φ_k^0, F_k непрерывно дифференцируемы по аргументам; подынтегральные функции F_k в (1.4) вычисляются при определенных $u_j(t)$ $(j = 1, \dots, N)$ и соответствующих им решениях $x(t)$ системы (1.1) при (1.3).

Введем аналог равновесной точки Дж. Нэша ([1], с. 207).

Допустимые $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k = 1, \dots, N)$ будем называть *локально оптимальными управлениями* дифференциальной игры (1.1) — (1.4), если

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ni \Big\{u_k(t) \in V^k : |x_{u_k}(t_1) - x^0(t_1^0)| + |x_{u_k}(t_2) - x^0(t_2^0)| + \\ + (t_1 - t_1^0)^2 + (t_2 - t_2^0)^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} |u_k(t) - u_k^0(t)|\, dt < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, N)\Big\} \tag{1.5}$$

и выполняются соотношения

$$I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0) \leqslant I_k(u_1^0, \dots, u_{k-1}^0, u_k, u_{k+1}^0, \dots, u_N^0) \\ (k = 1, \dots, N). \tag{1.6}$$

В (1.5) — (1.6) соответствующие $u_k^0(t)$ $(k = 1, \dots, N)$ и $u_1^0(t), \dots$ $\dots, u_{k-1}^0(t)$, $u_k(t)$, $u_{k+1}^0(t), \dots, u_N^0(t)$ решения (1.1) обозначены $x^0(t)$ и $x_{u_k}(t)$; интеграл в левой части (1.6) берется в пределах t_1^0, t_2^0, в правой — в пределах t_1, t_2; в случае $t_1^0 \neq t_1$, $t_2^0 \neq t_2$ управления $u_k^0(t)$ в (1.5) — (1.6) доопределяются произвольными допустимыми.

Управления $u_k^0(t)$ $(k = 1, \dots, N)$ будем называть *оптимальными*, если (1.6) имеет место при любых допустимых $u_k(t)$.

Ниже, используя методы [2], рассмотрим необходимые условия существования локально оптимальных управлений дифференциальной игры (1.1) — (1.6) при отсутствии и наличии ограничений (вид их указан ниже). Изучение подобных игр представляет практический интерес (например, [3], с. 189; [4]). В [5] получены необходимые и достаточные условия существования решения задачи (1.1) — (1.4), (1.6) при $\Phi_k \equiv 0$, при специальном виде функций F_k, X и фиксированных $x(t_1)$, t_1 и t_2. Принцип максимума в теории таких дифференциальных игр рассмотрен в [6], [7].

2. Предположим, что допустимые управления $u_k^0(t)$, $(t \in [t_1^0, t_2^0]$, $k = 1, \dots, N)$ локально оптимальные, а $x^0(t)$ — соответствующее им движение системы (1.1) при $x^0(t_1^0) = x_0$. Приведем, прежде всего, необходимые условия, которым должны удовлетворять вектора $u_k^0(t)$, $x^0(t)$ в случае отсутствия ограничений.

Далее, частные производные вычисляются при $u_k = u_k^0(t)$, $x = x^0(t)$ и вектор $\frac{\partial F_k}{\partial x} = \left\{\frac{\partial F_k}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x^n}\right\}$; аналогичный смысл имеют $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$, $\frac{\partial F_k}{\partial u_k}$; $B_k(t) = \frac{\partial X}{\partial u_k}$ — матрицы Якоби, $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\frac{dy}{dt} = A(t)y$, $Y(t_1^0) = E_n$, $A(t) = \frac{\partial X}{\partial x}$, E_n — единичная матрица; штрих сверху означает операцию транспонирования, $(\ ,\ )$ — скалярное произведение векторов, стоящих в скобках.

Теорема 2.1. *Если управления* $u_k^0(t)$ *при* $t \in [t_1^0, t_2^0]$ *локально оптимальные, то*

$$a_k = \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_1} - F_k[t_1^0] = 0, \quad b_k = \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_2} + F_k[t_2^0] = 0, \tag{2.1}$$

$$c_k = \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_1)} + Y'(t_2^0)\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)} + \int_{t_1^0}^{t_2^0} Y'(\tau)\frac{\partial F_k}{\partial x}\,d\tau = 0, \tag{2.2}$$

$$g^k = B_k'(t)\,[Y^{-1}(t)]'\left[Y'(t_2^0)\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)} + \int_t^{t_2^0} Y'(\tau)\frac{\partial F_k}{\partial x}\,d\tau\right] + \frac{\partial F_k}{\partial u_k} = 0 \tag{2.3}$$

$$(k = 1, \dots, N; \ t \in [t_1^0, t_2^0]).$$

Доказательство. Пусть τ_1, τ_2 — произвольные числа, а ξ_0 — произвольный n-вектор. Зафиксируем какие-либо $\overline{u}_k(t) \in V_0^k$; тогда при достаточно малых ϑ_k управления $u_k(t, \vartheta_k) = u_k^0(t) + \vartheta_k \overline{u}_k(t)$ $(k = 1, \dots, N)$ будут допустимыми и их можно считать заданными при $t_i = t_i^0 + \left(\sum_{k=1}^N \vartheta_k\right)\tau_i$ $(i = 1, 2)$. Решение системы (1.1) при $x(t_1) = x_0 + \left(\sum_{k=1}^N \vartheta_k\right)\xi_0$, соответствующее $u_k(t, \vartheta_k)$ $(k = 1, \dots, N)$, обозначим через

$$x(t, u_1(t, \vartheta_1), \dots, u_N(t, \vartheta_N), x(t_1), t_1). \tag{2.4}$$

В силу предположений, указанных в п. 1, решение (2.4) определено при $t \in [t_1^0, t_2^0]$ и непрерывно дифференцируемо по параметрам ϑ_k ([8], с. 41). Подставляя (2.4) в (1.1), дифференцируя последовательно по ϑ_k $(k = 1, \dots, N)$ полученное тождество и полагая $\vartheta_1 = \dots = \vartheta_N = 0$, $\xi^k = \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta_k}$, имеем

$$\frac{d\xi^k}{dt} = A(t)\,\xi^k + B_k(t)\,\overline{u}_k(t), \quad \xi^k(t_1^0) = \xi_0 \quad (k = 1, \dots, N).$$

По формуле Коши

$$\xi^k(t) = Y(t)\,\xi_0 + Y(t)\int_{t_1^0}^{t} Y^{-1}(\tau)\,B_k(\tau)\,\overline{u}_k(\tau)\,d\tau \quad (k = 1, \dots, N). \tag{2.5}$$

Выберем постоянную $\delta > 0$ настолько малой, чтобы при всех $|\vartheta_k| \leqslant \delta$ имело место (1.5). Тогда при указанных ϑ_k, в силу допустимости и оптимальности $u_k^0(t)$, справедливы соотношения

$$f_k(0, \dots, 0, \vartheta_k, 0, \dots, 0) = I_k(u_1^0, \dots, u_{k-1}^0, u_k(t, \vartheta_k), u_{k+1}^0, \dots, u_N^0) \geqslant$$
$$\geqslant I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0) = f_k(0, \dots, 0, \dots, 0).$$

Необходимые условия выполнения полученных неравенств имеют вид $\frac{\partial f_k(0, \ldots, \vartheta_k, \ldots, 0)}{\partial \vartheta_k} = 0$ при $\vartheta_k = 0$. Развернем это условие с учетом (1.4):

$$\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_1} \tau_1 + \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_2} \tau_2 + \left(\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_1)}, \xi_0\right) + \left(\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)}, \xi^k(t_2^0)\right) +$$

$$+ F_k(t_2^0)\tau_2 - F_k(t_1^0)\tau_1 + \int_{t_1^0}^{t_2^0} \left[\left(\frac{\partial F_k}{\partial x}, \xi^k\right) + \left(\frac{\partial F_k}{\partial u_k}, \overline{u}_k\right)\right] dt = 0$$

$$(k = 1, \ldots, N). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) в (2.6) и используя обозначения (2.1) — (2.3), получаем

$$\tau_1 a_k + \tau_2 b_k + (c^k, \xi_0) + \int_{t_1^0}^{t_2^0} (\overline{u}_k, g^k)\, dt = 0 \ (k = 1, \ldots, N), \tag{2.7}$$

где

$$\int_{t_1^0}^{t_2^0} (\overline{u}_k, g^k)\, dt = \int_{t_1^0}^{t_2^0} \left(\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)}, Y(t_2^0) Y^{-1}(t) B_k(t) \overline{u}_k(t)\right) dt +$$

$$+ \int_{t_1^0}^{t_2^0} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x}, Y(t) \int_{t_1^0}^{t} Y^{-1}(\tau) B_k(\tau) \overline{u}_k(\tau)\, d\tau\right) dt + \int_{t_1^0}^{t_2^0} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u_k}, \overline{u}_k\right) dt.$$

Меняя во втором интеграле порядок интегрирования и пользуясь тождеством $(x, Cx) = (C'x, x)$, находим

$$\int_{t_1^0}^{t_2^0} (\overline{u}_k, g^k)\, dt = \int_{t_1^0}^{t_2^0} \left(\overline{u}_k, B_k'(t) [Y^{-1}(t)]' \left[Y'(t_2^0) \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t}^{t_2^0} Y'(\tau) \frac{\partial F_k}{\partial x} d\tau\right] + \frac{\partial F_k}{\partial u_k}\right) dt.$$

В силу произвольности $\overline{u}_k(t)$ отсюда следует (2.3). Величины τ_1, τ_2, ξ_0, $\overline{u}_k$ произвольны, поэтому, положив в каждом из N тождеств (2.7) последовательно $\tau_1 = a_k$, $\tau_2 = b_k$, $\xi_0 = c^k$, $\overline{u}_k = g^k$, имеем

$$a_k^2 + b_k^2 + (c^k, c^k) + \int_{t_1^0}^{t_2^0} (g^k, g^k)\, dt = 0 \quad (k = 1, \ldots, N).$$

Отсюда следует справедливость соотношений (2.1) — (2.3).

Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. *Чтобы допустимые управления* $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k=1,\dots,N)$ *были локально оптимальными для дифференциальной игры* (1.1) — (1.6), *необходимо существование вектор-функций* $\Psi^k(t)$ *таких, что*:

1. *вектора* $u_k^0(t)$, $\Psi^k(t)$ $(k=1,\dots,N)$, $x^0(t)$ *удовлетворяют при* $t \in [t_1^0, t_2^0]$ *системе*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_k}{\partial \Psi^k},\ x(t_1^0)=x_0;\quad \frac{d\Psi^k}{dt}=-\frac{\partial H_k}{\partial x},\quad \Psi^k(t_2^0)=-\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)};$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k}=0,\quad H_k\equiv(\Psi^k,\ X)+F_k.$$

2. $a_k=b_k=0,\quad \Psi^k(t_1^0)-\dfrac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_1)}=0\quad (k=1,\dots,N).$

Для доказательства введем вектор-функции

$$\Psi^k(t)=-[Y^{-1}(t)]'\left[Y'(t_2^0)\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)}+\int_t^{t_2^0} Y'(\tau)\frac{\partial F_k}{\partial x}\,d\tau\right]. \tag{2.8}$$

Тогда $\Psi^k(t_2^0)=-\dfrac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)}$ и непосредственным дифференцированием убеждаемся, что

$$\frac{d\Psi^k}{dt}=-A'(t)\Psi^k+\frac{\partial F_k}{\partial x}=-\frac{\partial H_k}{\partial x},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_k}{\partial \Psi^k},\quad \frac{\partial H_k}{\partial u_k}=-g^k=0$$

$$(k=1,\dots,N).$$

Из (2.2) и (2.8) получаем

$$\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_1)}=-Y'(t_2^0)\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x(t_2)}-\int_{t_1^0}^{t_2^0} Y'(\tau)\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau=-Y'(t_1^0)\Psi^{-k}(t_1^0)=-\Psi^k(t_1^0).$$

Пусть изменение состояния k-го игрока описывается системой

$$\frac{dx_k}{dt}=X^k(t,\ x_k,\ u_k)\quad (k=1,\dots,N), \tag{2.9}$$

т. е. система (1.1) распадается на $N \leqslant n$ подсистем. Здесь q_k-мерный вектор x_k характеризует положение k-го игрока в фазовом пространстве, $\sum\limits_{k=1}^{N} q_k=n$. Далее, аналогично (1.6) можно ввести понятие локально оптимальных управлений, при этом плата k-го игрока имеет вид

$$I_k(u_1,\dots,u_N)=\Phi_k^0(x_1(t_1^k),\dots,x_N(t_1^k),\ x_1(t_2^k),\dots,x_N(t_2^k),\ t_1^k,\ t_2^k)+$$

$$+\int_{t_1^k}^{t_2^k} F_k(t,\ x_1,\dots,x_N,\ u_1,\dots,u_N)\,dt\quad (k=1,\dots,N), \tag{2.10}$$

и условия (1.5) и (1.3) заменяются требованием

$$\exists \varepsilon > 0 \ni \Big\{u_k(t) \in V^k : |x_{ku_k}(t_1^k) - x_k^0(t_1^0)| +$$
$$+ |x_{ku_k}(t_2^k) - x_k^0(t_2^0)| + (t_1^k - t_1^0)^2 + (t_2^k - t_2^0)^2 +$$
$$+ \int_{t_1^k}^{t_2^k} |u_k(t) - u_k^0(t)|\, dt < \varepsilon\Big\}, \quad x_k(t_1^k) = x_k^{(1)}. \tag{2.11}$$

Введем обозначения: $B_k(t) = \dfrac{\partial X^k}{\partial u_k}$, $Y_k(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\frac{dy}{dt} = A_k(t) y_k, \quad Y_k(t_1^0) = E_{q_k}, \quad A_k(t) = \frac{\partial X^k}{\partial x_k}.$$

Следствие 2.2. *Если* $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k = 1, \ldots, N)$ — *локально оптимальные управления дифференциальной игры* (2.9), $x_k^0(t_1^0) = x_{k0}$, (2.10), (2.11), (1.6), *то*

$$\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_1^k} - F_k(t_1^0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_2^k} + F_k(t_2^0) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_k(t_1^k)} + Y_k'(t_2^0) \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_k(t_2^k)} + \int_{t_1^0}^{t_2^0} Y_k'(t) \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\, dt = 0,$$

$$B_k'(t) [Y_k^{-1}(t)]' \left[Y'(t_2^0) \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_k(t_2^k)} + \int_t^{t_2^0} Y_k'(\tau) \frac{\partial F_k}{\partial x_k}\, d\tau \right] + \frac{\partial F_k}{\partial u_k} = 0$$

$$(t \in [t_1^0, t_2^0]; \quad k = 1, \ldots, N). \tag{2.12}$$

Замечание 2.1. В случае, когда начальное положение игроков в фазовом пространстве, векторы x_{k0} и моменты начала и конца игры $t_1^k = t_1^0$, $t_2^k = t_2^0$ фиксированы, необходимые условия локальной оптимальности управлений u_k^0 доставляют только последние равенства (2.12). Если при этом условия (2.12) выделяют единственную систему управлений $\{u_1^0(t), \ldots, u_N^0(t)\}$, векторы X^k линейны по x и u, функционалы I_k сильно выпуклы по u_k при фиксированных остальных управлениях, Φ_k и F_k дважды непрерывно дифференцируемы, то условия (2.12) являются достаточными для оптимальности управлений $u_k^0(t)$ $(k = 1, \ldots, N)$. Последнее утверждение следует из того факта, что при выполнении указанных условий $\dfrac{\partial^2 f_k(0, \ldots, \vartheta_k, \ldots, 0)}{\partial \vartheta_k^2} > 0$ при $\vartheta_k = 0$.

Следствие 2.3. *Если* $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k = 1, \ldots, N)$ — *локально оптимальные управления дифференциальной игры* (2.9), $x_k^0(t_1^0) = x_{k0}$, (2.10), (2.11), (1.6), *то существуют вектор-функции* $\Psi^k(t)$ *такие,* *что*

$$1.\ \frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial H_k}{\partial \Psi^k},\ x_k(t_1^0)=x_{k0};\quad \frac{d\Psi^k}{dt}=-\frac{\partial H_k}{\partial x_k},\ \Psi^k(t_2^0)=-\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_k(t_2^k)};$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k}=0,\ H_k\equiv(\Psi^k,\ X^k)+F_k.$$

$$2.\ \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_1^k}-F_k(t_1^0)=0,\qquad \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial t_2^k}+F_k(t_2^0)=0,\ \Psi^k(t_1^0)-\frac{\partial \Phi_k^0}{\partial x_k(t_1^k)}=0$$

$(k=1,\dots,N)$.

3. 1°. Приведем необходимые условия существования локально оптимальных управлений дифференциальной игры (1.1) — (1.6) при наличии ограничений вида

$$\Phi^j(x(t_1),\ t_1,\ t_2)=0\ (j=1,\dots,p\leqslant n+2). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Если управления* $u_k^0(t)$ $(t\in[t_1^0,\ t_2^0],\ k=1,\dots,N)$ *при условии* (3.1) *локально оптимальны для дифференциальной игры* (1.1) — (1.6), *то необходимо, чтобы*: 1. *выполнялось условие* 1 *следствия* 2.1; 2. *существовали постоянные* l_k^j $(j=0,\dots,p;$ $k=1,\dots,N)$, *одновременно не равные нулю при фиксированных* k, *и такие, что для* $S_k=\sum_{j=1}^{p} l_k^j\Phi^j+l_k^0\Phi_k^0$

$$\frac{\partial S_k}{\partial x(t_1)}-l_k^0\Psi^k(t_1^0)=0,\quad \frac{\partial S_k}{\partial t_1}-l_k^0F_k(t_1^0)=0,\quad \frac{\partial S_k}{\partial t_2}+l_k^0F_k(t_2^0)=0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Условия (3.1) накладывают ограничения на изменение τ_1, τ_2, ξ_0 в (2.7). Полагая в этом тождестве $\tau_1=\tau_2=0$, $\xi_0=0$, находим, что $g^k=0$. Отсюда следует выполнение условия 1 теоремы. Подставим (2.4) в (3.1), продифференцируем полученное тождество по ϑ_k и, положив $\vartheta_1=\dots=\vartheta_N=0$, получим

$$\frac{\partial\Phi^j}{\partial t_1}\tau_1+\frac{\partial\Phi^j}{\partial t_2}\tau_2+\left(\frac{\partial\Phi^j}{\partial x(t_1)},\ \xi_0\right)=0\ (j=1,\dots,p). \tag{3.3}$$

Равенства (2.7) при $g^k=0$ примут вид

$$a_k\tau_1+b_k\tau_2+(c^k,\ \xi_0)=0. \tag{3.4}$$

При каждом фиксированном k линейные формы (3.3), (3.4) линейно зависимы. В самом деле, если существует такое k, что (3.3), (3.4) линейно независимы, то система уравнений

$$I_k=I_k(u_1^0,\dots,u_N^0)-\delta,\quad \Phi^j=0 \tag{3.5}$$

$$(\delta=\mathrm{const}>0;\quad j=1,\dots,p;\quad k=1,\dots,N),$$

левые части которой вычисляются на семействе (2.4) при $u_k=u_k^0$, допускает нулевое решение $\tau_1=\tau_2=\delta=0$, $\xi_0=0$. Матрица Якоби при фиксированном k для (3.5) совпадает с матрицей форм (3.3), (3.4) при $\vartheta_k=1$, $\vartheta_i=\tau_1=\tau_2=0$ $(i=1,\dots,N;\ i\neq k)$, $\xi_0=0$ и, следовательно, имеет ранг $p+1$. По теореме о неявных функциях при достаточно малом δ существует решение (3.5) $\tau_1(\delta)$, $\tau_2(\delta)$, $\xi_0(\delta)$, отличное от тривиального. Тогда при $u=u_k^0$ существует решение $\bar{x}^0(t)$ системы (1.1), отличное от $x^0(t)$ и доставляющее функционалу

I_k значение меньшее, чем $I_k(u_1^0, \dots, u_N^0)$. Полученное противоречие и доказывает линейную зависимость форм (3.3), (3.4) при каждом из k. Тогда для каждого k существуют постоянные l_k^j $(j=0, \dots, p)$, одновременно не равные нулю, и такие, что

$$l_k^0 a_k + \sum_{j=1}^{p} l_k^j \frac{\partial \Phi^j}{\partial t_1} = 0, \quad l_k^0 b_k + \sum_{j=1}^{p} l_k^j \frac{\partial \Phi^j}{\partial t_2} = 0,$$

$$l_k^0 c^k + \sum_{j=1}^{p} l_k^j \frac{\partial \Phi^j}{\partial x(t_1)} = 0 \quad (k=1, \dots, N)$$

(эти условия совпадают с (3.2)).

Следствие 3.1. *Если* $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k=1, \dots, N)$ — *локально оптимальные управления дифференциальной игры* (2.9), $x_k^0(t_1^0) = x_{k0}$, (2.10) — (2.11), (1.6) *при условии* (3.1), *то существуют вектор-функции* $\Psi^k(t)$ *такие, что* 1. *выполнено условие* 1 *следствия* 2.3; 2. *существуют постоянные* l_k^j $(j=0, \dots, p;\ k=1, \dots, N)$, *одновременно не равные нулю при фиксированных* k, *и такие, что для* $S_k = \sum_{j=1}^{p} l_k^j \Phi^j + l_k^0 \Phi_k^0$ *справедливы соотношения*

$$\frac{\partial S_k}{\partial x_k(t_1^k)} - l_k^0 \Psi^k(t_1^0) = 0, \quad \frac{\partial S_k}{\partial t_1^k} - l_k^0 F_k(t_1^0) = 0, \quad \frac{\partial S_k}{\partial t_2^k} + l_k^0 F_k(t_2^0) = 0$$

$$(k=1, \dots, N).$$

2°. Далее, предполагаем, что: a) множества $V^k (k=1, \dots, N)$ выпуклы и замкнуты; b) функционалы $I_k(u_1, \dots, u_N)$ выпуклы на V^k $(k=1, \dots, N)$ при любых фиксированных $u_i \in V^i$ $(i=1, \dots, N;\ i \neq k)$, т. е.

$$I_k\left(u_1, \dots, u_{k-1}, \frac{u_k + \bar{u}_k}{2}, u_{k+1}, \dots, u_N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} I_k(u_1, \dots, u_k, \dots, u_N) + \frac{1}{2} I_k(u_1, \dots, \bar{u}_k, \dots, u_N) \qquad (3.6)$$

для всех u_k, $\bar{u}_k \in V^k$; c) функционалы I_k дифференцируемы по u_k в смысле Фреше; тогда, если первая производная есть линейный функционал, то (3.6) эквивалентно ([9], с. 788) условию

$$I_k(u_1, \dots, \bar{u}_k, \dots, u_N) \geqslant I_k(u_1, \dots, u_k, \dots, u_N) +$$
$$+ \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_N), \bar{u}_k - u_k)\, dt \quad (k=1, \dots, N). \qquad (3.7)$$

Отметим, что [10] при выполнении ограничений п. 1 следствия 3.1

$$I_{ku_k} = \frac{\partial F_k}{\partial u_k} - \frac{\partial X}{\partial u_k} \Psi^k, \text{ где } \frac{d\Psi^k}{dt} = -A'(t)\Psi^k + \frac{\partial F_k}{\partial x}, \ \Psi^k(t_2^0) = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial x(t_2)}.$$

d) величины $t_1 = t_1^0$, $t_2 = t_2^0$ и $x(t_1) = x_0$ фиксированы.

Теорема 3.2. *Пусть имеют место условия* a) — d). *Для того чтобы* $u_k^0(t)$ $(t \in [t_1^0, t_2^0],\ k = 1, \dots, N)$ *были оптимальными управлениями дифференциальной игры* (1.1) — (1.6), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\min_{u_k \in V^k} \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1^0, \dots, u_N^0),\ u_k - u_k^0(t))\, dt = 0 \quad (k = 1, \dots, N). \tag{3.8}$$

Доказательство. Управление $u_k^\lambda = u_k^0 + \lambda (u_k - u_k^0)$ является допустимым при любом $\lambda \in [0, 1]$ вследствие выпуклости V^k, и поэтому $I_k(u_1^0, \dots, u_k, \dots, u_N^0) \geqslant I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0)$. Используя формулу

$$I_k(u_1^0, \dots, u_k^\lambda, \dots, u_N^0) = I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0) +$$
$$+ \lambda \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1^0, \dots, u_N^0),\ u_k - u_k^0)\, dt + O(\lambda), \quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} O(\lambda) = 0, \tag{3.9}$$

разделив обе части равенства на λ, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, из предыдущего неравенства последовательно получаем

$$\int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1^0, \dots, u_N^0),\ u_k - u_k^0)\, dt \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant \min_{u_k \in V^k} \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k},\ u_k - u_k^0)\, dt \leqslant \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k},\ u_k^0 - u_k^0)\, dt = 0,$$

откуда следует (3.8). Обратное утверждение получаем из (3.7), (3.8):

$$I_k(u_1^0, \dots, u_k, \dots, u_N^0) = I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0) +$$
$$+ \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1^0, \dots, u_N^0),\ u_k - u_k^0)\, dt \geqslant I_k(u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_N^0) +$$
$$+ \min_{u_k \in V^k} \int_{t_1^0}^{t_2^0} (I_{ku_k}(u_1^0, \dots, u_N^0),\ u_k - u_k^0)\, dt = I_k(u_1^0, \dots, u_N^0).$$

Отметим, что указанный метод доказательства предложен в [11] при исследовании неклассических вариационных задач.

Замечание 3.1. Условие (3.8) позволяет применить для нахождения оптимальных управлений дифференциальных игр N лиц различные приближенные методы, разработанные в [11].

Следствие 3.2. *Утверждение теоремы* 3.2 *имеет место и для дифференциальной игры* (2.9) — (2.11), (1.6), *однако градиенты функционалов* I_k *определяются по формуле*

$$I_{ku_k} = \frac{\partial F_k}{\partial u_k} - \frac{\partial X^k}{\partial u_k}\Psi^k, \quad где \quad \frac{d\Psi^k}{dt} = -A_k'(t)\Psi^k + \frac{\partial F_k}{\partial x_k},$$

$$\Psi^k(t_2^0) = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k(t_2)}.$$

г. Орехово-Зуево

Поступило
20 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Нэш Дж. Бескоалиционные игры. В сб.: „Матричные игры". М., Физматгиз, 1961, с. 205—221.

2. Зубов В. И. Теория оптимального управления. Л., „Судостроение", 1966.

3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., „Мир", 1967.

4. Zieba A. An example of pursuit theory. Studia math., t. 22, 1962.

5. Вайсборд Э. М. О существовании решения в дифференциальной игре нескольких лиц. Тезисы 1 Всесоюзн. конференц. по теории игр. Ереван, 1968, с. 32—33.

6. Карвовский Г. С., Кузнецов А. Д. Принцип максимума в теории дифференциальных игр N лиц. ИАН СССР. Сер. техн. кибернетика, 1966, № 6, с. 13—16.

7. Howard C. I. Equilibrium points of N-person differential games. Dissert. Absts., 1968, B 28, No 7, p. 2928—2929.

8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИИЛ, 1958.

9. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 6, № 5, 1966, с. 787—823.

10. Жуковский В. И. К теории дифференциальных игр с интегральной платой, I. Кибернетика, 1971, № 4.

11. Трухаев Р. И., Хоменюк В. В. Методы исследования неклассических вариационных задач. В сб.: „Теория оптимальных решений", Киев, ИК АН УССР, т. 1, 1968, с. 9—24.

А. В. ЛАПИН. О КОРРЕКТНОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Исследуется корректность в гильбертовом пространстве нелинейной двухслойной разностной схемы $By_t(t) + A(t)y(t) = \varphi(t)$, $y(0) = y_0$, где B — линейный самосопряженный положительно определенный оператор, A — нелинейный, вообще говоря, недифференцируемый оператор. Предполагается, что форма $(Ay - Au, v)$, порождаемая оператором A, может быть представлена в виде суммы форм $(A_0y - A_0u, v)$ и $(A_1y - A_1u, v)$, где оператор A_0 удовлетворяет условиям типа полуограниченной вариации и ограниченной нелинейности, A_1 — условию подчиненности. Доказывается теорема о корректности данной схемы в энергетическом пространстве оператора B.

В качестве приложения общей теоремы исследуется корректность разностной схемы для первой краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

(Работа поступила в журнал „Математика" 26.V.1970.)