А. Н. Ветохин, Точный класс Бэра вспомогательных показателей, *Дифференц. уравнения*, 2000, том 36, номер 10, 1424–1426

2000. Т. 36, № 10. С. 1424 — 1426

УДК 517.926.4

ТОЧНЫЙ КЛАСС БЭРА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

А. Н. Ветохин

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество систем M_n вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+, \tag{1}$$

где $A: R^+ \to \operatorname{End} R^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Напомним, что верхний вспомогательный показатель системы (1) определяется при всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ формулой (см. [1])

$$\overline{\nu}_k(A) = \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln d_k(jT, (j-1)T), \tag{2}$$

а нижний вспомогательный показатель — формулой

$$\underline{\nu}_k(A) = \varliminf_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln d_k(jT, (j-1)T), \tag{3}$$

где $d_k(t, s)$ — k-е (в порядке неубывания) сингулярное число оператора Коши системы (1). Вспомогательные показатели играют важную роль в теории стохастической устойчивости показателей Ляпунова [1]. В настоящей работе найден минимальный класс Бэра [2, с. 5 — 7] вспомогательных показателей, рассматриваемых как функции на множестве M_n, наделенном топологией компактной сходимости коэффициентов на R^+ (это топологическое пространство будем обозначать через M_n^c). Отметим, что при $k = n$ функции $\overline{\nu}_n(\cdot)$, $\underline{\nu}_n(\cdot)$ совпадают с верхним центральным показателем [3, с. 116], а поэтому принадлежат в точности второму классу на M_n^c [4], а при $k \in \{1, \dots, n-1\}$ функции $\underline{\nu}_k(\cdot)$ и $\overline{\nu}_1(\cdot)$ принадлежат третьему классу Бэра на M_n^c [5].

Теорема 1. *Если $n > 1$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, то функция $\underline{\nu}_k(\cdot): M_n \to R$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Пусть $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим множество блочно-диагональных систем вида

$$\dot{x} = \{2, \dots, 2, U(t), \underbrace{-2, \dots, -2}_{k-1}\}x, \tag{4}$$

где $U(t): R^+ \to \operatorname{End} R^2$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{t\in R^+} \|U(t)\| \le 1. \tag{5}$$

Для k-го нижнего вспомогательного показателя системы (4) имеем $\underline{\nu}_k = \omega(U)$, где $\omega(U)$ — нижний центральный показатель системы $\dot{y} = U(t)y$. В работе [6] установлено, что функция $\omega(\cdot)$ не принадлежит второму классу Бэра на множестве двумерных систем, удовлетворяющих условию (5), наделенном топологией компактной сходимости, а следовательно, функция $\underline{\nu}_k(\cdot)$ не принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^c. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если $n > 1$, $k \in \{2, \dots, n-1\}$, то функция $\overline{\nu}_k(\cdot): M_n \to R$ принадлежит четвертому классу Бэра и не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c.*

Доказательство. Докажем, что функция $\overline{\nu}_k(\cdot)$ принадлежит четвертому классу Бэра. Так как для оператора Коши системы имеет место равенство ($[\cdot]$ — целая часть числа)

$$X(iT, (i-1)T) = X(iT, i[T])X(i[T], (i-1)[T])X((i-1)[T], (i-1)T),$$

то получаем, что

$$|\ln d_k(i[T], (i-1)[T]) - \ln d_k(iT, (i-1)T)| \le 2i(T - [T]) \sup_{t\in R^+} \|A(t)\|.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \ln d_k(jT, (j-1)T) - \sum_{j=1}^{m} \ln d_k(j[T], (j-1)[T]) \right| \le 2m(T - [T]) \sup_{t\in R^+} \|A(t)\|.$$

Таким образом,

$$\overline{\nu}_k(A) = \overline{\lim_{l\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \frac{1}{ml}\sum_{j=1}^{m}\ln d_k(jl,(j-1)l), \tag{6}$$

из этой формулы получаем, что функция $\overline{\nu}_k(\cdot)$ принадлежит четвертому классу Бэра на M_n^c.

Доказательство непринадлежности третьему классу Бэра будет разбито на ряд лемм.

Построим метрическое пространство $\mathcal{B}(N)$ следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}(N)$ являются всевозможные (счетные) последовательности $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\dots)$ натуральных чисел; расстояние между двумя точками $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\dots)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m,\dots)$ определяется как $\rho(\alpha,\beta) = 1/m$, где m — наименьшее из тех натуральных чисел, для которых $\alpha_m \neq \beta_m$. Обозначим через L_ω множество тех последовательностей, у которых бесконечно много различных α_i, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Н. Н. Лузиным [7] установлено, что характеристическая функция множества L_ω не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(N)$. Используя этот результат, докажем следующую лемму (необходимое условие принадлежности функционала третьему классу Бэра).

Лемма 1. *Пусть λ — произвольный функционал на метрическом пространстве M. Если λ принадлежит третьему классу Бэра на M, то для любой непрерывной функции $\varphi : \mathcal{B}(N) \to M$ пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(L_\omega))$ и $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(N)\setminus L_\omega))$ непусто.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть существует непрерывная функция $\varphi : \mathcal{B}(N) \to M$ такая, что пересечение замыканий множеств $\lambda(\varphi(L_\omega))$ и $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(N)\setminus L_\omega))$ пусто. Пусть Z_1 — замыкание множества $\lambda(\varphi(L_\omega))$, а Z_2 — замыкание множества $\lambda(\varphi(\mathcal{B}(N)\setminus L_\omega))$. Так как отображение $\lambda\circ\varphi$ принадлежит третьему классу на пространстве $\mathcal{B}(N)$, то множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2))$ являются множествами типа $G_{\delta\sigma\delta}$ в $\mathcal{B}(N)$ [8, с. 248], а множества $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_1))$ и $\varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_2))$ являются множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ в $\mathcal{B}(N)$ [8, с. 248]. Заметим, что $L_\omega \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_1)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_2)) \subset L_\omega$, $\mathcal{B}(N)\setminus L_\omega \subset$ $\subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(Z_2)) \subset \varphi^{-1}(\lambda^{-1}(R\setminus Z_1)) \subset \mathcal{B}(N)\setminus L_\omega$, а значит, множества L_ω и $\mathcal{B}(N)\setminus L_\omega$ являются одновременно множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ и $G_{\delta\sigma\delta}$ в пространстве $\mathcal{B}(N)$. Следовательно, характеристическая функция множества L_ω является функцией третьего класса Бэра на пространстве $\mathcal{B}(N)$ [8, с. 249], что противоречит результату Лузина. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Существует непрерывное отображение $\varphi :\ \mathcal{B}(N) \to M_3^c$ такое, что $1/3 \le \overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \le 1$ при $\alpha \in L_\omega$, $0 \le \overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \le 25/99$ при $\alpha \notin L_\omega$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(N)$. Разделим отрезок $[(3k)!, (3k+3)!]$ на отрезки длины $g_k = \min\{k,\alpha_k\}$, обозначим концы получившихся отрезков через T_k^i ($i = 0,1,\dots,I_k = ((3k+3)! - (3k)!)g_k^{-1}$). Рассмотрим диагональную систему $\dot{x} = \{a_\alpha(t), b_\alpha(t), c_\alpha(t)\}x$, где

$$a_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [T_k^{3l}, T_k^{3l}] \cup [T_k^{3l+1}, T_k^{3l+1} + g_k/3], \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$b_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [T_k^{3l} + g_k/3, T_k^{3l} + 2g_k/3] \cup [T_k^{3l+1}, T_k^{3l+1} + g_k/3] \cup [T_k^{3l+2}, T_k^{3l+2} + g_k/3], \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$c_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [T_k^{3l} + 2g_k/3, T_k^{3l+1}] \cup [T_k^{3l+2}, T_k^{3l+2} + g_k/3], \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

$$l = 0,\dots,I_k/3 - 1.$$

Итак, мы получили отображение $\varphi :\ \mathcal{B}(N) \to M_3^c$. Это отображение непрерывно. Действительно, пусть $\rho(\alpha,\beta) = 1/m$, т.е. $\alpha_1 = \beta_1,\dots,\alpha_m = \beta_m$. Тогда получаем $a_\alpha(t) = a_\beta(t)$, $b_\alpha(t) = b_\beta(t)$, $c_\alpha(t) = c_\beta(t)$ на отрезке $[0,(3m)!]$, а следовательно, φ является непрерывным отображением, причем $0 \le \overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \le 1$ для любого $\alpha \in \mathcal{B}(N)$.

Пусть $\alpha \in L_\omega$, т.е. существует бесконечно много $\alpha_{k'}$, каждое из которых повторяется бесконечное число раз. Из формулы (6) получаем

$$\overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \ge \overline{\lim_{k'\to\infty}}\ \overline{\lim_{m\to\infty}}\ \frac{1}{m\alpha_{k'}}\sum_{j=1}^{m}\ln d_2(j\alpha_{k'},(j-1)\alpha_{k'}).$$

Для каждого $\alpha_{k'}$ существует натуральное число k_0' такое, что $k_0' > \alpha_{k'}$. Пусть $j_{k_0'} - 1 = (3k_0')!/\alpha_{k'}$, $m_{k_0'} =$ $= (3k_0'+3)!/\alpha_{k'}$, тогда получаем

$$\overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \ge \overline{\lim_{k'\to\infty}}\ \frac{1}{m_{k_0'}\alpha_{k'}}\sum_{j=j_{k_0'}}^{m_{k_0'}}\ln d_2(j\alpha_{k'},(j-1)\alpha_{k'}) =$$

$$= \overline{\lim_{k'\to\infty}}\ \frac{1}{m_{k_0'}}\left(\frac{1}{3}(m_{k_0'}\alpha_{k'} - j_{k_0'}\alpha_{k'})\right) = \lim_{k'\to\infty}\frac{(3(k_0'+1))! - (3k_0')!}{3(3(k_0'+1))!} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $\alpha \notin L_\omega$, т.е. может существовать только ограниченное количество α_k, каждое из которых встречается бесконечное число раз в последовательности $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots)$. Пусть p — наибольшее из этих чисел (если таких чисел нет, то считаем $p = 0$). Для любого $m \ge 99p$ существует $k(m)$ такое, что для любого $k \ge k(m)$

будет выполнено одно из неравенств $m \geq 99\alpha_k$ (для членов последовательности α, повторяющихся бесконечное число раз) или $99m \leq \alpha_k$ (для членов последовательности α, повторяющихся конечное число раз). Пусть $sm \in [(3k)!, (3k+3)!]$, где $k \geq \max\{k(m), (3m)!\}$, тогда имеем

$$\sum_{j=(3k)!/m}^{s} \ln d_k(jm, (j-1)m) \leq (2/9 + 3/99)(s - (3k)!) = (25/99)(s - (3k)!).$$

Отсюда и из формулы (6) получаем при $\alpha \notin L_\omega$ $\overline{\nu}_2(\varphi(\alpha)) \leq 25/99$. Лемма 2 доказана.

В завершение доказательства теоремы 2 отметим, что топологическое пространство M_n^c может быть метризовано [8, с. 108 — 109]. Пусть $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathcal{B}(\mathrm{N}) \to M_n^c$, определяемое формулой $\alpha \to \dot{x} = \{2, \ldots, 2, a_\alpha(t), b_\alpha(t), c_\alpha(t), \underbrace{-2, \ldots, -2}_{k-2}\}x$, где $a_\alpha(t), b_\alpha(t), c_\alpha(t)$ из леммы 2.

Это отображение является непрерывным. Рассмотрим множества

$$\overline{\nu}_k(\varphi(L_\omega)) \quad \text{и} \quad \overline{\nu}_k(\varphi(\mathcal{B}(N) \setminus L_\omega)). \tag{7}$$

Из леммы 2 получаем $\overline{\nu}_k(\varphi(\alpha)) \geq 1/3$ при $\alpha \in L_\omega$, $\overline{\nu}_k(\varphi(\alpha)) \leq 25/99$ при $\alpha \notin L_\omega$.

Итак, пересечение замыканий множеств (7) пусто в R, следовательно, по лемме 1 функция $\overline{\nu}_k(\cdot)$ не принадлежит третьему классу Бэра на пространстве M_n^c. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим два интересных следствия из теорем 1 и 2. Во-первых, так как показатели $\overline{\nu}_k(\cdot)$ и $\underline{\nu}_k(\cdot)$ принадлежат разным классам Бэра, то в пространстве M_n $(n > 2)$ существует система (более того, бесконечно много систем), для которой выполнено неравенство $\overline{\nu}_k(A) \neq \underline{\nu}_k(A)$ при $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ (ранее это было установлено в работе [9] при помощи построения системы, обладающей этим свойством). Во вторых, из теорем 1 и 2 следует, что формулы (2) и (3) являются наилучшими в смысле работ [10, 11].

Автор благодарен В. М. Миллионщикову за постановку задачи и И. Н. Сергееву за оказанное внимание к работе.

Литература

1. *Миллионщиков В. М.* // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 4. С. 503 — 513.
2. *Бэр Р.* Теория разрывных функций. М.; Л., 1932.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
4. *Ширяев К. Е.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 5. С. 905.
5. *Феклин В. Г.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 2009.
6. *Ветохин А. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1597.
7. *Лузин Н.Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М., 1953.
8. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1934.
9. *Илларионова О. Г.* // Тр. Ин-та прикл. механики им. Векуа. 1988. Т. 31. С. 80 — 98.
10. *Сергеев И. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2092 — 2093.
11. *Быков В. В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2095.

г. Москва

Поступила в редакцию
26 сентября 1997 г.