ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 12 (151)

УДК 517.51

А. Ю. Петрович

СУММЫ РИМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, РАЗЛАГАЮЩИХСЯ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Мы будем рассматривать суммы Римана вида

$$R_n(\varphi, a) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(2\pi \frac{k-a}{n}\right), \quad a \in [0, 1],$$

для функций $\varphi(x)$, являющихся суммами тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx); \quad a_m \downarrow 0, \ b_m \downarrow 0.$$

Поведение таких сумм при $n \to \infty$ связано со скоростью убывания коэффициентов этих рядов. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx. \tag{1}$$

Тогда, если $b_m \downarrow 0$, то для любого $a \in [0, 1]$ существует константа $C(a)$, зависящая, вообще говоря, от a, такая, что

$$|R_n(f, a)| \leqslant C(a)\, b_n.$$

Замечание. В условиях теоремы $f(x)$ может быть даже несуммируемой ($b_m = 1/\ln(m+1)$), а последовательности сумм Римана $R_n(f, a)$, тем не менее, имеют предел, равный нулю.

Теорема 2. *Пусть*

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx. \tag{2}$$

Тогда, если $a_m \downarrow 0$, то при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ ряд (2) сходится, и при $0 < a < 1$ можно рассматривать $R_n(g, a)$, причем существует константа $C(a)$ такая, что $|R_n(g, a) - \pi a_0| \leqslant C(a)\, a_n$.

При $a = 0$ это, вообще, говоря, неверно даже в том случае, когда

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m < +\infty, \tag{3}$$

т. е. ряд (2) сходится всюду.

Теорема 3. *Если в каждой точке выполнено (1), где $\{b_m\}$ — выпуклая последовательность, то $R_n(f, a) = 0$ при любом n и при a, равном 0, 1/2 или 1;*

— $R_n(f, a) \geqslant C(a) b_n$ $(0 < a < 1/2)$; $R_n(f, a) \geqslant C(a)\, b_n$ $(1/2 < a < 1)$; $C(a) > 0$.

Для доказательства теоремы 3 используется следующая лемма, которая сама по себе является интересным результатом для тригонометрических рядов с выпуклыми коэффициентами.

Лемма 1. *Пусть в каждой точке выполнено* (1), *где* $\{b_m\}$ — *выпуклая последовательность. Тогда при* $x \in (0, \pi)$ *имеем* $f(x) \geqslant C(x) b_1$, *где* $C(x) > 0$ — *величина, зависящая от* x, *но не зависящая от набора коэффициентов.*

Эта лемма является усилением одного утверждения Фейера ([1], с. 37), который доказал, что в условиях леммы 1 $f(x) > 0$ при $0 < x < \pi$. При выводе леммы 1 используется

Лемма 2. *Пусть* $\overline{K}_n(x)$ — *ядро, сопряженное к ядру Фейера* (см. [2], с. 524). *Тогда при* $0 < x < \pi$ *существует положительная константа* $C(x)$, *зависящая от* x, *такая, что для* $n = 1, 2, \ldots$ *будет* $\overline{K}_n(x) \geqslant C(x)$.

Замечание к теореме 3. Условия $b_m \downarrow 0$ вместо выпуклости в теореме 3 недостаточно. Для доказательства этого факта строятся последовательность индексов $n_m \to \infty$ и последовательность $b_n \downarrow 0$ такие, что для функции $f(x)$, определяемой из (1), $R_{n_m}(f, 1/4) = o(b_{n_m})$.

Из определения сумм $R_n(f, a)$ непосредственно следует, что

$$R_n(f(x) \sin nx, a) = -\sin 2\pi a \cdot R_n(f, a). \tag{4}$$

Поэтому из теорем 1 и 3 мы видим, что справедлива

Теорема 3′. *Пусть в каждой точке выполнено* (1), *где* $\{b_m\}$ — *выпуклая последовательность. Тогда при* a, *равном* 0; 1/2 *или* 1, *величина* $R_n(f(x) \sin nx, a)$ *равна нулю; при остальных* $a \in [0, 1]$

$$0 < C_1(a) \leqslant \frac{R_n(f(x) \sin nx, a)}{b_n} \leqslant C_2(a), \tag{5}$$

где $C_1(a)$ *и* $C_2(a)$ — *константы, зависящие от* a, *причем оценка сверху в неравенстве* (5) *верна для случая* $b_m \downarrow 0$, *а оценка снизу, вообще говоря, неверна.*

Если $b_m \downarrow 0$, то в условиях (1) функция $f(x) \sin nx$ всюду непрерывна (см. [2], с. 656). Поэтому естественно сравнить величины

$$\frac{1}{\pi} R_{\nu_n}(f(x) \sin nx, a) \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \tag{6}$$

если $\nu_n \to \infty$ — некоторая последовательность натуральных чисел и $a \in [0, 1]$. При $\nu_n = n$ величины (6) не обязаны быть эквивалентными при всех a, т. к. в силу (4) $R_n(f(x) \sin nx, 0) = 0$. Будем сравнивать величины (6) при

$$\nu_n \geqslant n + 1. \tag{7}$$

Имеют место следующие утверждения (через $\rho_n(\{\nu_k\}, a)$ обозначено отношение $(R_{\nu_n}(f(x) \sin nx, a))/\pi b_n$).

A. *Если* $b_n \downarrow 0$, *то величина* $R_{n+1}(f(x) \sin nx, 0)$ *даже не стремится к нулю, в отличие от теоремы* 3′, *где* $\nu_n = n$.

B. *Если* $b_n \downarrow 0$ — *произвольная последовательность, для которой* $n + 1 \leqslant \nu_n \leqslant 2n - 1$ *по некоторой последовательности номеров* n, *то для выпуклой последовательности* $b_n = 1/n!$ *и для соответствующей функции* $f(x)$, *определяемой из* (1), *величина* $\rho_n(\{\nu_k\}, 0)$ *неограничена.*

C. *Если* $\nu_n \geqslant 2n$ *и* $b_n \downarrow 0$, *то для функции* $f(x)$, *определяемой из* (1), *при любом* $a \in [0, 1]$

$$0 \leqslant \rho_n(\{\nu_k\}, a) \leqslant 2.$$

D. *Если* $\nu_n \geqslant (2 + \varepsilon) n$, $\varepsilon > 0$, *то для функции* $f(x)$, *определяемой из* (1),

$$\rho_n(\{\nu_k\}, a) \geqslant C > 0$$

при выпуклой $b_n \to 0$ *и для любого* $a \in [0, 1]$.

Замечание 1. При $\varepsilon = 0$ утверждение D неверно.

Замечание 2. В утверждении D выпуклость нельзя заменить на монотонность, даже если константу считать зависящей от a. А именно, какова бы ни была последовательность $\{\nu_n\}$ такая, что $\nu_n > 2n$, начиная с некоторого номера n_1, найдутся последовательность $b_n \downarrow 0$ и последовательность индексов $\{n_m\}$ такие, что для функции $f(x)$, определяемой из (1), $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_{n_m}(\{\nu_k\}, 0) = 0$.

E. *Если* $n + 1 \leqslant \nu_n \leqslant C_n$ *(хотя бы по некоторой последовательности номеров), где* C — *постоянная, то для выпуклой последовательности* $b_n = 1/n$ *и для соответствующей функции* $f(x)$, *определяемой из* (1), *равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\{\nu_k\}, a) = 1 \tag{8}$$

неверно при $a = 0$.

Наконец, имеет место

Теорема 4. *Пусть в каждой точке выполнено* (1), *где* $\{b_m\}$ — *выпуклая последовательность. Если последовательность* $\{\nu_n\}$ *такова, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{n} = \infty$, *то имеет место соотношение* (8) *равномерно по* $a \in [0, 1]$.

Замечание. Если в условии теоремы заменить выпуклость на монотонность, то теорема теряет силу (см. замечание 2 к утверждению D).

Если вместо ряда (1) рассматривать всюду сходящийся ряд (2), где $a_m \downarrow 0$, то теоремы, аналогичные предыдущим, не имеют места, хотя в этом случае выполнено (3).

Основное утверждение состоит в следующем.

Теорема 5. *Каковы бы ни были выпуклая положительная последовательность* $p_n \to 0$ *и последовательность* $\{\nu_n\}$, *удовлетворяющая условию* (7), *найдется выпуклая последовательность* $\{a_n\}$ *такая, что*

$$0 < a_n \leqslant p_n, \tag{9}$$

и для функции $g(x)$, *определяемой из* (2), $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} R_{\nu_n}(g(x)\cos nx, 0)/a_n = +\infty$.

Для доказательства этой теоремы используется следующая

Лемма 3. *Каковы бы ни были выпуклая положительная последовательность* $p_n \to 0$ *и последовательность натуральных чисел* $\{\omega_n\}$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n} = \infty$, *найдется выпуклая последовательность* $\{a_n\}$, *удовлетворяющая условию* (9), *и такая, что по некоторой последовательности индексов* $\{n_m\}$ $a_{\omega_{n_m}}/a_{n_m} \geqslant C > 0$.

Замечание к теореме 5. Тем не менее, существуют выпуклые последовательности, удовлетворяющие условию (3), такие, что для функции $g(x)$, определяемой из (2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\nu_n}(g(x)\cos nx, a)}{\pi a_n} = 1$$

равномерно по $a \in [0, 1]$, если имеет место (7).

Автор выражает глубокую признательность члену-корреспонденту АН СССР Д. Е. Меньшову за постановку вопросов и ценные советы в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fejer L. Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Trans. Amer. Math. Soc., v. 39, 1936, p. 18—59.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз. 1961.

г. Москва

Поступила
13 III 1973