УДК 519.21

СЛУЧАЙНЫЕ ДЕТЕРМИНАНТЫ

В. Л. Гирко

В обзоре собраны основные утверждения теории случайных детерминантов, возникшей на стыке теории вероятностей и смежных с нею наук. Впервые распределения случайных детерминантов начали изучать в многомерном статистическом анализе, где было получено следующее изящное утверждение: пусть $\Xi=(\xi_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — вещественная матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, тогда $\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \xi_{ij}^2$, где символ $\approx$ означает совпадение распределений случайных величин. В настоящее время распределения случайных детерминантов находят применения также в теории управления линейными стохастическими системами, в линейном стохастическом программировании, в теории неупорядоченных кристаллических структур, в статистической физике. Результаты и методы теории случайных детерминантов настолько разносторонни и глубоки, что эта теория в настоящее время является одним из главнейших направлений теории вероятностей и ее применений. Особенно плодотворным явилось применение теории случайных детерминантов в G-анализе наблюдений над случайными векторами, позволившее значительно уменьшить объем выборочных значений при решении практических задач.

§ 1. Полярное разложение случайных матриц

Пусть $\Xi=(\xi_{ij})$, $i=1,\ldots, n$, $j=1,\ldots, m$, $m\geqslant n$, — прямоугольная вещественная случайная матрица. Предположим, что существует совместная плотность распределения случайных элементов ξ_{ij}, равная $p(X)$, где X — вещественная матрица той же размерности, что и Ξ. Полярным разложением матрицы Ξ будем называть представление матрицы Ξ в виде $\Xi=SU$, где S — неотрицательно определенная матрица, а U — ортогональная матрица. Функция распределения матриц S и U найдена в работе [31]: пусть G — группа m-мерных вещественных ортогональных матриц и μ — нормированная мера Хаара на ней. Тогда [31]

$$\mathbf{P}\{S^2 \in L_1,\ U \in L_2\} =$$
$$= c_{n,m} \int\limits_{Z \in L_1, H^{(n)} \in L_2} p(\sqrt{Z}H^{(n)}) \det Z^{(m-n-1)/2} \mu(dH)\, dZ, \quad (1.1)$$

где L_1 и L_2 — измеримые множества соответственно матриц S и U, $H=(h_{ij}) \in G$, $H^{(n)}=(h_{ij})$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, $c_{n,m}^{-1}= = \pi^{n(n-1)/4-nm/2} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right)$.

Если вектор-столбцы матрицы Ξ независимы и распределены по нормальному закону с нулевым вектором средних и невырожденной матрицей ковариаций R, то плотность распределения матрицы S^2 называется плотностью Уишарта [3,71] и равна

$$(2\pi)^{-\frac{mn}{2}} c_{n,m} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Sp} R^{-1}Z\right\} \det Z^{(m-n-1)/2} \det R^{-n/2}. \quad (1.2)$$

Плотность Уишарта впервые была получена в многомерном статистическом анализе при нахождении плотности распределения эмпирической ковариационной матрицы [3]

$$\tilde{R}=(n-1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k-\tilde{x})(x_k-\tilde{x}), \quad \tilde{x}=n^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

где x_k — независимые наблюдения над случайным m-мерным вектором ξ, распределенным по нормальному закону. Легко проверить, что $\tilde{R} \approx (n-1)^{-1}TT'$, где $T=(x_{ij}-\mathbf{M}x_{ij})$, $j=1, \ldots, n-1$, $i=1, \ldots, m$, поэтому плотность распределения матрицы $\tilde{R}$ легко получить из формулы (1.1). Различным обобщениям плотности Уишарта посвящены работы Джеймса [91]. Отметим, что в частности из формулы (1.1) вытекает следующее утверждение: если $p(\sqrt{Z}H^{(n)}) \equiv q(Z)$, то матрицы S и U стохастически независимы и

$$\mathbf{P}\{S^2 \in L_1\} = c_{n,m} \int\limits_{Z \in L_1} q(Z) \det Z^{(m-n-1)/2} dZ, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{P}\{U \in L_2\} = \int\limits_{H^{(n)} \in L_2} \mu(dH). \quad (1.4)$$

С помощью формул (1.1)—(1.4) можно найти моменты случайных детерминантов. Если случайная вещественная матрица $\Xi=(\xi_{ij})$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, $m \geqslant n$, имеет плотность $p(X)$ и существует $\mathbf{M}(\det \Xi)^{2k}$, где k — целое неотрицательное число, то [31, 32]

$$\mathbf{M}(\det \Xi)^{2k} =$$

$$= \frac{c_{n,m}}{c_{n,m+2k}} \int p\left(\sqrt{Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n}} H^{(n)}\right) \mu(dH)\, dZ_{(m+2k)\times n}, \quad (1.5)$$

где Z — вещественная матрица размерности $(m+2k)\times n$. Здесь и в дальнейшем, если не указана область интегрирования, то интегрирование ведется по всей области изменения переменных подынтегральной функции.

Если дополнительно $p(X)=\tilde{p}(XX')$ для всех матриц X размера $m\times n$, то

$$\mathbf{M}(\det \Xi)^{2k} = \frac{c_{n,m}}{c_{n,m+2k}} \int \tilde{p}\left(Z_{(m+2k)\times n} Z'_{(m+2k)\times n}\right) dZ_{(m+2k)\times n}.$$

Примером случайной матрицы, удовлетворяющей условию $p(X)=\tilde{p}(XX')$, может служить матрица, плотность которой равна

$$p(X) = (2\pi)^{-mn/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Sp} R^{-1}XX'\right) \det R_n^{-m/2},$$

R_n — положительно определенная матрица. В этом случае

$$\mathbf{M}(\det \Xi)^{2k} = 2^{nk} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2k+1-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1-i}{2}\right)} \det R_n^k. \quad (1.6)$$

Этот результат хорошо известен в многомерном статистическом анализе [3,71].

Еще один пример плотности $p(X)$ матрицы Ξ, удовлетворяющей условию

$$p(X) \equiv \tilde{p}(XX') : p(X) = \Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right) \pi^{-(n+m)/2}, \quad \operatorname{Sp} XX' \leqslant 1.$$

В этом случае

$$\mathbf{M}(\det \Xi)^{2k} = c_{n,m} \Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right) \pi^{2k} \left[c_{n,m+2k} \Gamma\left(1+\frac{n+m+2k}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Формулу (1.6) можно получить проще с помощью метода ортогонализации [32, 38], основу которого составляет следующее преобразование: пусть T_n — вещественная ортогональная матрица n-го порядка, первый вектор-столбец которой с вероятностью 1 равен $\left\{\xi_{1i}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_{1i}^2\right)^{-1/2}, i=1,\ldots,n\right\}$, а все остальные вектор-столбцы измеримы относительно минимальной σ-алгебры, порожденной величинами ξ_{1i}, $i=1,\ldots,n$. Так как распределение вектор-строк матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$, где ξ_{ij} — независимые случайные элементы, распределенные по стандартному нормальному закону инвариантно относительно ортогональных преобразований, то

$$\mathbf{P}\{\det \Xi_n^2 < x\} = \mathbf{P}\{\det \Xi_n^2 \det T_n^2 < x\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i}^2 \det \Xi_{n-1}^2 < x\right\},$$

где $\Xi_{n-1} = (\xi_{ij})$, $i, j = 2, \ldots, n$. Используя метод математической индукции, получаем, что $\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \xi_{ij}^2$. Из этого результата легко вывести (1.6). Различные обобщения этого утверждения можно найти в работах [32, 81].

§ 2. Моменты случайных детерминантов Вандермонда

Случайным детерминантом Вандермонда называется детерминант матрицы (η_i^j), $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n-1$, где η_i, $i = 1, 2, \ldots$, — случайные величины. Несмотря на то, что для таких детерминантов справедлива простая формула $\det(\eta_i^j) = \prod_{i>j} (\eta_i - \eta_j)$, до сих пор для них не найдены не только распределения, но и моменты в самых простейших случаях, когда η_i независимы и распределены по какому-нибудь невырожденному закону. Исключение составляют в настоящее время два случая:

Теорема Меты [94]: Пусть η_i, $i = 1, 2, \ldots$, независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$. Тогда для любых $n \geqslant 2$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{M} \prod_{i>j} |\eta_i - \eta_j|^k = \left[\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right]^{-n} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 + \frac{kj}{2}\right). \tag{2.1}$$

Формулу (2.1) Мета получил с помощью одного результата Сельберга [100]:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^{2k} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} (1 - x_i)^{\beta-1} dx_i =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(1 + jk)\, \Gamma(\alpha + (j-1)k)\, \Gamma(\beta + (j-1)k)}{\Gamma(1 + k)\, \Gamma(\alpha + \beta + (n + j - 2)k)},$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re} k > -\min\left\{\frac{1}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{\operatorname{Re}\beta}{n-1}\right\}$. Формула (2.1) находит применение при нахождении нормирующих констант плотностей распределения собственных чисел случайных матриц, а также в теории управления линейными стохастическими системами [32, 48].

Гипотеза Дайсона [94]: Пусть θ_i, $i=1, \ldots, n$, — независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда для любого целого $k \geqslant 0$

$$\mathrm{M} \prod_{p \neq l} |e^{i\theta_p} - e^{i\theta_l}|^k = \frac{\Gamma\left(1+\frac{kn}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)\right]^n}. \tag{2.2}$$

Гипотезу Дайсона независимо друг от друга доказали Вильсон [94] и Гансон [94].

Формула (2.2) также находит применение в спектральной теории случайных матриц [37], а также в статистической теории энергетических уровней сложных систем [52].

§ 3. Интегральные представления для детерминантов

Детерминант как функция элементов случайной матрицы чрезвычайно сложен для исследования его аналитическими методами теории вероятностей, однако если воспользоваться формулой

$$\pi^{n/2} \det A_n^{-1/2} = \int \exp\left[-(A_n \vec{x}_n, \vec{x}_n)\right] \prod_{l=1}^n dx_l, \tag{3.1}$$

где A_n — положительно определенная матрица n-го порядка $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$, то для изучения распределения случайных детерминантов можно использовать многие результаты теории вероятностей. Например, из формулы (3.1) вытекает следующая

$$\mathrm{M} \det (I + \Xi\Xi')^{-k} = \mathrm{M} \exp\left\{i \sum_{s=1}^{2k} (\Xi\xi_s, \eta_s)\right\}, \tag{3.2}$$

где $\Xi = (\xi_{ij})_{i,j=1}^n$ — случайная матрица, ξ_s, η_s — независимые векторы, не зависящие от матрицы Ξ, распределенные по нормальному закону $N(0, I)$, $k=0, 1, 2, \ldots$. В правой части этой формулы стоит характеристическая функция суммы случайных величин, для изучения которых можно применить хорошо развитую теорию предельных теорем.

Кроме этих формул, в теории случайных детерминантов используются следующие [32]:

$$\int \exp\left[-((A_n - iC_n)\vec{x}, \vec{x})\right] \prod_{l=1}^n dx_l = \pi^{n/2} \det (A_n + iC_n)^{-1/2},$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}(A_n \vec{y}, \vec{y})\right] = (2\pi)^{-n/2} \det A_n^{-1/2} \times$$

$$\times \int \exp\left\{\sum_{l=1}^n y_l x_l - \frac{1}{2}(A_n^{-1}\vec{x}, \vec{x})\right\} \prod_{l=1}^n dx_l,$$

где C_n — симметричная матрица.

Для несимметричных матриц A_n можно использовать интегральное представление следующего вида [32]:

$$\det(I+\alpha_t A_n)^{-1} = \mathbf{M}\exp\{i\alpha_t((A-A')\vec{\xi}, \vec{\eta}) - \alpha_t(A_n\vec{\xi}, \vec{\xi}) - \\ -\alpha_t(A_n\vec{\eta}, \vec{\eta})\}, \qquad (3.3)$$

где $\alpha_t = t\left[1+|\operatorname{Sp} A| + \frac{1}{4}\operatorname{Sp}(A+A')^2\right]^{-1}$, $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ — независимые случайные векторы, распределенные по нормальным законам $N\left(0, \frac{1}{2} I\right)$.

§ 4. Интегрирование на алгебрах Грассмана и Клиффорда

Алгеброй Грассмана с $2n$ образующими называется алгебра, образующие которой x_i, x_i^*, $i=1, \ldots, n$, удовлетворяют следующим условиям [4, 7, 10]

$$x_i x_j + x_j x_i = 0, \quad x_i^* x_j^* + x_j^* x_i^* = 0, \quad x_i x_j^* + x_j^* x_i = 0. \qquad (4.1)$$

В частности, из этих соотношений (4.1) вытекает, что $x_i^2 = 0$, $(x_i^*)^2 = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Алгебру Грассмана с $2n$ образующими будем обозначать Γ_{2n}. В ней можно выделить базисные одночлены 1, $x_1, \ldots, x_n$, $x_1^*, \ldots, x_n^*$, $x_1 x_2, \ldots, x_{n-1} x_n$, $x_1^* x_2^*, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}^* x_n^*, \ldots, x_1^*, \ldots, x_n^*$. Любой элемент алгебры Γ_{2n} является полиномом вида

$$\sum c_{k_1 \ldots k_n p_1 \ldots p_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} (x_1^*)^{p_1} \ldots (x_n^*)^{p_n}, \qquad (4.2)$$

где $c_{k_1 \ldots k_n p_1 \ldots p_n}$ — комплексные величины.

Из соотношений (4.1) следует, что образующие в (4.2) имеют степени не выше первой. Любой элемент алгебры можно привести к виду (4.2) с помощью соотношений (4.1).

В общем случае представление любого элемента алгебры через образующие неоднозначно. Однозначности можно добиться различными путями, например, требуя, чтобы коэффициенты элемента были кососимметричными либо чтобы он всегда имел вид (4.2).

Алгеброй Клиффорда K_n с n образующими будем называть алгебру, образующие которой $k_1, \ldots, k_n$ удовлетворяют соотношениям $k_i k_j + k_j k_i = 0$, $i \neq j$, $k_i^2 = 1$, i, $j = 1, \ldots, n$.

Введем символы dx_i, dx_i^*, которые удовлетворяют условиям $dx_i dx_j + dx_j dx_i = 0$, $dx_i^* dx_j^* + dx_j^* dx_i^* = 0$, $dx_i^* dx_j + dx_j dx_i^* = 0$,

$$x_i dx_j + dx_j x_i = 0, \quad x_i^* dx_j + dx_j x_i^* = 0, \quad x_i dx_j^* + dx_j^* x_i = 0, \\ x_i^* dx_j^* + dx_j^* x_i = 0.$$

Определим однократные интегралы $\int dx_i = 0$, $\int dx_i^* = 0$, $\int x_i^* dx_i^* = 1$, $\int x_i dx_i = 1$. Под кратными будем понимать повторные интегралы. Будем считать, что введенный интеграл на Γ_{2n} удовлетворяет линейному свойству

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dx_i^* = c_1 \int f_1 dx_i^* + c_2 \int f_2 dx_i^*,$$

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dx_i = c_1 \int f_1 dx_i + c_2 \int f_2 dx_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где c_1, c_2 — комплексные числа, f_1, $f_2 \in \Gamma_{2n}$.

Очевидно, что интеграл от элемента (4.2) по образующим dx_i, dx_i^*, $i = 1, \ldots, n$, равен $c_{1\ldots 1}$. Используя понятие интеграла на алгебре Грассмана, можно получить следующие интегральные представления для детерминантов.

Пусть A — квадратная комплексная матрица n-го порядка, тогда

$$\int \exp(A\vec{x}, \vec{x}^*)\, d\vec{x}\, d\vec{x}^* = \det A; \tag{4.3}$$

$$\int \exp[(A\vec{x}, \vec{x}^*) + (\vec{x}, \vec{\eta}^*) + (\vec{x}^*, \vec{\eta})]\, d\vec{x}^* d\vec{x} \Big/ \int \exp[(A\vec{x}, \vec{x}^*)]\, d\vec{x}^* d\vec{x} = \exp(A^{-1}\vec{\eta}^*, \vec{\eta}), \tag{4.4}$$

где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $d\vec{x} = \prod_{i=1}^{n} dx_i$, x_i, x_i^*, η_i, η_i^* — образующие алгебры Грассмана Γ_{4n}, матрица A^{-1} существует (под показательной функцией понимаем ее разложение в ряд). Впервые формулы (4.3) и (4.4) применил в теории случайных детерминантов Ф. А. Березин [4].

§ 5. Распределение корней характеристического уравнения

Задача о вычислении корней характеристического (векового) уравнения $\det(Iz - A) = 0$, где A — квадратная матрица, а z — комплексный параметр, не одно столетие привлекает внимание математиков. Задача эта трудна и казалось, что если матрица A — случайная, то задача вычисления распределения корней характеристического уравнения еще более усложняется. Однако если предположить, что у элементов матрицы A существует совместная плотность распределения $p(X)$, то плотность распределения собственных чисел (корней характеристического уравнения) такой матрицы имеет простой вид [66, 74]. Объяснить этот результат можно на следующем простом примере. Пусть задано уравнение $f(X) = \Xi$, где f — взаимно однозначное дифференцируемое преобразование на множестве L матриц X, Ξ — случайная матрица с плотностью распределения $p(Z)$, $Z \in L$. Очевидно, что тогда плотность распределения матрицы X равна $p(f(Z))J(Z)$, где $J(Z)$ — якобиан преобразования $Y=f(Z)$, $Y, Z\in L$. Из этого примера видно, что если якобиан $J(Z)$ имеет простой вид, то плотность распределения решения уравнения $f(X)=\Xi$ также имеет простой вид, хотя оно может и не выражаться в явном виде через элементы матрицы Ξ.

С помощью этой простой идеи в настоящее время найдены формулы для совместных распределений собственных чисел и собственных векторов симметричных [19, 74], эрмитовых [28], несимметричных [20], комплексных [20], гауссовских [47], ортогональных [37] и унитарных случайных матриц. Сформулируем утверждение только для симметричных случайных матриц.

Пусть $\Xi_n=(\xi_{ij})$ — симметричная вещественная случайная матрица n-го порядка с плотностью распределения $p(Z_n)$, где $Z_n=(z_{ij})$ — вещественная симметричная матрица, $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ — собственные числа матрицы Ξ, $\vec{\theta}_i$ — ее собственные векторы, у которых первые ненулевые компоненты неотрицательны, Θ_n — случайная матрица, вектор-столбцы которой равны θ_i, $i=1, \ldots, n$, G — группа n-мерных вещественных ортогональных матриц, B — σ-алгебра борелевских множеств n-мерных ортогональных матриц на ней и μ — нормированная мера Хаара на группе G. Тогда [20, 32]

$$\mathbf{P}\{\Theta_n\in E,\ \alpha_i<\lambda_i<\beta_i,\ i=1, \ldots, n\}=$$
$$=c\int p(X_nY_nX_n')\prod_{i>j}(y_i-y_j)\,\mu(dX_n)\,dY_n, \tag{5.1}$$

где интегрирование ведется по области

$$\{y_1>y_2>\ldots>y_n,\ \alpha_i<y_i<\beta_i,\ i=1, \ldots, n,\ x_{1i}>0,$$
$$i=1, \ldots, n,\ X_n\in E\},\quad E\in B,$$
$$Y_n=(\delta_{ij}y_j),\quad dY_n=\prod_{i=1}^{n}dy_i,\quad c=2^n\pi^{n(n+1)/4}\prod_{i=1}^{n}\left\{\Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right)\right\}^{-1},$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Если элементы ξ_{ij}, $i\geqslant j$, $i, j=1, \ldots, n$, независимы и распределены по нормальным законам $N\left(0, \frac{1+\delta_{ij}}{2}\right)$, то матрица Θ_n стохастически не зависит от собственных чисел матрицы Ξ_n и $\mathbf{P}\{\Theta_n\in E\}=2^n\int\mu(dX_n)$, $E\cap\{x_{1i}>0,\ i=1, \ldots, n\}$.

Плотность распределения собственных чисел матрицы Ξ_n равна

$$2^{-3n/2}\pi^{-n(n+1)/4}c\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\prod_{i>j}(y_i-y_j),\quad y_1>\ldots>y_n. \tag{5.2}$$

§ 6. Стохастическое условие Калмана

Предположим, что задана система уравнений, которая является математической моделью некоторой системы управления

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{6.1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния системы управления, $u(t)$ — вектор управлений, A и B — некоторые случайные матрицы.

Система (6.1) называется вполне управляемой, если для двух произвольных точек x_1 и x_2 n-мерного евклидова пространства и двух произвольных значений t_1 и t_2 аргумента t существует такая функция управления $u(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, при которой решение уравнения (6.1) удовлетворяет условиям $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$.

Калмэн [56] доказал следующее утверждение: для вполне управляемости системы (5.1) n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n. \tag{6.2}$$

В частности, если матрица B состоит из одного вектор-столбца b, то условие (6.2) эквивалентно следующему

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0. \tag{6.3}$$

К этому условию приходят в задачах наблюдаемости и идентификации в системах управления [56]. Если матрица A случайная, то представляет интерес задача вычисления функции распределения случайного детерминанта $\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$.

В некоторых случаях для него с помощью теоремы Меты и формулы (5.2) можно найти все моменты. Если элементы ξ_{ij}, $i \geqslant j$, симметричной матрицы A независимы и распределены по нормальным законам $N\left(0, \frac{1+\delta_{ij}}{2}\right)$, а элементы вектора b независимы, не зависят от элементов ξ_{ij}, и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, то [48]

$$\mathbf{M}\,|\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)|^k = \\ = \frac{2^{n(k+2)/2}\pi^{-n(n+1)/4}}{n!\,(k+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{(k+1)j}{2}\right)}{\Gamma(j/2)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

§ 7. Методы вычисления моментов случайных детерминантов

В этом параграфе собраны основные методы вычисления моментов случайных детерминантов. Будем считать, что все требуемые в формулах моменты случайных элементов матриц существуют.

1. Метод замены переменных. С ним мы уже встречались в § 1. Пусть Ξ — случайная действительная матрица n-го порядка, плотность распределения которой равна $p(X)$. Очевидно, что $\mathbf{M}\det\Xi_n^k=\int p(X)\det X^k dX$. Введем замену переменных $X=\varphi(Y)$, где φ — взаимно однозначное дифференцируемое преобразование. Тогда $\mathbf{M}\det\Xi_n^k=\int p(\varphi(Y))\det(\varphi(Y))^k J(Y)\,dY$, где $J(Y)$ — якобиан преобразования. Как мы уже видели, в некоторых случаях можно подобрать такое преобразование Φ, что моменты $\mathbf{M}\det\Xi_n^k$ находятся в явном виде.

2. Метод ортогональных преобразований. Его удобно применять тогда, когда элементы матрицы Ξ_n независимы и распределены по нормальному закону с параметрами 0 и 1. В этом случае распределение матрицы Ξ_n при умножении ее на произвольную неслучайную ортогональную матрицу H_n не изменится. Докажем, например, следующее утверждение. Пусть Ξ_n — случайная матрица, элементы которой независимы и распределены по нормальному закону $N(0, 1)$, B — квадратная неслучайная матрица n-го порядка. Тогда распределение случайной величины $\det[B_n+\Xi_n]$ зависит только от сингулярных собственных чисел матрицы B_n и не зависит от других функций элементов матрицы B_n. Доказательство следует из того, что $B_n=U_n\Lambda V_n$, где U_n и V_n — ортогональные матрицы, Λ — диагональная матрица собственных чисел матрицы B_nB_n'.

Большое число результатов, полученных с помощью этого метода, приведено в [32].

3. Метод дифференцирования по параметру [82]. Пусть $D=\det(\partial/\partial s_{ij})_{i,j=1}^n$ — дифференциальный оператор. Очевидно, что

$$\det(\xi_{pl})=D\exp\left\{i\sum_{p,l=1}^n \xi_{pl}s_{pl}\right\}_{s_{pl}=0},\quad p, l=1,\ldots,n.$$

Из этой формулы получаем

$$\mathbf{M}\det{}^k(\xi_{pl})=D^k\mathbf{M}\exp\left\{i\sum_{p,l=1}^n \xi_{pl}s_{pl}\right\}_{s_{pl}=0},\quad p, l=1,\ldots,n,$$

где $k>0$ — целое число.

Если случайные величины ξ_{pl} независимы, то эта формула приобретает вид

$$\mathbf{M}\det{}^k(\xi_{pl})=D^k\prod_{p,l=1}^n f_{pl}(s_{pl})\,|_{s_{pl}=0},\quad p, l=1,\ldots,n,$$

где f_{pl} — характеристические функции случайных величин ξ_{pl}. В частности, если ξ_{pl}, $p, l=1,\ldots,n$, независимы и распределены по нормальным законам $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\mathbf{M} \det{}^k(\xi_{pl}) = D^k \exp\left\{-0{,}5 \sum_{p,l=1}^{n} s_{pl}^2 \sigma_{pl}^2\right\}_{s_{pl}=0}.$$

4. Метод интегрирования на алгебрах Грассмана и Клиффорда. Пусть для любого значения целого положительного k задано k алгебр Грассмана с $2n$ образующими $(x_{ls}, x_{ls}^*, l=1,\dots,n)$, $s=1,\dots,k$, причем образующие разных алгебр Грассмана коммутируют между собой. Тогда,

$$\mathbf{M} \det{}^k(\xi_{pl}) = \mathbf{M} \int \exp\left\{i \sum_{p,l=1}^{n} \xi_{pl}\left(\sum_{s=1}^{n} x_{ps} x_{ls}^*\right)\right\} \times$$

$$\times \prod_{\substack{p=1,\dots,n \\ s=1,\dots,k}} dx_{ps} dx_{ps} i^{-kn}. \qquad (7.1)$$

Если случайные величины ξ_{pl} независимы и их характеристические функции $f_{pl}(s_{pl})$ — аналитические, то формула (7.1) приобретает вид

$$\mathbf{M} \det{}^k(\xi_{pl}) = \int \prod_{p,l=1}^{n} f_{pl}\left(\sum_{s=1}^{k} x_{ps} x_{ls}^*\right) \prod dx_{ps} dx_{ps}^* i^{-kn}.$$

В частности, если ξ_{pl}, p, $l=1,\dots,n$, независимы и распределены по нормальным законам $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\mathbf{M} \det{}^k(\xi_{pl}) = \int \exp\left\{-0{,}5 \sum_{p,l=1}^{n} \sigma_{pl}^2 \left(\sum_{s=1}^{k} x_{ps} x_{ls}^*\right)^2\right\} \times$$

$$\times \prod dx_{ps} dx_{ps}^* i^{-kn}.$$

5. Метод интегральных представлений. Он применяется в основном для вычисления моментов случайных величин $\det \Xi^{-1}$. Используя формулу (3.2), получаем

$$\mathbf{M}\,[\det(I + \Xi_n \Xi_n')]^{-k} = \mathbf{M} \exp\left[i \sum_{p,l=1}^{n} \xi_{pl}\left(\sum_{s=1}^{2k} \eta_{ps} \zeta_{ls}\right)\right],$$

где ξ_{pl} — элементы квадратной матрицы Ξ_n, η_{ps}, ζ_{ls}, $p, l, s = 1, 2, \dots,$ — независимые случайные величины (не зависящие от ξ_{pl}), распределенные по нормальному закону $N(0, 1)$. В частности, если ξ_{pl}, p, $l=1,\dots,n$, независимы и распределены по нормальному закону $N(0, \sigma_{pl}^2)$, то

$$\mathbf{M}\,(\det(I + \Xi_n \Xi_n'))^{-k} = \mathbf{M} \exp\left[-0{,}5 \sum_{p,l=1}^{n} \sigma_{pl}^2 \left(\sum_{s=1}^{2k} \eta_{ps} \zeta_{ls}\right)^2\right].$$

Разлагая экспоненту в ряд, можно получить формулы для моментов случайных детерминантов $\det(I + \Xi_n \Xi_n')^{-1}$.

6. Спектральный метод. Если у элементов квадратной случайной матрицы Ξ_n существует совместная плотность распределения, то у собственных чисел λ_i, $i=1, \ldots, n$, такой матрицы, выбранных определенным образом, существует совместная плотность распределения $p(x_i, \quad i=1, \ldots, n)$ и она в некоторых случаях имеет простой вид (см. § 5). Используя этот факт, можно вычислить моменты случайных детерминантов $\det \Xi_n$, поскольку $\det \Xi_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

7. Метод рекуррентных уравнений. Разлагая детерминант случайной матрицы по любой вектор-строке (столбцу), можно получить некоторые рекуррентные уравнения для моментов случайных детерминантов. Однако они настолько сложны, что решить их удается только в специальных случаях. Приведем один пример вычисления моментов случайных детерминантов с помощью метода рекуррентных уравнений [54, 96].

Пусть элементы ξ_{ij} случайной матрицы Ξ_n независимы, одинаково распределены. Тогда

$$\mathbf{M} \det \Xi_n^{2k+1} = 0, \quad n>1, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$
$$\mathbf{M} \det \Xi_n^2 = n!\,(m_2 - m_1^2)^{n-1}(m_2 - m_1^2 + nm_1^2), \tag{7.2}$$

где $m_k = \mathbf{M}\xi_{11}^k$.

Обозначим через $\Xi_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ матрицу, у которой вычеркнуты строки и столбцы с номерами i_s, j_s. Если мы поменяем местами любые две строки матрицы Ξ_n, то распределение детерминанта новой матрицы будет совпадать с распределением $\det \Xi_n$. Поэтому распределение $\det \Xi_n$ будет симметрично при $n>1$, следовательно, $\mathbf{M} \det \Xi_n^{2k+1} = 0$, $n>1$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Разложим $\det \Xi_n$ по первому столбцу. Тогда

$$\mathbf{M} \det \Xi_n^2 = nm_2 \mathbf{M} \det \Xi_{n-1}^2 + \sum_{k \neq l} m_1^2 \mathbf{M} \det \Xi_1^k \det \Xi_1^l \,(-1)^{k+l}. \tag{7.3}$$

Распределение величины $\mathbf{M} \det \Xi_1^k \det \Xi_1^l (-1)^{k+l}$ не зависит от выбора чисел k и l, $k \neq l$. В этом легко убедиться, меняя соответствующие строки матриц Ξ_1^k и Ξ_1^l местами. Аналогично получаем

$$\mathbf{M} \det \Xi_1^1 \det \Xi_1^2 = (n-1)\, m_2 \mathbf{M} \det \Xi_{n-2}^2 - (n-1)(n-2) \times \times m_1^2 \mathbf{M}(\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21}). \tag{7.4}$$

Из формулы (7.3) следует

$$\mathbf{M} \det \Xi_{n-1}^2 = (n-1)\, m_2 \mathbf{M} \det \Xi_{n-2}^2 - (n-1)(n-2) \times \times m_1^2 \mathbf{M}(\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21}). \tag{7.5}$$

Исключая $\mathbf{M}(\det \Xi_{12}^{12} \det \Xi_{13}^{21})$ из (7.4), (7.5), находим

$$\mathbf{M}\det \Xi_n^2 = nm_2\mathbf{M}\det \Xi_{n-1}^2 - n(n-1)m_1^2\mathbf{M}\det \Xi_{n-1}^2 - \\ - n(n-1)^2 m_1^4\mathbf{M}\det \Xi_{n-2}^2 + n(n-1)^2 m_2 m_1^2\mathbf{M}\det \Xi_{n-2}^2. \quad (7.6)$$

Пусть $\mathbf{M}\det \Xi_n^2 = m_1^{2n} n! y_n$, $m_1 \neq 0$. Тогда из (7.6) следует

$$y_n = y_{n-1}(\gamma + 2 + n) + (n-1)\gamma y_{n-2}, \quad y_1 = \gamma + 1, \quad y_2 = \gamma(\gamma + 2), \quad (7.7)$$

где $\gamma = m_2/m_1^2 - 1$.

Предположим, что $y_0 = 1$, и найдем производящую функцию $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n/n!$. На основании (7.7) получаем $f'(t)(1+t) = f(t)(1+\gamma+\gamma t)$. Решение этого уравнения равно $f(t) = c(1+t)e^{\gamma t}$, c — произвольная константа. Отсюда, учитывая (7.7), получаем (7.2).

Если $m_1 = 0$, то (7.2) вытекает из формулы (7.3).

Аналогично находим при условии, что $m_1 = 0$ [95],

$$\mathbf{M}\det \Xi_n^4 = m_2^{2n}(n!)^2 n^{-1} \sum_{k=0}^{n} (n-k+1)(n-k+2) \times \\ \times (k!)^{-1}((m_4/m_2^2) - 3)^k.$$

8. **«Прямой» метод вычисления моментов случайных детерминантов.** Разлагая детерминант по некоторым строкам и столбцам и вычисляя математическое ожидание полученной суммы, можно получить некоторые простые результаты [98].

Пусть элементы ξ_{ij} случайной матрицы Ξ_n независимы. Очевидно, что $\mathbf{M}\det \Xi_n = \det \mathbf{M}\Xi_n$. Если дополнительно $\mathbf{M}\xi_{ij} = 0$, $\mathbf{M}\xi_{ij}^2 = m_{ij}^2$, то $\mathbf{M}\det \Xi_n^2 = \operatorname{per} K_n$, где $K_n = (m_{ij}^2)$ — квадратная матрица n-го порядка.

9. **Метод возмущений.** Используя формулы возмущений матриц, можно получить различные приближенные выражения при достаточно большом n для моментов случайных детерминантов $\mathbf{M}|\det \Xi_n|^{k/c_n}$, где c_n — некоторая последовательность нормирующих чисел, а k — целые положительные числа, не зависящие от n.

§ 8. Гипотеза Фреше

Пусть X_n — множество квадратных матриц n-го порядка, элементы которых принимают значения либо $+1$, либо -1. Гипотеза Фреше заключается в том, что при $n \geqslant 4$ $\max_{A_n \in X_n} \det A_n = n^{n/2}$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 4$. Другими словами, матрицу A_n, $n \geqslant 4$, составленную из элементов ± 1, можно выбрать ортогональной тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 4$)

Эта гипотеза известна давно, существует большое число примеров, когда она справедлива, но ее доказательства в общем случае нет [76].

Необходимость условия $n \equiv 0 \pmod 4$ доказывается легко. Выберем элементы a_{ij}, i, $j=1, \ldots, n$, матрицы A_n так, чтобы $a_{1i}=1$, $a_{i1}=1$, $i=1, \ldots, n$. Нетрудно понять, что такой выбор элементов не ограничивает общности рассуждений так же, как и допущение, что во второй строке на первых $n/2$ местах стоят $+1$, а на остальных -1. Обозначим количество $+1$ на первых $n/2$ местах в третьей строке через t_1, а число -1 на остальных $n/2$ местах через t_2. Так как матрица A_n ортогональная, то $t_1-t_2=0$, $t_1+t_2=n/2$. Отсюда следует, что n кратно четырем при $n \geqslant 4$.

Гипотезу Фреше можно сформулировать в терминах случайных матриц. Пусть $\Xi_n=(\xi_{ij})$ — квадратная случайная матрица n-го порядка, ξ_{ij}, i, $j=1, \ldots, n$, — независимые случайные величины и $\mathbf{P}\{\xi_{ij}=+1\}=\mathbf{P}\{\xi_{ij}=-1\}=1/2$. Тогда [57]

$$\max|\det \Xi_n| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\mathbf{M} \det \Xi_n^{2k}}. \tag{8.1}$$

Используя формулу (8.1), можно найти следующие оценки снизу [57, 96]:

$$\max|\det \Xi_n| \geqslant \sqrt{\mathbf{M} \det \Xi_n^2} = \sqrt{n!},$$

$$\max|\det \Xi_n| \geqslant \left[n^{-1} (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1} (n-k+1)(n-k+2)(-2)^k \right]^{1/4}.$$

Гипотезу Фреше можно заменить некоторой эквивалентной гипотезой, на основании следующего утверждения: Пусть η_i, $i=1, \ldots, n$, — случайные величины, распределенные по совместному нормальному закону, $\mathbf{M}\eta_i=0$, $\mathbf{M}\eta_i^2=1$, $i=1, \ldots, n$. Тогда $\mathbf{M}\prod_{i=1}^{n}\eta_i^2$ минимально в том и только том случае, если η_i, $i=1, \ldots, n$, независимы. Пусть случайные величины ξ_k независимы и распределены $N(0, 1)$. Рассмотрим выражение

$$n^{-n}\mathbf{M}\left[\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varepsilon_{kj}\right)^2 \Big/ \varepsilon_{kj}\right], \tag{8.2}$$

где ε_{kj}, k, $j=1, \ldots, n$, — независимые случайные величины, не зависящие от величин ξ_k и имеющие распределения $\mathbf{P}\{\varepsilon_{kj}=1\}=\mathbf{P}\{\varepsilon_{kj}=-1\}=1/2$. Тогда (8.2) будет принимать минимальное значение, равное 1, тогда и только тогда, когда матрица (ε_{ij}) будет ортогональной. Поэтому если при $n \equiv 0 \pmod 4$

$$\lim_{s\to\infty}\left[(2n)!\,(n!)^{-1}-\left\{\mathbf{M}\left((2n)!(n!)^{-1}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-n^{-n}\mathbf{M}\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varepsilon_{kj}\right)^2\Big/\varepsilon_{kj}\right]\right)^{2s}\right\}^{1/2s}\right]=1,$$

то гипотеза Фреше верна, в противном случае не верна.

§ 9. Проблема Ляпунова для систем линейных стационарных уравнений со случайными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $d\vec{x}/dt=A_n\vec{x}$, $\vec{x}(0)=\vec{c}$. Если $\operatorname{Re}\lambda_i<0$, $i=1,\ldots,n$, где λ_i — собственные числа квадратной матрицы A_n, n-го порядка, то решение такого уравнения стремится к нулю при $t\to\infty$ и любом конечном $\vec{c}$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 9.1 [24]. Пусть A_n — случайная вещественная симметричная матрица с плотностью распределения $p(X)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\lambda_i<0,\ i=1,\ldots,n\}=c_1\int p\left(-Z_{(n+1)\times n}Z'_{(n+1)\times n}\right)dZ_{(n+1)\times n},\qquad(9.1)$$

где $Z_{(n+1)\times n}$ — прямоугольная вещественная матрица размера $(n+1)\times n$,

$$c_1=\pi^{-(n^2+3n)/4}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{n+2-i}{2}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_i<0,\ i=1,\ldots,n\}=\int p(-Q)\,dQ,\qquad(9.2)$$

где $Q=(q_{ij})$ — неотрицательно определенная матрица n-го порядка, и интегрирование ведется по множеству всех таких матриц. Преобразуем (9.2) к следующему виду

$$\int p(-Q)\,dQ=\int p\left[-(\sqrt{Q}\,H^{(n)})(\sqrt{Q}\,H^{(n)})'\right]dQ\mu(dH),$$

где $H^{(n)}$ — ортогональная вещественная матрица размера $(n+1)\times\times n$, μ — нормированная мера Хаара на группе вещественных ортогональных матриц порядка $n+1$. Используя замену переменных $\sqrt{Q}\,H^{(n)}=Z_{(n+1)\times n}$, в силу формулы (1.1), получаем утверждение теоремы 9.1.

Следствие 9.1 [24]. Если элементы ξ_{ij}, $i\geqslant j$, $i,j=1,\ldots,n$, случайной матрицы A_n независимы и распределены по нормальным законам $N(a_{ij},\sigma^2_{ij})$, $\sigma_{ij}>0$, то

$$\mathbf{P}\{\lambda_i<0,\ i=1,\ldots,n\}=c_1(2\pi)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i\geqslant j}\sigma_{ij}^{-1}\int\exp\left\{-\sum_{i\geqslant j}\left(a_{ij}-\right.\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1} z_{ik}z_{jk}\Bigg)^2 2^{-1}\sigma_{ij}^{-2}\Bigg\} \prod_{\substack{i=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,n+1}} dz_{ik}. \qquad (9.3)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (9.3), при $a_{ij}\equiv 0$ вычислен в работе [49] и равен некоторой степени гипердетерминанта матрицы с коэффициентами, зависящими от σ_{ij}^2. В работах [32, 49] теорема 9.1 обобщена на несимметричные матрицы A_n, у которых существует совместная плотность элементов.

§ 10. Стохастический метод наименьших квадратов

Рассмотрим линейную модель множественной регрессии $\vec{y}=\Xi\vec{\theta}+\vec{\varepsilon}$, где $\vec{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ — вектор наблюдений некоторой переменной, $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — вектор ошибок наблюдений, $\vec{\theta}=(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ — вектор неизвестных параметров, Ξ — случайная матрица значений контролируемых переменных размерности $n\times m$, не зависящая от вектора $\vec{\varepsilon}$. Эта модель отличается от общепринятой тем, что элементы матрицы планируемых переменных Ξ являются случайными величинами [77].

Предположим, что $\mathbf{M}\vec{\varepsilon}=0$, $\mathbf{M}\vec{\varepsilon}\,\vec{\varepsilon}'=R$, R — положительно определенная матрица. Тогда оценка вектора параметров $\vec{\theta}$, согласно методу наименьших квадратов, равна

$$\hat{\vec{\theta}}=\lim_{\delta\to 0}(\Xi' R^{-1}\Xi+I\delta)^{-1}\,\Xi' R^{-1}\vec{y}.$$

Рассмотрим случай, когда с вероятностью 1 существует $(\Xi' R^{-1}\Xi)^{-1}$. Оценка $\hat{\vec{\theta}}$ равна $\hat{\vec{\theta}}=(\Xi' R^{-1}\Xi)^{-1}\,\Xi' R^{-1}\vec{y}$. Эта оценка будет несмещенной, а ее ковариационная матрица $K=\mathbf{M}\,(\Xi' R^{-1}\Xi)^{-1}$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$K=\mathbf{M}\,(\Xi R_m^{-1}\Xi')^{-1}, \qquad (10.1)$$

где $\Xi=(\xi_{ij})$ — случайная матрица размера $n\times m$, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 10.1 [32]. Пусть у случайной матрицы Ξ существует плотность распределения $p(X)$, $R_m>0$, $m\geqslant n$, и конечен интеграл

$$\int_{Z>0} Z^{-1}p\,(\sqrt{Z_n}\,H^{(n)}\sqrt{R_m})\det Z^{(m-n-1)/2}dZ\mu\,(dH), \qquad (10.2)$$

где интегрирование ведется по множеству N неотрицательно определенных матриц Z n-го порядка, dZ — элемент лебеговой меры множества N, μ — нормированная мера Хаара на группе G

ортогональных m-мерных матриц, $H^{(n)}=(h_{ij})$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$.

Тогда $\|K\|<\infty$ и

$$K=c_{n,m} \det R_m^{n/2} \int\limits_{Z>0} Z^{-1} p(\sqrt{Z}\, H^{(n)} \sqrt{R_m}) \times \times \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH) \qquad (10.3)$$

(константа $c_{n,m}$ определена в формуле (1.1)).

Доказательство. Очевидно, что $K=\int (XR_m^{-1}X')^{-1} \times p(X)\,dX$. После замены переменных $X=Y\sqrt{R_m}$ этот интеграл будет иметь вид $K=\int (YY')^{-1} p(Y\sqrt{R_m})\,dY \det R_m^{n/2}$ (см. доказательство формулы (1.1)). Используя обобщенную плотность Уишарта, получаем (10.3). Если конечен интеграл (10.3), то $\|K\|<\infty$. Теорема 10.1 доказана.

Следствие 10.1 [32, 27]. Пусть задана случайная матрица Ξ, с вероятностью 1 $\operatorname{Sp}\Xi\Xi' \leqslant c<\infty$, существует ограниченная плотность распределения $p(X)$ матрицы Ξ, $R>0$ и $m \geqslant n+2$. Тогда $\|K\|<\infty$.

Доказательство. Из формулы (10.2) вытекает

$$\int\limits_{Z>0} \operatorname{Sp} Z^{-1} p(\sqrt{Z} H^{(n)} \sqrt{R_m}) \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \mu(dH) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{\operatorname{Sp} Z^2 \leqslant c} \operatorname{Sp} Z^{-1} \det Z^{(m-n-1)/2} dZ \leqslant c_2 \int\limits_{\operatorname{Sp} Z^2 \leqslant c} \det Z^{-1/2} dZ =$$

$$= c_3 \int\limits_{\operatorname{Sp} XX' \leqslant c} dX < \infty,$$

где X — квадратная матрица порядка n.

Следствие 10.1 доказано.

Теорема 10.1 и следствие 10.1 справедливы для матриц $\mathbf{M}(\Xi' R^{-1} \Xi)^{-s}$, где $s \geqslant 1$ — целое число и

$$A=\left(\sum_{k=1}^{m} \int \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x)\, dF(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n},$$

где $\xi_{ij}(x)$ — действительные измеримые случайные процессы, $x \in (-\infty, \infty)$, $F(x)$ — некоторая функция распределения.

Заметим, что матрица A неотрицательно определена и

$$\mathbf{M} \det A^{-s} \leqslant \int \mathbf{M} \left\{\det\left(\sum_{k=1}^{m} \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x)\right)\right\}^{-s} dF(x).$$

Если у случайной матрицы $\left(\sum_{k=1}^{m} \xi_{ik}(x) \xi_{jk}(x)\right)$ существует плотность распределения для любого $x \in (-\infty, \infty)$, то, используя метод доказательства теоремы 10.1, получаем условие, когда существует $\mathbf{M} \det A^{-s}$.

§ 11. Случайные детерминанты Фредгольма и управление спектром случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть (Ω, B, P) — вероятностное пространство, H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, h — σ-алгебра борелевских множеств из H, (H, h) — измеримое гильбертово пространство. Случайным оператором $A(\cdot, \omega)$, действующим в H и определенным на множестве неслучайных элементов $D \subset h$, называется отображение $H \times \Omega$ в H, которое при каждом фиксированном $x \in D$ является измеримым отображением $\{\Omega, B\}$ в $\{H, h\}$, т. е. для любого $D' \in h \{\omega: A(x, \omega) \in D'\} \in B$. Пусть D_H — линейное многообразие случайных элементов со значениями в измеримом пространстве $\{H, h\}$. Если для любого $\xi \in D_H$ $\tilde{A}(\xi(\omega), \omega)$ является случайным элементом со значениями в измеримом пространстве $\{H, h\}$, то $\tilde{A}(\cdot, \omega)$ — случайный оператор со случайной областью определения. Множество его значений имеет вид $R_{\tilde{A}} = \{\tilde{A}(\xi(\omega), \omega): \xi(\omega) \in D_H\}$.

Так как H — сепарабельное гильбертово пространство, то операторная норма ограниченного оператора $\tilde{A}(\cdot, \omega)$ будет случайной величиной. Для ограниченного вполне непрерывного оператора $A(\cdot, \omega)$ его собственные числа и собственные функции можно выбрать так, чтобы они были соответственно случайными числами и случайными элементами в (H, h).

Лемма Шура. Пусть $\tilde{A}(\cdot, \omega)$ — вполне непрерывный ограниченный оператор с областью определения $D_{\tilde{A}}$. Тогда найдется ортонормированный базис $\{\varphi_j, j=1, 2, \ldots\}$ (в общем случае случайный), в котором матрица оператора $\tilde{A}(\cdot, \omega)$ имеет треугольный вид: $\tilde{A}\varphi_j = a_{j1}\varphi_1 + a_{j2}\varphi_2 + \ldots + a_{jj}\varphi_j$, $j=1, 2, \ldots$, причем $a_{jj} = (A\varphi_j, \varphi_j) = \lambda_j(A)$, $j=1,2, \ldots$, где $\lambda_j(\tilde{A})$ — случайные собственные числа оператора $\tilde{A}(\cdot, \omega)$.

Случайным детерминантом Фредгольма ядерного оператора $\tilde{A}(\cdot, \omega)$ назовем выражение $\det(I - \mu\tilde{A}(\cdot, \omega)) = \prod_j (1 - \mu\lambda_j(\tilde{A}))$, где μ — произвольное комплексное число, $\lambda_j(\tilde{A})$ — случайные собственные числа оператора $\tilde{A}(\cdot, \omega)$, I — тождественный оператор.

Пусть $\tilde{A}_1(\cdot)$, $\tilde{A}_2(\cdot)$ — ядерные операторы и φ_n, $n=1, 2, \ldots$, — произвольный случайный нормированный базис пространства $D_{\tilde{A}}$, тогда с вероятностью 1

$$\det(I-\tilde{A}_1(\cdot,\omega))=\lim_{n\to\infty}\det[\delta_{jk}-(\tilde{A}_1(\cdot,\omega)\varphi_j,\varphi_k)]_{j,k=1}^n; \quad (11.1)$$

$$\det[(I-\tilde{A}_1(\cdot,\omega))(I-\tilde{A}_2(\cdot,\omega))]=\det(I-\tilde{A}_1(\cdot,\omega))\times$$
$$\times\det(I-\tilde{A}_2(\cdot,\omega)). \quad (11.2)$$

Доказательство (11.1) и (11.2) следует из работы [50].

Пусть $\mathfrak{C}_p$ — класс всех вполне непрерывных случайных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, для которых с вероятностью 1 $\sum_{i=1}^{n} s_i^p(A(\omega))<\infty$, где $s_i(A(\omega))$ — сингулярные случайные числа оператора $A(\omega)$, p — вещественное число. Одна из задач управления спектром дифференциальных и интегральных операторов со случайными параметрами формулируется следующим образом. Пусть $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ — случайные линейные операторы, действующие в H, $\sigma(A(\omega))$ — спектр оператора $A(\omega)$. Нужно найти оператор $C(\omega)$ такой, чтобы спектр $\sigma(A(\omega)+B(\omega)C(\omega))$ был заданным множеством.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда оператор $B(\omega)C(\omega)$ является одномерным: для любого $x\in H$ $B(\omega)C(\omega)\times\times x=(b(\omega),x)c(\omega)$, где $b(\omega)$ и $c(\omega)$ — измеримые случайные функции, реализации которых принадлежат пространству L_2, $A(\omega)$ — случайный линейный оператор, действующий из $L_2(\Omega, B, \mathbf{P})$ в $L_2(\Omega, B, \mathbf{P})$ ($L_2(\Omega, B, \mathbf{P})$ — гильбертово пространство случайных функций $\xi(\omega, x)$, измеримых и квадратично интегрируемых).

Пусть $A(\omega)$ — самосопряженный линейный случайный оператор класса $\mathfrak{S}_1$ (т. е. ядерный), $\lambda_i(\omega)$, $i=1, 2, \ldots,$ — его случайные собственные числа, $\varphi_i(\omega)$, $i=1, 2, \ldots,$ — ортонормированные случайные собственные функции, выбранные единственным образом.

Теорема 11.1 [6]. Пусть с вероятностью 1

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k(\omega)|<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}(b(\omega),\ \varphi_k(\omega))^{-2}\prod_{s\neq k}\{(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\alpha_s(\omega))(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\lambda_s(\omega))^{-2}\}\times$$
$$\times(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\alpha_k(\omega))^2<\infty,$$

где $\alpha_k(\omega)$, $k=1, 2, \ldots,$ — случайные величины, среди которых есть комплексно-сопряженные пары.

Тогда $\sigma(A(\omega)+(c(\omega),\cdot)b(\omega))=\{\alpha_k(\omega),\ k=1, 2, \ldots\}$, где

$$c(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\omega)(b(\omega),\ \varphi_k(\omega))^{-1}\varphi_k(\omega)\prod_{s\neq k}\{(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\alpha_s(\omega))\times$$
$$\times(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\lambda_s(\omega))^{-1}\}(1-\lambda_k^{-1}(\omega)\alpha_k(\omega)).$$

С помощью теоремы 11.1 в книге [32] рассмотрена следующая задача: пусть задана последовательность симметричных вещественных случайных матриц Ξ_n, $n=1, 2, \ldots$, и случайных векторов $\vec{b}_n$, $n=1, 2, \ldots$. Нужно выбрать такую последовательность случайных векторов $\vec{c}_n$, чтобы собственные числа матрицы $\Xi_n + \vec{b}_n \vec{c}_n'$ стремились в смысле сходимости распределений к некоторым заданным случайным величинам.

§ 12. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов

Пусть Ξ_n — последовательность вещественных квадратных случайных матриц n-го порядка. Центральной предельной теоремой для случайных детерминантов называется любое утверждение о том, что при некотором подборе постоянных a_n и b_n и некоторых условиях, налагаемых на элементы матрицы Ξ_n,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{b_n^{-1}[\ln|\det \Xi_n| - a_n] < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy.$$

Выбор логарифмической функции в качестве нормирующей функции обосновывается тем, что $\ln|\det\Xi_n|$ равен сумме логарифмов модулей собственных чисел случайной матрицы Ξ_n, и этот факт подсказывает, что после соответствующей нормировки таких сумм можно получить центральную предельную теорему.

В настоящее время наметились три метода доказательства центральной предельной теоремы для случайных детерминантов: метод возмущений, метод ортогонализации и метод интегральных представлений. Метод возмущений основан на формуле

$$\ln|\det A| - \ln|\det B| = \ln|\det[I + B^{-1}(A-B)]|,$$

где A, B — квадратные матрицы, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. С его помощью в некоторых случаях $\ln|\det\Xi_n|$ можно представить в виде суммы слабо зависимых случайных величин, к которым можно применить центральную предельную теорему [32, стр. 137]. Метод ортогонализации основан на следующем хорошо известном результате (см. Введение к настоящему обзору): если элементы ξ_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$, случайной матрицы $\Xi_n = (\xi_{ij})$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$, то

$$\det \Xi_n^2 \approx \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \xi_{ij}^2. \tag{12.1}$$

Если Ξ_n — произвольная случайная матрица, то с помощью некоторых ортогональных преобразований, напоминающих преобразования, используемые при доказательстве (12.1), $\ln\det\Xi_n^2$ можно представить в виде суммы n случайных величин, к которым применяется центральная предельная теорема. В работе [38] с помощью метода ортогонализации доказано следующее утверждение.

Теорема 12.1. Пусть для каждого значения n случайные элементы матрицы $\Xi_n=(\xi_{ij})_{i,j=1}^n$ независимы, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)}=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)}=1$, $\mathbf{M}[\xi_{ij}^{(n)}]^4=3$, $i, j=1, \ldots, n$, и для некоторого $\delta>0$

$$\sup_n \sup_{i,j=1,\ldots,n} \mathbf{M}\,|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta}<\infty. \tag{12.2}$$

Тогда [25]

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\ln\det\Xi_n^2-\ln(n-1)!}{\sqrt{2\ln n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

Заметим, что условие: $\mathbf{M}[\xi_{ij}^{(n)}]^4=3$ в теореме 12.1, по-видимому, можно опустить (при этом нужно изменить нормирующие постоянные величины). Однако до сих пор эта задача не решена.

Теорема 12.2 [38]. Если в условиях теоремы 12.1 условие $\mathbf{M}[\xi_{ij}^{(n)}]^4=3$ не требуется, то

$$p\lim_{n\to\infty}c_n^{-1}\ln\frac{\det\Xi_n}{n!}=0, \tag{12.3}$$

где c_n — любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty}c_n(\ln n)^{-1}=\infty.$$

Отметим, что доказательству утверждений типа (12.3) посвящено большое число работ (см. [92, 93, 98]).

Метод интегральных представлений основан на формуле

$$\det A^{-1/2}=\pi^{-n/2}\int\ldots\int\exp(-(Ax,x))\prod_{i=1}^{n}dx_i,$$

где A — положительно определенная матрица, $x=(x_1, \ldots, x_n)$. С помощью этой формулы $\ln|\det A|$ можно свести к сумме слабо зависимых случайных величин, к которым также можно после некоторых преобразований применить центральную предельную теорему [20, 32].

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Метод возмущений удобно применять тогда, когда существуют $\mathbf{M}\Xi_n^{-2}$, $n=1, 2, \ldots$. Метод ортогонализации дает хорошие результаты, когда элементы случайных матриц Ξ_n независимы и принадлежат области притяжения нормального закона с параметрами (0, 1). Метод интегральных представлений применяется в основном для детерминантов матриц $(I+\Xi_n)$ при условии, что

$$\lim_{h\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{|\det(I+\Xi_n)|\geqslant h\}=0.$$

С помощью этого метода в книге [32] доказана слабая сходимость распределений некоторых случайных детерминантов к безгранично делимому закону.

§ 13. О связи между сходимостью случайных детерминантов и сходимостью спектральных функций случайных матриц

Пусть Ξ_n — вещественные квадратные симметричные случайные матрицы и λ_i, $i=1, \ldots, n$, — их собственные числа. Нормированной спектральной функцией матрицы Ξ_n называется выражение

$$\mu_n(x)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}F(x-\lambda_k),$$

где $F(y)=1$ при $y>0$ и $F(y)=0$ при $y\leqslant 0$.

С помощью спектральных функций $\mu_n(x)$ для случайных детерминантов можно доказывать различные утверждения (см. [19, 31]). Например, в [32, стр. 224] доказана следующая

Теорема. Пусть конечномерные распределения случайных функций $\mu_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторой случайной функции $\mu(x)$, для некоторого $\alpha>0$ $\sup_n \mathbf{M}\int|\ln|x||^{1+\alpha}\,d\mu_n(x)<\infty$, $\mu_n(-\infty)\Rightarrow\mu(-\infty)$, $\mu_n(+\infty)\Rightarrow\mu(+\infty)$. Тогда $n^{-1}\ln|\det\Xi_n|\Rightarrow\int\ln|x|\,d\mu(x)$. Здесь $\Rightarrow$ — символ слабой сходимости распределений. Наоборот, доказательство предельных теорем для $\mu_n(x)$ неразрывно связано с формулами возмущений для случайных детерминантов, а также с предельными теоремами для них. Предельные теоремы для $\mu_n(x)$ в большинстве случаев доказываются с помощью преобразования Стилтьеса

$$m(z)=\int(x-z)^{-1}\,d\mu_n(x)=n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(\Xi-Iz)^{-1}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial z}n^{-1}\ln\det(\Xi-Iz),$$

где $z=t+is$, $s\neq 0$ [30, 67]. Преобразование Стилтьеса $m(z)$ можно представить в виде суммы мартингал-разностей $m(z)-\mathbf{M}m(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k$, [33, 35], где $\gamma_k=-\mathbf{M}_{k-1}\frac{\partial}{\partial z}\ln\det(\Xi-Iz)+\mathbf{M}_k\frac{\partial}{\partial z}\ln\det(\Xi-Iz)$, $\mathbf{M}_k$ — условное математическое ожидание при фиксированной минимальной σ-алгебре событий, относительно которой измеримы случайные векторы-строки матрицы Ξ, начиная с $k+1$-го.

Одно из удивительных свойств детерминанта матрицы заключается в следующем [69]:

$$\ln\det(\Xi - Iz) - \ln\det(\Xi_k - Iz) =$$
$$= \ln[\xi_{kk} - z - ((\Xi_k - Iz)^{-1}\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)], \qquad (13.1)$$

где матрица Ξ_k получена из матрицы Ξ_n заменой элементов k-ой строки и k-го столбца нулями, $\vec{\xi}_k = (\xi_{pk}, p \neq k, p = 1, \ldots, n)$. Используя (13.1), легко доказать, что $|\gamma_k| < c < \infty$ [69], что является решающим моментом при выводе следующего утверждения:

Теорема 13.1 [32 стр. 229]. Если для каждого n векторы $\vec{\xi}_i = (\xi_{ii}^{(n)}, \xi_{ii+1}^{(n)}, \ldots, \xi_{in}^{(n)})$, $i = 1, \ldots, n$, независимы, случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j, n = 1, 2, \ldots$, заданы на одном вероятностном пространстве, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I + i + \Xi_n)^{-1} = m(t)$, и функция $m(t)$ непрерывна в нуле, то с вероятностью 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x) = \mu(x)$ в каждой точке непрерывности неслучайной спектральной функции $\mu(x)$, преобразование Стилтьеса которой равно $\int (1 + itx)^{-1} d\mu(x) = m(t)$.

В некоторых случаях из сходимости распределений случайных детерминантов следует сходимость распределений случайных спектральных функций. Рассмотрим так называемое «логарифмическое преобразование»

$$n^{-1}\ln\det(Iz + \Xi) = \int \ln(z + x)\,d\mu_n(x), \quad \mathrm{Im}\,z \neq 0.$$

Для этого преобразования формула обращения в точках стохастической непрерывности $\mu_n(y)$ такова

$$\mathbf{P}\{\mu_n(y) < u\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}\{\mathrm{Im}\,n^{-1}\ \pi^{-1}\ln\det(I(-y + i\varepsilon) + \Xi) < u\}.$$

§ 14. Полукруговой закон Вигнера

Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — симметрические случайные матрицы и $\mu_n(x)$ — их нормированные спектральные функции. Полукруговым законом будем называть любое утверждение о том, что $\mu_n(x)$ либо по вероятности, либо с вероятностью 1 стремится при $n\to\infty$ к неслучайной функции распределения, плотность которой равна

$$\mu'(x) = \begin{cases} (2\pi\sigma)^{-1}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}, & |x| \leq 2\sigma, \\ 0, \ |x| > 2\sigma, \ \sigma > 0. \end{cases}$$

Вигнер [104, 105] впервые доказал, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}\mu_n(x)=\mu(x)$ при следующих предположениях: $\xi_{ij}^{(n)}=\eta_{ij}n^{-1/2}$, величины η_{ij} ($i\geqslant j$, $i, j=1, 2, \ldots$) независимы и симметричны, $\mathbf{M}\eta_{ij}^2=\sigma^2$ и у величин существуют конечные моменты всех порядков. При этих же условиях Гренандер [50] доказал, что $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x)=\mu(x)$. Следующий шаг сделал Арнольд. В работе [79] при условиях, что величины η_{ij}, $i\geqslant j$ ($i, j=1, 2, \ldots$), независимы, $\mathbf{M}\eta_{ii}^2<\infty$, $\mathbf{M}\eta_{ij}^4<\infty$, $i\neq j$, $\mathbf{M}\eta_{ii}=0$, он получил следующий результат: $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x)=$ $=\mu(x)$, если же дополнительно $\mathbf{M}\eta_{ii}^4<\infty$ и $\mathbf{M}\eta_{ij}^6<\infty$, $i\neq j$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x)=\mu(x)$ с вероятностью 1 [80].

Затем Мета в работе [94] на физическом уровне строгости с помощью теории возмущений линейных операторов доказал полукруговой закон при условиях, что элементы η_{ij}, $i\geqslant j$ ($i, j=$ $=1, 2, \ldots$) независимы, одинаково распределены и имеют конечные дисперсии.

Следующее существенное продвижение было сделано в работе Л. А. Пастура [68]. Он доказал, что $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x)=\mu(x)$, если величины η_{ij}, $i\geqslant j$ ($i, j=1, 2, \ldots$), независимы, $\mathbf{M}\eta_{ij}=0$, $\mathbf{D}\eta_{ij}=\sigma^2$ и для всякого $\tau>0$ и $j=1, \ldots, n$ выполняется условие Линдеберга: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{|x|>\tau} x^2 d\mathbf{P}\{\xi_{ij}^{(n)}<x\}=0$. Л. А. Пастур впервые предложил использовать для доказательства полукругового закона преобразование Стилтьеса и формулы возмущений для резольвент случайных матриц.

В работе [19] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых нормированная спектральная функция случайной матрицы сходится к полукруговому закону Вигнера.

Теорема [20, 26]. Если для каждого n случайные элементы $\nu_{ij}^{(n)}$, $i\geqslant j$ ($i, j=1, \ldots, n$), симметричной матрицы $\Xi_n=(\nu_{ij}^{(n)})$ независимы, заданы на одном вероятностном пространстве, $\mathbf{M}\nu_{ij}^{(n)}=0$, $\mathbf{D}\nu_{ij}^{(n)}=\sigma^2 n^{-1}$, $0<\sigma^2<\infty$, то для того чтобы с вероятностью 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(x)=\mu(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Линдеберга: для любого $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{|x|>\tau} x^2 d\mathbf{P}\{\nu_{ij}^{(n)}<x\}=0.$$

В работе [20] доказана следующая центральная предельная теорема для преобразований Стилтьеса спектральных функций случайных матриц, которая уточняет полукруговой закон.

Теорема [20]. Пусть для каждого значения n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i\geqslant j$ ($i, j=1, \ldots, n$), симметричной матрицы $\Xi_n=$

$=(\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)}=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)}=\sigma^2 n^{-1}$, $\mathbf{M}[\xi_{ij}^2-\sigma^2 n^{-1}]^2=$ $=d^2 n^{-2}$; для некоторого $\delta>0$

$$\sup_n \sup_{k,p=1,\dots,n} \mathbf{M}|\sqrt{n}\,\xi_{kp}^{(n)}|^{2+\delta}\leqslant c.$$

Тогда $\mathrm{Sp}(I+it\Xi_n)^{-1}-\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}(I+it\Xi_n)^{-1}\Rightarrow\xi(t)+i\eta(t)u\xi(t)$, $\eta(t)$ — независимые действительные гауссовские случайные функции с нулевыми средними и ковариационными функциями $R_\xi(t_1, t_2)$, $R_\eta(t_1, t_2)$.

Формулы для этих ковариационных функций можно найти в работе [20]. Доказательство этой теоремы основано на представлении разности $\mathrm{Sp}(I+it\Xi_n)^{-1}$—$\mathbf{M}\mathrm{Sp}(I+it\Xi_n)^{-1}$ в виде суммы мартингал-разностей и использовании центральной предельной теоремы для таких сумм.

§ 15 V-преобразование спектральных функций

Для несамосопряженных случайных матриц H_n в общем случае применить предельные теоремы для преобразований Стилтьеса не представляется возможным, так как интегралы $\mathbf{M}\mathrm{Sp}(Iz-H_n)^{-1}$, как правило, не существуют при всех z. Кроме того, формулы теории возмущений для резольвент $(Iz-H_n)^{-1}$, в силу вырождения резольвенты в некоторых точках z, нельзя применить в предельных теоремах. Именно с помощью предельных теорем для случайных детерминантов в работе [40] удалось разработать метод доказательства предельных теорем для спектральных функций несамосопряженных случайных матриц. Идея метода заключается в следующем.

Рассмотрим нормированные спектральные функции

$$\nu_n(x, y)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\chi(\omega:\mathrm{Re}\,\lambda_k<x,\ \mathrm{Im}\,\lambda_k<y),$$

где λ_k — собственные числа комплексной случайной квадратной матрицы H_n n-го порядка

$$\mu_n(x, z)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\chi(\omega:\lambda_k(z)<x),$$

где $\lambda_k(z)$ — собственные числа эрмитовой матрицы

$$(Iz-H_n)(Iz-H_n)^*,\quad z=t+is.$$

V-преобразованием спектральной функции $\nu_n(x, y)$ назовем следующее выражение:

$$\int\int e^{ipx+iqy}d\nu_n(x, y)=(q^2+p^2)(4iq\pi)^{-1}\int\int(\partial/\partial s)\times$$
$$\times[\ln\det(Iz-H_n)(Iz-H_n)^*]e^{itp+isq}dt\,ds,\quad q\neq 0.$$

При доказательстве предельных теорем для $\nu(x, y)$ V-преобразование используется в следующем виде:

$$m_n(p,\ q):=\int\int\left[\int\limits_{-c-x}^{c-x}\left[\int\limits_{-(d+y)u^{-1}}^{(d-y)u^{-1}}\operatorname{sign} v\,(1+u^2)^{-1}e^{ipvu}du\right]e^{iqv}dv\right]\times$$

$$\times e^{ipx+iqy}d\nu_n(x,\ y)=\int\limits_{-c}^{c}\left[\int\limits_{0}^{\infty}\ln x\,d\mu_n(x,\ z)\,e^{isq}\Big|_{s=-d}^{s=d}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{-d}^{d}\ln x\,d\mu_n(x,\ z)\,e^{isq}iq\,ds\right]e^{itp}dt,$$

где $c,\ d$ — некоторые положительные постоянные.

Легко видеть, что если $q\neq 0$ и

$$\lim_{h\to\infty}\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{M}\int\limits_{|x|<h,}\int\limits_{|y|<h}d\nu_n(x,\ y)=1,$$

то

$$\lim_{c\to\infty}\lim_{d\to\infty}\sup_{n}\mathbf{M}\left|\int\int e^{ipx+iqy}d\nu_n(x,\ y)-m_n(p,\ q)\right|=0.$$

Таким образом, зная предел величин $n^{-1}\ln|\det(Iz-H_n)|$, $n\to\infty$, можно найти предел спектральных функций $\nu_n(x,\ y)$.

§ 16. Круговой закон

В работе [43] с помощью V-преобразования и предельных теорем для случайных детерминантов доказано следующее утверждение, которое называется круговым законом.

Теорема 16.1 [41, 43]. Пусть для каждого значения n случайные элементы $\xi_{pl}^{(n)}$ $(p,\ l=1,\ \ldots,\ n)$ комплексной матрицы $H_n=(\xi_{pl}^{(n)}n^{-1/2})$ независимы, $\mathbf{M}\xi_{pl}^{(n)}=0$, $\mathbf{M}|\xi_{pl}^{(n)}|^2=\sigma^2$, $0<\sigma<\infty$, и у величин $\operatorname{Re}\xi_{kl}^{(n)}$, $\operatorname{Im}\xi_{kl}^{(n)}$ существуют плотности распределения $p_{kl}(x)$ и $q_{kl}(x)$, удовлетворяющие условию: для некоторого $\beta>1$

$$\sup_n\sup_{k,l=1,\ldots,n}\int[p_{kl}^{\beta}(x)+q_{kl}^{\beta}(x)]\,dx<\infty,$$

для некоторого $\delta>0$ $\sup\limits_n\sup\limits_{k,l=1,\ldots,n}\mathbf{M}|\xi_{pl}^{(n)}|^{2+\delta}<\infty$. Тогда для любых x и y

$$p\text{-}\lim_{n\to\infty}\nu_n(x,\ y)=\nu(x,\ y),\ \text{где}\ [\partial^2\nu(x,\ y)/\partial x\partial y]=\sigma^{-2}\pi^{-1}\ \text{при}$$

$$x^2+y^2<\sigma^2;\quad [\partial^2\nu(x,\ y)/\partial x\partial y]=0\ \text{при}\ x^2+y^2\geqslant\sigma^2,$$

$$\nu_n(x,\ y)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\chi(\operatorname{Re}\lambda_k<x)\chi(\operatorname{Im}\lambda_k<y),$$

λ_k — собственные числа матрицы H_n. Отметим, что в частном случае для гауссовских комплексных матриц это утверждение было доказано в работе [94].

§ 17. Эллиптический закон

В этом параграфе сформулирована основная предельная теорема спектральной теории случайных матриц. В предыдущих параграфах были сформулированы два закона — полукруговой для симметричных случайных матриц и круговой для несимметричных случайных матриц с независимыми элементами. Оставалась нерешенной задача о нахождении предельной спектральной функции для случая, когда векторы (ξ_{pl}, ξ_{lp}), $p \geqslant l$, p, $l=1, \ldots, n$, независимы, $\mathbf{M}\xi_{pl}\xi_{lp}=\rho$, а остальные ограничения на элементы ξ_{pl} остаются такими же, как и в теореме 16.1. Оказалось, что с помощью V-преобразования для таких матриц можно найти плотность предельной спектральной функции, равной некоторой постоянной величине на области, граница которой является эллипсом. Точнее, справедливо следующее утверждение [45].

Теорема 17.1. Пусть для каждого значения $n=1, 2, \ldots$ случайные векторы $(\xi_{lp}^{(n)}, \xi_{pl}^{(n)})$, $p \geqslant l$, $p, l=1, \ldots, n$, стохастически независимы, заданы на одном вероятностном пространстве,

$$\mathbf{M}\xi_{pl}^{(n)}=0, \quad \mathbf{M}\,|\xi_{pl}^{(n)}|^2=n^{-1}, \quad \mathbf{M}\xi_{pl}^{(n)}\xi_{lp}^{(n)}=n^{-1}\rho, \quad l \neq p, \quad 0<|\rho|<1,$$

у мнимых и вещественных частей случайных элементов $\xi_{pl}^{(n)}$, $\xi_{lp}^{(n)}$ случайной матрицы $H_n=(\xi_{pl}^{(n)})_{p,l=1}^{n}$ существуют совместные плотности распределения $p_{kl}^{(n)}(x_i,\ i=1, \ldots, 4)$, удовлетворяющие условию: для некоторого $\beta>1$

$$\sup_n \sup_{k,l=1,\ldots,n} \int p_{kl}^{(n)\beta}(x_i,\ i=1, \ldots, 4) \prod_{i=1}^{4} dx_i < \infty$$

и для некоторого $\delta>0$

$$\sup_n \sup_{p,l=1,\ldots,n} \mathbf{M}\,|\xi_{pl}^{(n)}\sqrt{n}\,|^{2+\delta} < \infty .$$

Тогда для любых x и y с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(x, y)=\lambda(x, y), \tag{17.1}$$

где $\dfrac{\partial^2\lambda(x, y)}{\partial x \partial y}=\pi^{-1}[1-(a^2+b^2)^2]^{-1}$, если

$$\frac{(bx-ay)^2(1-a^2-b^2)^{-2}}{a^2+b^2}+\frac{(ax+by)^2(1+a^2+b^2)^{-2}}{a^2+b^2}<1,$$

и $\dfrac{\partial^2\lambda(x, y)}{\partial x \partial y}=0$ в противном случае, $a=\operatorname{Re}\sqrt{\rho}$, $b=\operatorname{Im}\sqrt{\rho}$.

Легко видеть, что из формулы (17.1), в частности, вытекают полукруговой (при $\rho\to 1$) и круговой (при $\rho\to 0$) законы.

§ 18. Осцилляционная теорема Штурма

Для того, чтобы найти предельные спектральные функции случайных матриц, нужно уметь обращать преобразование Стилтьеса, что является далеко не простым делом. Иногда можно обойтись без обращения преобразования Стилтьеса, если воспользоваться осцилляционной теоремой Штурма: пусть A_n — симметричная вещественная матрица n-го порядка и $\det A_i$, $i=0, \ldots, n$, $(\det A_0=1)$ — последовательность ее главных миноров, не равных нулю. Тогда число отрицательных собственных чисел матрицы A равно числу перемен знака в последовательности $\det A_i$, $i=0, \ldots, n$. Используя это утверждение, получаем следующее: пусть $\Xi_n=(\xi_{ij}^{(n)})$ — случайные вещественные симметричные матрицы n-го порядка, $\det \Xi_i$, $i=0, \ldots, n$, $(\det \Xi_0=1)$ — ее главные миноры, $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция матрицы Ξ_n, с вероятностью 1 $\det \Xi_i \neq 0$. Тогда с вероятностью 1 [99, 31]

$$\mu_n(x)=(2n)^{-1} \sum_{i=1}^{n}(1-\operatorname{sign}(\det(\Xi_{i-1}-Ix)/\det(\Xi_i-Ix)).$$

С помощью этого уравнения в работе [32, стр. 297] доказаны предельные теоремы для спектральных функций случайных матриц Якоби.

§ 19. Закон арктангенса

Функции распределения решений системы линейных алгебраических уравнений $\Xi_n\vec{x}_n=\vec{\eta}_n$ в общем случае имеют громоздкий вид, порядок таких систем высок, поэтому представляется целесообразным изучение асимптотического поведения решений при возрастании порядка системы до бесконечности [1, 8, 9]. В этом параграфе приведены предельные теоремы общего вида для решений систем $\Xi_n\vec{x}_n=\vec{\eta}_n$, коэффициенты которых являются независимыми случайными величинами [11, 16, 22, 34].

Рассмотрим системы линейных случайных алгебраических уравнений $\Xi_n\vec{x}_n=\vec{\eta}_n$, где $\Xi_n=(\xi_{ij}^{(n)})$ — действительная случайная квадратная матрица n-го порядка, $\vec{\eta}_n=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — случайный вектор. Пусть Ξ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента ξ_{ij}. Если $\det \Xi_n \neq 0$, то решение такой системы существует и равно $\vec{x}_n=\Xi_n^{-1}\vec{\eta}_n$: если $\det \Xi_n=0$, то решение может не существовать. Будем предполагать, что компоненты $x_k^{(n)}$ вектора $\vec{x}_n$ равны ∞, если $\det \Xi_n=0$.

Теорема 19.1. [32]. Пусть для каждого значения n случайные величины ξ_{ij}, η_i, $i, j=1, \ldots, n$, независимы, $M\xi_{ij}=0$,

$M\eta_l=0$, $D\xi_{lj}=D\eta_l=\sigma^2$, $0<\sigma^2<\infty$, $l, j=1, \ldots, n$, для некоторого $\delta>0$ $\sup\limits_{n,l,j} M[|\xi_{lj}|^{4+\delta}+|\eta_l|^{4+\delta}<\infty$. Тогда для любых $k\neq l$, $k, l=1, \ldots, n$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{x_{i_1}^{(n)}<y_1, \ldots, x_{i_k}^{(n)}<y_k\}=$$

$$=\pi^{-(k+1)/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\int_{-\infty}^{y_1}\ldots\int_{-\infty}^{y_k}(1+z_1^2+\ldots+z_k^2)^{-\frac{k+1}{2}}\prod_{l=1}^{k} dz_l,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{x_k^{(n)}<z\}=1/2+\pi^{-1}\operatorname{arctg} z,$$

где $i_1, \ldots, i_k$ — любые различные целые числа от 1 до n.

§ 20. Случайные детерминанты Фредгольма

Пусть Ξ_n — квадратная случайная матрица. Случайным детерминантом Фредгольма такой матрицы будем называть случайную функцию $\det(I+t\Xi_n)$, где t — действительная или комплексная переменная. Случайные детерминанты Фредгольма несут важную информацию о случайных матрицах. С их помощью можно найти предельные распределения для собственных чисел случайных матриц. На основании предельных теорем для случайных детерминантов Фредгольма можно доказать предельные теоремы для собственных чисел симметричных и несимметричных случайных матриц, а также линейных случайных операторов в гильбертовом пространстве.

Изложим кратко схему доказательства предельных теорем для собственных чисел случайных матриц. Пусть $\Xi_n=(\xi_{ij})$ — квадратная случайная матрица n-го порядка и λ_i ($i=1, \ldots, n$) — ее собственные числа, упорядоченные в порядке возрастания их модулей. Для упрощения формул будем считать, что собственные числа λ_i ($i=1, \ldots, n$) различны. Для λ_i справедливы формулы:

$$\begin{cases}\lambda_1=\operatorname{Sp}\Xi_n^s(\operatorname{Sp}\Xi_n^{s-1})^{-1}+\varepsilon_s,\\ \lambda_2=(\operatorname{Sp}\Xi_n^s-\lambda_1^s)(\operatorname{Sp}\Xi_n^{s-1}-\lambda_1^{s-1})^{-1}+\delta_s,\end{cases} \tag{20.1}$$

где $\varepsilon_s\to 0$ и $\delta_s\to 0$ при $s\to\infty$.

Если мы предположим, что

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\sup_n P\{\operatorname{Sp}\Xi_n\Xi_n^*\geqslant h\}=0, \tag{20.2}$$

то в формулах (20.1) можно положить

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, p\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, [|\varepsilon_s|+|\delta_s|]=0.$$

В силу этого соотношения для изучения предельных теорем для собственных чисел λ_l нужны предельные теоремы для распределений случайных векторов $(\mathrm{Sp}\,\Xi_n^s, \mathrm{Sp}\,\Xi_n^{s-1})$ для любого фиксированного целого $s>0$. Отметим, что для симметричных случайных матриц формулы (20.1) справедливы также и в том случае, когда собственные числа λ_i кратные.

Изучение распределений величин $\mathrm{Sp}\,\Xi_n^s$ представляет собой весьма сложную задачу, но при выполнении условия (20.2) ее можно свести к изучению некоторых сумм условно независимых случайных величин. Если Ξ_n — симметричные матрицы, то

$$\mathrm{Sp}\,\Xi_n^s = i^{-s}[(s-1)!]^{-1}(\partial^s/\partial t^s)\ln\det(I+it\Xi_n)_{t=0}(-1)^{s+1}. \quad (20.3)$$

Для $\det(I+it\Xi_n)$ имеем интегральное представление

$$\det(I+it\Xi_n)^{-1} = [\mathbf{M}\exp(-it(\Xi_n\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_n))/\Xi_n]^2, \quad (20.4)$$

где $\vec{\xi}_n$ — случайный вектор, не зависящий от матрицы Ξ_n и распределенный по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$.

В силу (20.4) выражение (20.3) будет равно

$$\mathrm{Sp}\,\Xi_n^s = \mathbf{M}\,[\varphi(\exp(-it(\Xi_n\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_n)), (\Xi_n\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_n))\times$$
$$\times[\mathbf{M}\exp(-it(\Xi_n\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_n))]^{-s}/\Xi_n], \quad (20.5)$$

где φ — некоторая полиномиальная функция.

Рассматривая теперь моменты

$$\mathbf{M}\varphi^m[\mathbf{M}\exp(-it(\Xi_n\vec{\xi}_n, \vec{\xi}_n))]^l \quad (m, l=1, 2, \ldots),$$

задачу нахождения распределений $\mathrm{Sp}\,\Xi_n^s$ можно свести к нахождению распределений случайных величин $(\Xi_n\vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$ $(k=1, 2, \ldots)$, где $\vec{\xi}_{nk}$ — независимые случайные векторы, не зависящие от матрицы Ξ_n и распределенные по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$. Если распределения случайных величин $(\Xi_n\vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$ сближаются с распределениями величин $(H_n\vec{\xi}_{nk}, \vec{\xi}_{nk})$, где H_n — некоторые случайные матрицы, то при некоторых условиях легко вывести, что $\lambda_1(\Xi_n)\sim\lambda_1(H_n)$, где символ $\sim$ означает, что почти для всех x

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbf{P}\{\lambda_1(\Xi_n)<x\} - \mathbf{P}\{\lambda_1(H_n)<x\}] = 0.$$

Для несимметричных случайных матриц Ξ_n нужно пользоваться интегральными представлениями следующего вида

$$\det(I+\alpha_t\Xi_n)^{-1} = \mathbf{M}\,[\exp\{i\alpha_t((\Xi_n-\Xi_n')\vec{\xi}, \vec{\eta}) - \alpha_t(\Xi_n\vec{\xi}, \vec{\xi}) -$$
$$-\alpha_t(\Xi_n\vec{\eta}, \vec{\eta})\}/\Xi_n],$$

где

$$\alpha_t = t[q+0{,}5\,|\mathrm{Sp}(\Xi+\Xi')|+0{,}25\,\mathrm{Sp}(\Xi+\Xi')^2]^{-1},$$

$0 \leqslant t < 1$, $q \geqslant 1$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ — независимые случайные векторы, распределенные по нормальному закону $N(0, 0, 5I)$ и не зависящие от матрицы Ξ_n.

Пусть Ξ_n — квадратные случайные матрицы n-го порядка. Упорядочим собственные числа матрицы $\Xi_n \Xi_n'$ в невозрастающем порядке $\lambda_{1n} \geqslant \lambda_{2n} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{nn}$. Рассмотрим случайный процесс $\lambda_n(x)$, равный сумме собственных чисел, попавших в полуинтервал $[0, x)$. Если с вероятностью 1 $\operatorname{Sp} \Xi_n \Xi_n' < \infty$, то

$$\int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\lambda_n(x) = (d/dt) \ln \det (I + t\Xi_n \Xi_n') :=\eta_n(t), \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, изучение предельных теорем для спектральных функций $\lambda_n(x)$ можно свести к изучению предельных теорем для случайных детерминантов.

Назовем случайные векторы $\vec{\xi}_{nk}$ $(k=1, \ldots, n, \quad n=1, 2, \ldots)$ предельно постоянными, если найдутся такие постоянные векторы $\vec{a}_{nk}$, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k=1,\ldots,n} \mathbf{P}\{(\vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}, \vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Случайные векторы $\vec{\xi}_{nk} - \vec{a}_{nk}$, удовлетворяющие этому условию, будем называть бесконечно малыми.

Теорема 20.1 [20]. Если

$$\lim_{h\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\lambda_n(+\infty) \geqslant h\} = 0,$$

то для того, чтобы $\lambda_n(x) \stackrel{\sim}{\Rightarrow} \lambda(x)$, $x \geqslant 0$, где $\lambda(x)$ — некоторая случайная функция, неубывающая и ограниченной вариации с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы $\eta_n(t) \Rightarrow \eta(t)$, где $\eta(t)$ — некоторая случайная функция, $t \geqslant 0$.

Теорема 20.2 [20]. Если

$$\lim_{h\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\lambda_n(+\infty) \geqslant h\} = 0$$

и $\eta_n(t) \sim \zeta_n(t)$, $t \geqslant 0$, где $\zeta_n(t) = \int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\mu_n(x)$, $\mu_n(x)$ — некоторая случайная функция, неубывающая и ограниченной вариации с вероятностью 1, то почти для всех значений $x > 0$ $\lambda_n(x) \sim \mu_n(x)$.

Теорема 20.3 [20]. Если для каждого значения n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$ $(i, j=1, \ldots, n)$ матриц $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, предельно постоянны

$$\lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\operatorname{Sp} \Xi\Xi' > h\} = 0,$$

то почти для всех значений x $\lambda_n(x) \sim \mu_n(x)$, $x \geqslant 0$, где $\mu_n(x)$ — неубывающий случайный процесс, преобразование Стилтьеса которого равно

$$\int_0^\infty (1+tx)^{-1} d\mu_n(x) =$$

$$= (d/dt) \ln \det [(I + t\Lambda_{1n})\{I + t\Lambda_{2n} + tB_n(I + t\Lambda_{1n})^{-1} B_n'\}],$$

где

$$\Lambda_{1n} = \left(\delta_{ij} \sum_{i \in T_{jn}} \nu_{ij}^2\right), \quad \Lambda_{2n} = \left(\delta_{ij} \sum_{j \in K_{in}} \nu_{ij}^2\right), \quad t \geqslant 0, \quad Б_n = (b_{ij}),$$

$\nu_{ij} = \xi_{ij} - a_{ij} - \mathbf{M}(\xi_{ij} - a_{ij}) \chi(|\xi_{ij} - a_{ij}| < \tau)$, $\tau > 0$, $b_{ij} = \xi_{ij} - \nu_{ij}$, a_{ij} — неслучайные числа, удовлетворяющие соотношению: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i,j=1,\ldots,n} \mathbf{P}\{|\xi_{ij} - a_{ij}| > \varepsilon\} = 0.$$

Множества T_{jn} и K_{jn} определены следующим образом: множество $L_n = \{\nu_{ij}, i, j = 1, \ldots, n\}$ разбивается на $2n$ непересекающихся множеств R_{in}', R_{in}'', содержащих, соответственно, элементы только i-й вектор-строки и i-го вектор-столбца матрицы Ξ_n, так что векторы $\vec{\mu}_i$, составленные из элементов каждого множества, будут бесконечно малы. Через T_{jn} обозначим множество значений индекса i величин $\nu_{ij} \in \bigcup_{p=1}^n R_{pn}'$, у которых второй индекс равен j, а через K_{in} — множество значений индекса j величин $\nu_{ij} \in \bigcup_{p=1}^n R_{np}''$, у которых первый индекс равен i.

Следствие 20.1. Если а) дополнительно к условиям теоремы 20.3 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sp}\, B_n B_n' = 0$, то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$

$$\{\lambda_{k_1 n}, \lambda_{k_2 n}, \ldots, \lambda_{k_m n}\} \sim \{\mu_{k_1 n}, \mu_{k_2 n}, \ldots, \mu_{k_m n}\},$$

где $\mu_{1n} \geqslant \ldots \geqslant \mu_{2nn}$ — упорядоченные в возрастающем порядке величины $\sum_{i \in T_{jn}} \nu_{ij}^2$; $\sum_{i \in K_{jn}} \nu_{ji}^2$; б) дополнительно к условиям теоремы 20.3 вектор-строки и вектор-столбцы матрицы Ξ_n предельно постоянны, то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$

$$\{\lambda_{k_1 n}, \lambda_{k_2 n}, \ldots, \lambda_{k_m n}\} \sim \{\theta_{k_1 n}, \theta_{k_2 n}, \ldots, \theta_{k_m n}\},$$

где $\theta_{1n} \geqslant \ldots \geqslant \theta_{n^2+n,n}$ — упорядоченные в возрастающем порядке величины ν_{ij}^2 $(i, j = 1, \ldots, n)$, β_{in} $(i = 1, \ldots, n)$, β_{in} — собственные числа матрицы $B_n B_n'$.

Упорядочим собственные числа матрицы Ξ_n в порядке возрастания их модулей $|\lambda_{1n}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_{nn}|$. Если модули некоторых собственных чисел совпадают, то их упорядочиваем в порядке возрастания аргумента.

Пусть $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ — случайные матрицы n-го порядка,

$$\nu_{ij}^{(n)} = \xi_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(n)} - \rho_{ij}^{(n)}, \quad \rho_{ij}^{(n)} = \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{ij}(x + a_{ij}^{(n)}), \quad \tau > 0,$$

$$F_{ij}^{(n)}(x) = \mathbf{P}\{\xi_{ij}^{(n)} < x\}.$$

Из величин $b_{ij}^{(n)} := \rho_{ij}^{(n)} + a_{ij}^{(n)}$ составим квадратную матрицу $B_n = (b_{ij}^{(n)})$.

Теорема 20.4 [20]. Если для каждого n векторы $(\xi_{ij}^{(n)}, \xi_{ji}^{(n)})$, $i \geqslant j$, $i, j = 1, \ldots, n$, независимы, векторы-строки и векторы-столбцы матрицы Ξ_n предельно постоянны,

$$\lim_{h\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \nu_{ii}^{(n)}\right| + \sum_{i,j=1}^{n} (\nu_{ij}^{(n)})^2 \geqslant h\right\} = 0,$$

$$\sup_n [|\operatorname{Sp} B_n| + \operatorname{Sp} B_n B_n'] < \infty,$$

то для любых целых чисел $k_1 > k_2 > \ldots > k_m$ [31]

$$\{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\} \sim \{\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m}\},$$

где μ_i $(i = 1, \ldots, n^2 + n)$ — упорядоченные в порядке возрастания модуля (или аргумента, если модули чисел совпадают) случайные величины β_p, ν_{pp} $(p = 1, \ldots, n)$,

$$|\nu_{pl}\nu_{lp}|^{1/2} i^{(1-\operatorname{sign}\nu_{pl}\nu_{lp})/2}, \quad -|\nu_{pl}\nu_{lp}|^{1/2} i^{(1-\operatorname{sign}\nu_{pl}\nu_{lp})/2}, \quad p > l,$$

где β_p $(p = 1, \ldots, n)$ — собственные числа матрицы B_n, m — целое число, не зависящие от n.

Из теоремы 20.4, в частности, мы получаем следующие утверждения: если с вероятностью 1 $\nu_{ij}\nu_{ji} \geqslant 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, то $p\text{-}\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} \lambda_{in} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, если

$$\nu_{ij}\nu_{ji} < 0 \ (i, j = 1, \ldots, n), \quad p\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (|\beta_i| + |\nu_{ii}|) = 0,$$

то $p\text{-}\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \lambda_{in} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

§ 21. Элементы G-анализа

В этом параграфе рассмотрен метод состоятельного и асимптотически нормального оценивания некоторых функций ковариационных матриц $\varphi(R_{m_n})$ при больших размерностях m_n наблюдаемых векторов. Ранее, в большинстве случаев для оценок $\varphi(\hat{R}_{m_n})$, где $\hat{R}_{m_n}$ — эмпирическая ковариационная матрица, требовалось настолько много наблюдений n, что возникло сомнение в полезности многомерного статистического анализа для решения практических задач при больших значениях m_n. Эти сомнения частично были развеяны после появления работ [2, 53, 55, 62], в которых были найдены поправки к оценкам $\varphi(\hat{R}_{m_n})$ при выполнении условия А. Н. Колмогорова: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{n}=c, \quad 0<c<\infty$. После долгих лет исследований казалось, что при выполнении условия А. Н. Колмогорова не существует состоятельных и асимптотически нормальных оценок функций $\varphi(R_{m_n})$. Однако благодаря развитой спектральной теории матриц [20, 32], для некоторых функций φ при выполнении G-условия $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(m_n)n^{-1}<\infty$ удалось установить, что

$$p\lim_{n\to\infty}[\varphi(\hat{R}_{m_n})-\psi(R_{m_n})]=0, \tag{21.1}$$

где ψ — некоторая известная измеримая функция элементов матрицы R_{m_n}. Это и есть основное утверждение, составляющее основу G-анализа наблюдений большой размерности. Для доказательства (21.1), как правило, используются предельные теоремы для сумм мартингал-разностей и формулы возмущений для резольвент случайных матриц, что составляет теоретическую часть G-анализа [42, 44].

Используя уравнение (21.1), можно найти такую измеримую функцию $G(\hat{R}_{m_n})$ (G-оценку), что

$$p\lim_{n\to\infty}[G(\hat{R}_{m_n}-\varphi(R_{m_n})]=0, \text{ либо } [G(\hat{R}_{m_n})-\varphi(R_{m_n})]\sqrt{c_n}\Rightarrow N(0,1),$$

где c_n — некоторая последовательность чисел. В работе [44] показано, что оценка погрешности G-оценок некоторых функций $\varphi(R_{m_n})$ эквивалентна $(m_n n)^{-1/2}$, в то время как оценки $\varphi(\hat{R}_{m_n})$ имеют погрешность, эквивалентную $m_n n^{-1/2}$.

1. **G_1-оценка обобщенной дисперсии.** Пусть даны независимые наблюдения $x_1,\ldots,x_n$ над m_n-мерным случайным вектором ξ, $n>m_n$. Обобщенной дисперсией наблюдений $x_1,\ldots,x_n$ называется выражение $\det\tilde{R}$, где

$$\tilde{R}:=(n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})(x_k-\bar{x})', \quad \bar{x}=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

Если векторы x_i, $i=1,\ldots,n$, независимы и распределены по многомерному нормальному закону $N(a,R)$, то $\det\tilde{R}\approx$ $\approx\det R(n-1)^{-m}\prod\limits_{i=n-m+1}^{n}\chi_i^2$, где χ_i^2 — независимые случайные величины, распределенные по χ^2-закону с i степенями свободы. В общем случае распределение $\det \tilde{R}$ имеет громоздкий вид, поэтому нахождение G_1-оценок для величин $\det R$ представляет собой весьма сложную задачу. В работе [38] доказано, что при некоторых условиях в качестве G_1-оценок для величин $\ln\det Rc_n^{-1}$, где c_n — последовательность постоянных такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^{-2}\ln\frac{n}{n-m_n}=0$, можно взять оценку [44]

$$G_1(\tilde{R}):=c_n^{-1}\left\{\ln\det\hat{R}+\ln\left[(n-1)^m\left(A_{n-1}^m\right)^{-1}\right]+\ln\frac{n}{n-m_n}\right\},$$

где $A_n^m=n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

Теорема 21.1. Пусть случайные m_n-мерные векторы $x_1^{(n)},\ldots,x_n^{(n)}$ для каждого значения $n>m_n$ независимы, одинаково распределены с вектором средних a и невырожденной ковариационной матрицей R_{m_n}, для некоторого $\delta>0$

$$\sup_n \sup_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m_n}} \mathbf{M}\,|\tilde{x}_{ij}^{(n)}|^{4+\delta}<\infty,$$

где $\tilde{x}_{ij}^{(n)}$ — компоненты вектора $\tilde{x}_i=R_{m_n}^{-1/2}(x_i^{(n)}-a)$

$$\lim_{n\to\infty}(n-m_n)=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{m_n}=1$$

и для каждого значения $n>m_n$ случайные величины $\tilde{x}_{ij}^{(n)}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m_n$ независимы. Тогда

$$p\lim_{n\to\infty}\left[G_1(\tilde{R}_{m_n})-c_n^{-1}\ln\det R_{m_n}\right]=0.$$

Если дополнительно к предыдущим условиям

$$\mathbf{M}\,(\tilde{x}_{ij}^{(n)})^4=3,\quad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m_n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{c_nG_1(\tilde{R})-\ln\det R_{m_n}}{\sqrt{2\ln\frac{n}{n-m_n}}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

2. G_2-оценка следа резольвенты ковариационной матрицы. Рассмотрим основную задачу G-анализа — задачу оценивания преобразований Стилтьеса нормированных спектральных функций $\mu_{m_n}(x)=m_n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{m_n}\chi(\lambda_k<x)$ ковариационных матриц R_{m_n} по наблюдениям $x_1,\ldots,x_n$ над случайным вектором ξ с ковариационной матрицей R_{m_n}, где λ_k — собственные числа матрицы R_{m_n}. Отметим, что многие аналитические функции от ковариационных матриц, которые используются в многомерном статистическом анализе,

можно выразить через спектральные функции $\mu_{m_n}(x)$. Например,

$$m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,f(R_{m_n})=\int_0^\infty f(x)\,d\mu_{m_n}(x),$$

где f — аналитическая функция.

Преобразованием Стилтьеса функции $\mu_{m_n}(x)$ называется выражение

$$\varphi(t, R_{m_n})=\int_0^\infty (1+tx)^{-1}\,d\mu_{m_n}(x)=m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(I+tR_{m_n})^{-1},\quad t\geqslant 0,$$

G-оценкой преобразования Стилтьеса $\varphi(t, R_{m_n})$ назовем следующее выражение

$$G_2(t, \tilde{R}_{m_n})=\varphi(\tilde{\theta}_n(t), \tilde{R}_{m_n}),$$

где $\tilde{\theta}_n(t)$ — решение уравнения

$$\theta\left(1-\frac{m_n}{n-1}+\frac{m_n}{n-1}\varphi(\theta, \tilde{R}_{m_n})\right)=t. \tag{21.2}$$

Очевидно, что положительное решение уравнения (21.2) при $t\geqslant 0$ существует и единственно. Из результатов работ [20, 32, 44] вытекает следующее утверждение.

Теорема 21.2. Пусть заданы независимые наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над m_n-мерным случайным вектором ξ, выполняется G-условие:

$$\varlimsup_{n\to\infty} m_n n^{-1}<1,$$

$$0<c_1\leqslant\lambda_i\leqslant c_2<\infty,\quad i=1, \ldots, m_n,$$

компоненты вектора $\eta_k:=(\eta_{1k}, \ldots, \eta_{m_n k})=R_{m_n}^{-1/2}(\xi-\mathbf{M}\xi_k)$ независимы и

$$\sup_n \sup_{k=1,\ldots,n} \sup_{i=1,\ldots,m_n} \mathbf{M}\,|\eta_{ik}|^{4+\delta}<\infty,\quad \delta>0.$$

Тогда при $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\,\{[G_2(t, \tilde{R}_{m_n})-\varphi(t, R_{m_n})]\sqrt{(n-1)\,m_n}\,a_n(t)+$$

$$+c_n(t)<x\}=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^x e^{-y^2/2}\,dy,$$

где

$$a_n(t)=q_1^{-1}(t)\,q_2^{-1}(t),$$

$$q_1(t)=1-\frac{\mathbf{M}\tilde{\varphi}'(\theta_n)\,k_n\theta_n}{1-k_n+k_n\theta_n\mathbf{M}\tilde{\varphi}'(\theta_n)+k_n\mathbf{M}\tilde{\varphi}(\theta_n)},$$

$$q_2(t)=\left[m_n^{-1}\operatorname{Sp}A^2+3m_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n}a_{ii}^2\right]^{-1/2},$$

$$A=(a_{ij})=\left[1+\frac{\theta_n}{n-1}\mathbf{M}\operatorname{Sp}SR_{m_n}\right]^{-1}\theta_nS^2R_{m_n}+$$

$$+\theta_nSR_{m_n}\theta_n\mathbf{M}(n-1)^{-1}\operatorname{Sp}S^2R_{m_n}\left[1+\frac{\theta_n}{n-1}\mathbf{M}\operatorname{Sp}SR_{m_n}\right]^{-2},$$

$$S=(I+\theta_nQ)^{-1},\quad k_n=\frac{m_n}{n-1},$$

θ_n — решение уравнения $\theta_n(1-k_n+k_n\mathbf{M}\hat{\varphi}(\theta_n))=t$,

$$\hat{\varphi}(\theta_n)=m_n^{-1}\operatorname{Sp}S,$$

$$Q=(n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathbf{M}x_k)(x_k-\mathbf{M}x_k)',$$

$$c_n(t)=-a_n(t)\frac{\theta_n\frac{\mathbf{M}(S\eta,\eta)}{\sqrt{(n-1)m_n}}}{1-\frac{\theta_n}{n-1}\mathbf{M}(S\eta,\eta)}q_1(t)+$$

$$+\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{m_n}}\sum_{p=1}^{m_n}\{-[1+\lambda_pt]^{-3}\mathbf{M}\varepsilon_{2p}^2+[1+\lambda_pt]^{-2}\mathbf{M}\varepsilon_{2p}\},$$

$$\eta=\sum_{l=1}^{n}\frac{(x_l-\mathbf{M}x_l)}{\sqrt{n}},$$

$$\varepsilon_{2p}=\theta_n\left\{\sum_{l=1}^{n}[b_{pl}^2-\lambda_p]\right\}-\theta_n^2\left\{(B_p'\Gamma_pB_pb_p,\ b_p)-\frac{\lambda_p}{n-1}\operatorname{Sp}R_pB_pB_p'\right\}+$$

$$+\theta_n\lambda_p[m_n^{-1}\operatorname{Sp}\Gamma_p-\mathbf{M}\hat{\varphi}(\theta_n)],$$

B_p — матрица, полученная вычеркиванием p-ой строки матрицы $B=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)(n-1)^{-1/2}$, $\xi_l=\sqrt{\Lambda_{m_n}}\eta_k$,

$$\eta_k=HR_{m_n}^{-1/2}(x_k-\mathbf{M}x_k),\quad \Lambda_{m_n}=\operatorname{diag}(\lambda_i,\ i=1,\ldots,m_n),$$

H — матрицы собственных векторов матрицы R_{m_n}, $\Gamma_p=(I+\theta_nB_pB_p')^{-1}$, b_p — вектор-строка матрицы B, функции $a_n(t)$ и $c_n(t)$ удовлетворяют неравенству при $0<t<c<\infty$

$$\sup[|a_n(t)|+|c_n(t)|]<\infty.$$

3. G_3-оценка обратной ковариационной матрицы. Пусть $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — наблюдения над m_n-мерным случайным вектором ξ с невырожденной ковариационной матрицей R. Так как

$$m_n^{-1}\operatorname{Sp}R^{-1}=\lim_{t\to\infty}tm_n^{-1}\operatorname{Sp}(I+tR)^{-1},$$

то, используя оценку G_2, получаем, что в качестве G-оценки матрицы R^{-1} следует брать оценку $G_3=\hat{R}^{-1}\left(1-\frac{m_n}{n-1}\right)$, где $\tilde{R}$ — эмпирическая ковариационная матрица, $n>m_n$.

Используя доказательство центральной предельной теоремы для случайных детерминантов [38], легко доказать, что при выполнении условий этой теоремы элементы матрицы G_3 будут состоятельными оценками для соответствующих элементов матрицы R.

4. G_4-оценки для следов степеней ковариационных матриц. Очевидно, что для $k=1, 2, \ldots$

$$m_n^{-1}\operatorname{Sp} R^k=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}m_n^{-1}\operatorname{Sp}(I+tR)^{-1}_{t=0}.$$

Используя эту формулу и оценку G_2, получаем, что $G_4^{(1)}$-оценка величины $m_n^{-1}\operatorname{Sp} R$ равна $m_n^{-1}\operatorname{Sp}\hat{R}$. Для нахождения $G_4^{(2)}$-оценки величины $m_n^{-1}\operatorname{Sp} R^2$ нужны некоторые вычисления. Учитывая, что $\theta'(0)=1$, $\theta''(0)=\frac{2}{m_n}\operatorname{Sp}\hat{R}\frac{m_n}{n-1}$, получаем, что

$$G_4^{(2)}=m_n^{-1}\operatorname{Sp}\hat{R}^2-(m_n^{-1}\operatorname{Sp}\hat{R})^2\frac{m_n}{n-1}.$$

Аналогичные формулы можно найти для оценок $G_4^{(k)}$, $k=3, 4, \ldots$

§ 22. Уравнение Дайсона

Большое число результатов, связанных с изучением случайных детерминантов, получено при решении некоторых математических моделей в физике твердого тела [58—60, 65, 69, 99]. В частности, Дайсоном рассматривалась следующая задача: пусть задана цепочка n упруго связанных частиц, массы которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$ являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Продольные колебания такой цепочки с закрепленными концами описываются системой уравнений [87]

$$x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}=m_k\ddot{x}_k, \quad x_0=x_{n+1}=0,$$

в которой константа упругого взаимодействия соседних частиц равна 1, x_k — смещение частиц из положения равновесия.

Собственные частоты λ_{kn}, $k=1, \ldots, n$, этой колебательной системы находятся из условия разрешимости следующей системы линейных уравнений

$$u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}=-\lambda_{kn}m_k u_k, \quad u_0=u_{n+1}=0,$$

т. е. находятся как собственные числа матрицы Якоби

$$C_n=\left(-\frac{2\delta_{lj}}{m_l}+\frac{\delta_{lj-1}}{\sqrt{m_l m_{l-1}}}+\frac{\delta_{lj+1}}{\sqrt{m_l m_{l+1}}}\right).$$

Дайсон [87, 68] предложил изучать предельное поведение нормированных спектральных функций $\mu_n(x)=n^{-1}\sum_k F(x-\lambda_{kn})$, $F(x)=1$ при $x>0$, $F(x)=0$ при $x\leqslant 0$, матрицы C_n с помощью так называемого «логарифмического преобразования»

$$\int_0^\infty \ln(z+x)\,d\mu_n(x)=n^{-1}\ln\det(Iz+C_n),\quad z=t+is.$$

Для случайных величин $n^{-1}\ln\det(Iz+C_n)$ можно легко доказать предельные теоремы типа закона больших чисел, а также найти предел их математических ожиданий, так как для детерминантов матриц Якоби справедливы хорошо известные рекуррентные соотношения.

Теорема Дайсона о предельном поведении величин $n^{-1}\ln\det(Iz+\Xi_n)$ обобщена в работе [32]: пусть случайные величины ξ_i, $i=1,2,\ldots$, матриц $\Xi_n=((2+\xi_i)\delta_{ij}-\delta_{ij+1}-\delta_{ij-1})$ независимы, неотрицательны, одинаково распределены и для некоторого $\delta>0$ $\mathbf{M}|\ln\xi_1|^{1+\delta}<\infty$. Тогда $p\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\det\Xi_n=\int_1^\infty \ln x\,dF(x)$, где функция распределения $F(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Дайсона

$$F(x)=\iint_{2+y-z^{-1}<x,\,z\geqslant 1} dF(z)\,d\mathbf{P}\{\xi_1<y\}.$$

Используя это уравнение, можно найти по формуле обращения для «логарифмического преобразования» предельную спектральную функцию. Отметим, что в некоторых случаях можно обойтись без этого преобразования, используя осцилляционную теорему Штурма [32]. Для детерминантов несимметричных случайных матриц Якоби аналогичные уравнения получены в работе [46].

§ 23. Предельные теоремы для нормированных спектральных функций пучка самосопряженных случайных матриц

Пусть $A=(\xi_{ij})$, $B=(\eta_{ij})$ — самосопряженные случайные матрицы n-го порядка. Нормированной спектральной функцией пучка случайных матриц A и B называется выражение

$$\mu_n(x)=n^{-1}\sum_{k=1}^n F(x-\lambda_k),$$

где $F(x-\lambda_k)=1$, если $\lambda_k<x$ и $F(x-\lambda_k)=0$, если $\lambda_k\geqslant x$, λ_k — корни характеристического уравнения $\det(zA+B)=0$. Предельные теоремы для спектральных функций $\mu_n(x)$ от некоторых случайных матриц A и B рассматривались в работах [101—103,

106—107]. В настоящем параграфе предложен новый метод доказательства предельных теорем для спектральных функций $\mu_n(x)$, основанный на использовании преобразований Стилтьеса, методов регуляризации и аналитических продолжений преобразований Стилтьеса, предельных теорем для случайных детерминантов, а также функциональных нелинейных уравнений для предельных преобразований Стилтьеса. Получено утверждение, которое обобщает соответствующие результаты, полученные в работах [101—103, 106, 107].

Теорема 23.1. Пусть элементы случайных матриц

$$A=(\xi_{ij}^{(m)}),\quad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,p_m,$$
$$B=(\eta_{ij}^{(m)}),\quad i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,q_m,$$

для каждого значения n независимы, заданы на одном вероятностном пространстве, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(m)}=\mathbf{M}\eta_{ij}^{(m)}=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(m)}=\mathbf{D}\eta_{ij}^{(m)}=1$,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m}{m}=c_1,\quad \lim_{m\to\infty}\frac{q_m}{m}=c_2,\quad c_1+c_2>1, \tag{23.1}$$

$\mu_m(x)$ — нормированные спектральные функции пучка случайных матриц AA' и BB' и выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau>0$

$$\lim_{m\to\infty} m^{-2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{p_m}\mathbf{M}\,[\xi_{ij}^{(m)}]^2\chi(|\xi_{ij}^{(m)}|\,m^{-1/2}>\tau)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{q_m}\mathbf{M}\,[\eta_{ij}^{(m)}]^2\chi\,(|\eta_{ij}^{(m)}|\,m^{-1/2}>\tau)\right\}=0. \tag{23.2}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{m\to\infty}\mu_m(x)=\mu_1(x)+\mu_2(x),\quad \mu_1'(x)=\delta(x)(1-c_2)\,\chi(c_2<1),$$

где

$$\mu_2'(x)=\begin{cases}[2\pi x(1+x)]^{-1}[4x(c_1-1+c_2)-(x(1-c_1)+c_2-1)^2]^{1/2},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma_1\leqslant x\leqslant\gamma_2,\\ 0,\quad x\notin[\gamma_1,\gamma_2],\end{cases} \tag{23.3}$$

$$\gamma_{1,2}=\left[\sqrt{c_1+c_2-1}\pm\sqrt{c_1c_2}\right]^2(c_1-1)^{-2},\ \text{при}\ c_1\neq1,$$

$$\mu_2'(x)=\begin{cases}[2\pi x(1+x)]^{-1}[4xc_2-(c_2-1)^2]^{1/2}, & x\geqslant(4c_2)^{-1}(c_2-1)^2,\\ 0,\quad 0<x<(4c_2)^{-1}(c_2-1)^2,\end{cases}$$

при $c_1=1$,

$$\mu'(x)=0\quad\text{при}\ c_1=0,$$

$\delta(x)$ — δ-функция.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Стилтьеса

$$\int_0^\infty (t+x)^{-1}\,d\mu_m(x)=m^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m^{-1}AA'\,[AA'm^{-1}t+m^{-1}BB']^{-1},\quad (23.4)$$

$$t>0.$$

Очевидно, что для любого $\alpha>0$

$$|\,m^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m^{-1}AA'\,[m^{-1}AA't+m^{-1}BB']^{-1}-$$
$$-m^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m^{-1}AA'\,[m^{-1}AA't+m^{-1}BB'+I\alpha]^{-1}\,|\leqslant$$
$$\leqslant t^{-1}m^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha+m^{-1}AA't+m^{-1}BB')^{-1}\,\alpha.\quad (23.5)$$

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 23.1. Если выполняются условия теоремы, то для любых $\alpha>0$, $t>0$

$$\lim_{m\to\infty} m^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha+m^{-1}AA't+m^{-1}BB')^{-1}=a(t,\alpha),\quad (23.6)$$

где $a(t,\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$a(t,\alpha)=\left[\alpha+\frac{c_1 t}{1+ta(t,\alpha)}+\frac{c_2}{1+a(t,\alpha)}\right]^{-1},\quad (23.7)$$

решение уравнения (23.7) существует и единственно в классе аналитических функций по переменной t, $t>0$.

Доказательство. Введем обозначения $\nu_{ij}=\sqrt{t}\,\xi_{ij}^{(m)}m^{-1/2}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,p_m$, $\nu_{ij}=\eta_{ij}^{(m)}m^{-1/2}$, $i=1,\ldots,m$, $j=p_m+1,\ldots,p_m+q_m$, $C=(\nu_{ij})$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,p_m+q_m$. Используя формулу

$$\det T_n=\det T_{n-1}(a_{11}-(T_{n-1}^{-1}a_1,\,b_1)),\quad (23.8)$$

где $T_n=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ — невырожденные матрицы, $a_1=(a_{12},\ldots,a_{1n})$, $b_1=(a_{21},\ldots,a_{n1})$, имеем

$$m^{-1}\,\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha+CC')^{-1}=m^{-1}\sum_{k=1}^m \mathbf{M}\,[\alpha+(d_k,d_k)-(C_k'R_kC_kd_k,\,d_k)]^{-1}=$$
$$=m^{-1}\sum_{k=1}^m \mathbf{M}\left[\alpha+\sum_{l=1}^{p_m+q_m}\mathbf{M}\nu_{kl}^2-\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{p_m+q_m}\nu_{kl}^2\left(\sum_{i,j=1}^m r_{ij}^k\nu_{il}\nu_{jl}\right)+\varepsilon_k^{(m)}\right]^{-1},\quad (23.9)$$

где $d_k=(\nu_{k1},\ldots,\nu_{k(p_m+q_m)})$ — k-ая вектор-строка матрицы C, C_k — матрица, полученная из матрицы C вычеркиванием k-ой строки,

$$R_k=(I\alpha+C_kC_k')^{-1}=(r_{ij}^k)_{i,j=1}^m,$$

$$\varepsilon_k^{(m)}=\sum_{l=1}^{p_m+q_m}(\nu_{kl}^2-\mathbf{M}\nu_{kl}^2)-(C_k'R_kC_kd_k,\,d_k)+\sum_{l=1}^{p_m+q_m}\nu_{kl}^2\left(\sum_{i,j\neq k}r_{ij}^k\nu_{il}\nu_{jl}\right).$$

Далее доказательство леммы совпадает с доказательством теоремы 3.2.9. (см. [20, стр. 261]), за исключением некоторых тривиальных изменений. Так же как и при доказательстве формулы (3.2.53) [32, стр. 265], получаем

$$\mathbf{M}m^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+CC')^{-1}=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha+\sum_{l=1}^{p_m+q_m}\mathbf{M}\nu_{kl}^{2}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=1}^{m}\mathbf{M}r_{ll}\mathbf{M}\nu_{il}^{2}\right)^{-1}\right]^{-1}+o(1), \qquad (23.10)$$

где r_{ll} — элементы матрицы $(I\alpha+CC')^{-1}$. Из формулы (23.10) получаем

$$a_m(t,\alpha)=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\left[\alpha+\sum_{l=1}^{p_m}\frac{t}{m}\left(1+\frac{t}{m}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{M}r_{ll}\right)^{-1}+\right.$$

$$\left.+m^{-1}\sum_{l=p_m+1}^{p_m+q_m}\left(1+m^{-1}\sum_{l=1}^{m}\mathbf{M}r_{ll}\right)^{-1}\right]^{-1}+o(1), \qquad (23.11)$$

где $a_m(t,\alpha)=\mathbf{M}m^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+CC')^{-1}$. Из (23.11) имеем

$$a_m(t,\alpha)=[\alpha+c_1t(1+ta_m(t,\alpha))^{-1}+c_2(1+a_m(t,\alpha))^{-1}]^{-1}, \qquad (23.12)$$

используя уравнение (23.11), легко установить, что существует предел $\lim\limits_{m\to\infty}a_m(t,\alpha)=a(t,\alpha)$, и функция $a(t,\alpha)$ является единственным решением уравнения (23.7).

Лемма 23.2. При выполнении условий теоремы с вероятностью 1 при $\alpha>0$, $t>0$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{m\to\infty}\alpha m^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+CC')^{-1}=0, \qquad (23.13)$$

$$\lim_{m\to\infty}m^{-1}\operatorname{Sp}m^{-1}AA'(m^{-1}tAA'+m^{-1}BB'+I\alpha)^{-1}=$$

$$=\int_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a(t,x)\,dx. \qquad (23.14)$$

Доказательство. Используя доказательство теоремы 3.1.8 [20, стр. 174] или теоремы 10.1.1. [32, стр. 253], а также лемму 1, получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha>0$, $t\geqslant 0$

$$\lim_{m\to\infty}m^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+m^{-1}tAA'+m^{-1}BB')^{-1}=a(t,\alpha). \qquad (23.15)$$

Из уравнения (23.7) находим, что функция $\alpha a(t,\alpha)$ является решением алгебраического уравнения 3-й степени:

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \qquad (23.16)$$

где

$$a=t^{-1}(1+t)\alpha+c_1+c_2-1,\quad b=\alpha^2t^{-1}+(c_2-1)\alpha t^{-1}+c_1\alpha-\alpha,$$
$$c=-\alpha^2t^{-1}.$$

Переходя в уравнении (23.16) к пределу при $\alpha\downarrow 0$ и используя (23.15), получаем, что при условии $c_1+c_2>1$, $t>0$ $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\alpha a(t,\alpha)=0$. Следовательно, справедливо (23.13). Очевидно, что

$$m^{-1}\operatorname{Sp} m^{-1}AA'(m^{-1}tAA'+m^{-1}BB'+I\alpha)^{-1}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\ln\det\left[\frac{AA't}{m}+\frac{BB'}{m}+I\alpha\right]. \tag{23.17}$$

Используя формулу (23.17) и доказательство теоремы 10.1.1. [32, стр. 253], получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha>0$, $t\geqslant 0$ при выполнении условий теоремы

$$\lim_{m\to\infty}\left\{m^{-1}\operatorname{Sp}\frac{AA'}{m}\left(\frac{AA't+BB'}{m}+I\alpha\right)^{-1}-\right.$$
$$\left.-m^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\ln\det\left[\frac{AA't+BB'}{m}+I\alpha\right]\right\}=0. \tag{23.18}$$

Используя лемму 23.1, получаем

$$\lim_{m\to\infty} m^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\ln\det\left[\frac{AA't+BB'}{m}+I\alpha\right]=$$
$$=\lim_{\beta\to\infty}\lim_{m\to\infty}m^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\int_\beta^\alpha \mathbf{M}\operatorname{Sp}\left[Ix+\frac{AA't+BB'}{m}\right]^{-1}dx=$$
$$=\lim_{\beta\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_\beta^\alpha a(t,x)\,dx. \tag{23.19}$$

Таким образом, справедливо (23.14). Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, из неравенства (23.5) и равенства (23.4) находим, что с вероятностью 1 так же как и при доказательстве теоремы 9.2.4. [32, стр. 228]

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{\beta\to\infty}\limsup_{m\to\infty}\sup_{t>0}\left|\int_0^\infty(t+x)^{-1}d\mu_m(x)-\frac{\partial}{\partial t}\int_\beta^\alpha a(t,x)\,dx\right|=0. \tag{23.20}$$

Лемма 3.

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_\beta^\alpha a(t,x)\,dx=-\frac{c_1a(t,0)}{1+ta(t,0)}, \tag{23.21}$$

где

$$a(t,0)=2\left[t(c_1-1)+c_2-1+((t(c_1-1)+c_2-1)^2+\right.$$
$$\left.+4t(c_1+c_2-1))^{1/2}\right]^{-1}.$$

Доказательство. В интеграле

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\beta}^{\alpha} a(t, x)\, dx$$

сделаем замену переменных

$$x = y^{-1} - c_1 t (1 + ty)^{-1} - c_2 (1 + y)^{-1}, \quad y > 0.$$

Тогда

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)} y \frac{d}{dy} [y^{-1} - c_1 t (1 + ty)^{-1} - c_2 (1 + y)^{-1}]\, dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} y \left[\frac{1}{y} - \frac{c_1 t}{1 + ty} - \frac{c_2}{1 + y} \right] \Bigg|_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)} \left[\frac{1}{y} - \frac{c_1 t}{1 + ty} - \frac{c_2}{1 + y} \right] dy. \tag{23.22}$$

Учитывая, что

$$a^{-1}(t, \alpha) - c_1 t (1 + t a(t, \alpha))^{-1} - c_2 (1 + a(t, \alpha))^{-1} = \alpha,$$

из (23.22) находим

$$f(\alpha, \beta) = c_1 t^{-1} \left[\frac{1}{1 + t a(t, \alpha)} - \frac{1}{1 + t a(t, \beta)} \right].$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$, получаем (23.21). Лемма 3 доказана. Так как функция $a(t, 0)$ является аналитической при $t > 0$ и из соотношения (23.20) следует, что функции $\mu_m(x)$ с вероятностью 1 сходятся к предельной неслучайной функции $\mu(x)$, то для функции $\mu(x)$, аналитически продолжая функцию $-c_1 a(t, 0)[1 + t a(t, 0)]^{-1}$ на всю комплексную плоскость, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x - z} = -\frac{c_1 a(-z, 0)}{1 - z a(-z, 0)}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{23.23}$$

По формуле обращения для преобразования Стилтьеса из (23.23) находим, что

$$\mu(x_1) - \mu(x_2) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{x_2}^{x_1} \operatorname{Im} \frac{c_1 a(-x - i\varepsilon, 0)}{1 - (x + i\varepsilon) a(-x - i\varepsilon, 0)} dx. \tag{23.24}$$

Обозначим $a(-z, 0) = \varphi(z)$. Тогда

$$\varphi(z) = \left[-\frac{c_1 z}{1 - z\varphi(z)} + \frac{c_2}{1 + \varphi(z)} \right]^{-1},$$

$$\varphi(z) = 2[-z(c_1 - 1) + c_2 - 1 \pm \{[-z(c_1 - 1) + c_2 - 1]^2 -$$
$$- 4z[c_1 + c_2 - 1]\}^{1/2}]^{-1}.$$

Итак,

$$\int_0^\infty (x-z)^{-1}\,d\mu(x) = -2c_1[-z(c_1+1)+c_2-1\pm$$
$$\pm\{[-z(c_1-1)+c_2-1]^2-4z[c_1-1+c_2]\}^{1/2}]^{-1}.$$

Используя формулу (23.24), получаем (23.3). Теорема 23.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов А. А.*, Об ошибке округлений при решении систем линейных уравнений. Докл. АН СССР, 1954, *97*, № 2, 189—191 (РЖМат, 1955, 6107)
2. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.*, Прикладная статистика. Исследование зависимостей. Справ. изд. М.: Финансы и стат., 1985, 487 с. (РЖМат, 1985, 6В438К)
3. *Андерсон Т.*, Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963, 500 с. (РЖМат, 1964, 1В109К)
4. *Березин Ф. А.*, Несколько замечаний о распределении Вигнера. Теор. и мат. физ., 1973, *17*, № 3, 305—318 (РЖМат, 1974, 4Б890)
5. *Вейль А.*, Интегрирование в топологических группах и его применения. М., Изд-во ин. лит., 1950, 223 с.
6. *Виноградская А. В., Гирко В. Л.*, Управление спектром в системах, описываемых линейными уравнениями в гильбертовых пространствах. Автомат. и телемех., 1983, № 5, 46—54 (РЖМат, 1983, 9Б679)
7. *Владимиров В. С., Волович И. В.*, Суперанализ. II. Интегральное исчисление. Теор. и мат. физ., 1984, *60*, № 2, 169—198 (РЖМат, 1985, 2Б1060)
8. *Воеводин В. В.*, Об асимптотическом распределении ошибок округления при разложении матрицы на множители и решении систем уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, *9*, № 4, 932—934 (РЖМат, 1969, 12Б785)
9. —, Об асимптотическом распределении ошибок округления при линейных преобразованиях. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, *7*, № 5, 965—976 (РЖМат, 1968, 3Б723)
10. *Генденштейн Л. Э., Криве И. В.*, Суперсимметрия в квантовой механике. Успехи физ. наук, 1985, *146*, № 4, 553—590
11. *Гирко В. Л.*, О распределении решений систем линейных уравнений со случайными коэффициентами. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, № 2, 41—44 (РЖМат, 1971, 3В13)
12. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, № 5, 27—33 (РЖМат, 1971, 11В61)
13. —, О неравенствах для случайных детерминанта и перманента. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, № 4, 48—57 (РЖМат, 1971, 12В40)
14. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, № 6, 41—48 (РЖМат, 1972, 8В30)
15. —, Уточнение некоторых теорем для случайных детерминанта и перманента. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, № 7, 28—32 (РЖМат, 1973, 1В42)
16. —, Предельные теоремы для решений систем линейных случайных уравнений, собственных чисел и детерминантов случайных матриц. Докл. АН СССР, 1973, *212*, № 5, 1039—1042 (РЖМат, 1974, 2В33)

17. —, Предельные теоремы для случайного детерминанта. III. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1973, № 8, 28—34 (РЖМат, 1973, 12В44)
18. —, Предельные теоремы для детерминантов доминантных случайных матриц. Вычисл. и прикл. мат. Межвед. науч. сб., 1973, № 19, 130—136 (РЖМат, 1973, 9В15)
19. —, Случайные матрицы Якоби. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1975, № 12, 25—35 (РЖМат, 1975, 9В28)
20. —, Случайные матрицы. Киев, Вища школа, 1975. 448 с. (РЖМат, 1975, 9В25К)
21. —, Предельные теоремы общего вида для спектральных функций случайных матриц. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 1, 160—164 (РЖМат, 1977, 8В38)
22. —, Закон арктангенса. Тезисы Международной конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1977, 96—97
23. —, Предельные теоремы общего вида для нормированных спектральных функций симметричных случайных матриц. Предельн. теоремы для случайн. процессов, Киев, 1977, 50—70 (РЖМат, 1978, 10В30)
24. —, Стохастическая проблема Ляпунова. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 20, 42—44 (РЖМат, 1979, 6В339)
25. —, Логарифмический закон. Докл. АН УССР, 1979, *А*, № 4, 243—244 (РЖМат, 1979, 9В16)
26. —, Полукруговой закон Вигнера. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 20, 39—42 (РЖМат, 1979, 6В341)
27. —, Моменты обратных случайных матриц. Исслед. операций и АСУ, (Киев), 1979, № 14, 127—130 (РЖМат, 1980, 1В519)
28. —, Распределение собственных чисел и собственных векторов эрмитовых случайных матриц. Укр. мат. ж., 1979, *31*, № 5, 533—537 (РЖМат, 1980, 2В460)
29. —, О центральной предельной теореме для случайных детерминантов. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1979, № 21, 35—39 (РЖМат, 1980, 2В30)
30. —, О единственности решения канонического спектрального уравнения. Укр. мат. ж., 1980, *32*, № 6, 802—804 (РЖМат, 1981, 6В17)
31. —, Полярное разложение случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1980, № 23, 20—30 (РЖМат, 1981, 3В16)
32. —, Теория случайных детерминантов. Киев, Вища школа, 1980. 368 с. (РЖМат, 1980, 7В264К)
33. —, Собственные числа случайных матриц. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1974, № 11, 10—16 (РЖМат, 1974, 11В39)
34. —, Системы линейных случайных алгебраических уравнений. В сб. «Моделир. и оптимиз. систем упр.» Киев, Вища школа, 1974, 70—77 (РЖМат, 1975, 9В27)
35. —, О нормированных спектральных функциях случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1980, № 22, 29—33 (РЖМат, 1980, 7В20)
36. —, Гипотеза Е. Вигнера. Вычисл. и прикл. мат. (Киев), 1980, № 41, 71—79 (РЖМат, 1980, 12Б1060)
37. —, Распределение собственных чисел и векторов унитарных случайных матриц. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1981, № 25, 14—17 (РЖМат, 1981, 11В17)
38. —, Центральная предельная теорема для случайных детерминантов. Теория вероятностей и ее применения, 1981, *26*, № 3, 532—542 (РЖМат, 1982, 1В30)
39. —, Собственные числа случайных матриц. II. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1982, № 27, 27—28 (РЖМат, 1982, 7В23)
40. —, *V*-преобразование. Докл. АН УССР, 1982, *А*, № 3, 5—6 (РЖМат, 1982, 8В17)
41. —, О круговом законе. Теория вероятностей и мат. стат. (Киев), 1983, № 28, 15—21 (РЖМат, 1983, 7В27)

42. —, Предельные теоремы для функций случайных величин. Киев, Вища школа, 1983, 207 с. (РЖМат, 1984, 1В1К)
43. —, Круговой закон. Теория вероятностей и ее применения, 1984, *29*, № 4, 669—679 (РЖМат, 1985, 7В40)
44. —, «Борьба с размерностью» в многомерном статистическом анализе. Тезисы третьей Всесоюзной научно-технической конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценки качества продукции». Тарту, 1985, 43—52
45. —, Эллиптический закон. Докл. АН УССР, 1985, *А*, № 1, 56—59 (РЖМат, 1985, 8В28)
46. —, *Васильев В. В.*, Предельные теоремы для нормированных спектральных функций несамосопряженных случайных матриц Якоби. Теория вероятностей и ее применения, 1985, *30*, № 1, 3—9 (РЖМат, 1985, 8В27)
47. —, *Кокобинадзе Т. С.*, *Чайка О. Г.*, Распределение собственных чисел гауссовских случайных матриц. Укр. мат. ж., 1984, *36*, № 1, 12—16 (РЖМат, 1984, 8В8)
48. —, *Литвин И. Н.*, Стохастическое условие Калмана. Вычисл. и прикл. мат. (Киев), 1983, № 49, 135—138 (РЖМат, 1983, 10В14)
49. —, —, Интегральное представление гиперопределителей и его применение к исследованию устойчивости стохастических систем. Управляемые динамические системы с непрерывно-дискретными параметрами. Киев, Наукова Думка, 1984, 97—102
50. *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.*, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965, 448 с. (РЖМат, 1966, 8Б459К)
51. *Гренандер У.*, Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965, 275 с. (РЖМат, 1966, 3В2К)
52. *Дайсон Ф.*, Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. М., Изд-во ин. лит., 1963, 123 с.
53. *Деев А. Д.*, Представление статистик дискриминантного анализа и асимптотические разложения при размерностях пространства, сравнимых с объемом выборок. Докл. АН СССР, 1970, *195*, № 4, 759—762 (РЖМат, 1971, 4В165)
54. *Журбенко И. Г.*, Некоторые моменты случайных определителей. Теория вероятностей и ее применения, 1968, *13*, № 4, 720—725 (РЖМат, 1969, 8В10)
55. *Заруцкий В. И.*, Классификация нормальных векторов простой структуры в пространстве большой размерности. Прикл. многомерн. стат. анализ. М., 1978, 37—51 (РЖМат, 1979, 7В213)
56. *Калмэн Р. Е.*, Об общей теории систем управления. Труды I конгресса ИФАК, Т. 2. М., АН СССР, 1961, 521—547 (РЖМат, 1961, 6Б294К)
57. *Кац М.*, Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965, 407 с.
58. *Лифшиц И. М.*, О структуре энергетического спектра и квантовых состояниях неупорядоченных конденсированных систем. Успехи физ. наук, 1963, *83*, 617—655
59. *Марадудин А.*, Дефекты и колебательный спектр кристаллов. М.: Мир, 1968, 432 с.
60. —, *Монтролл Э.*, *Вейс Д.*, Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. М.: Мир, 1965, 383 с.
61. *Марченко В. А.*, *Пастур Л. А.*, Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. Мат. сб., 1967, *72*, № 4, 507—536 (РЖМат, 1969, 3Б491)
62. *Мешалкин Л. Д.*, *Сердобольский В. И.*, Ошибки при классификации многомерных наблюдений. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 4, 772—781 (РЖМат, 1979, 4В159)
63. *Молчанов С. А.*, Строение собственных функций одномерных неупорядоченных структур. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, *42*, № 1, 70—103 (РЖМат, 1978, 6В239)

64. *Мотт Н.*, Электроны в неупорядоченных структурах. М.: Мир, 1969, 172 с.
65. —, *Дэвис Э.*, Электронные процессы в некристаллических веществах. М.: Мир, 1974, 472 с.
66. *Мурнаган Ф.*, Теория представлений групп. М., Изд-во ин. лит., 1950, 485 с.
67. *Пастур Л. А.*, Спектры случайных самосопряженных операторов. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 1, 3—64 (РЖМат, 1973, 5В46)
68. —, О спектре случайных матриц. Теор. и мат. физ., 1972, *10*, № 1, 102—112 (РЖМат, 1972, 7В192)
69. *Рофе-Бекетов Ф. С.*, О предельном распределении собственных частот неупорядоченной цепочки. Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. Харьковск. ун-та и Харьковск. о-ва, 1960, *26*, сер. 4, 143—153 (РМат, 1963, 12В249)
70. *Сластников А. Д.*, О распределении некоторых случайных определителей. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 4, 888—896 (РЖМат, 1978, 5В131)
71. *Уилкс С.*, Математическая статистика. М.: Наука, 1967, 632 с. (РЖМат, 1968, 5В111К)
72. *Хахубия Ц. Г.*, Одна лемма о случайных определителях и ее применение к характеризации многомерных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1965, *10*, № 4, 755—758 (РЖМат, 1966, 3В87)
73. *Хеннан Э.*, Представления групп и прикладная теория вероятностей. М.: Мир, 1970, 118 с. (РЖМат, 1970, 12В112К)
74. *Хуа Ло-ген*, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М., Изд-во ин. лит., 1959, 163 с. (РЖМат, 1962, 6Б166К)
75. *Шубин Н. Ю.*, Статистические методы в теории ядра. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1974, *5*, вып. 4, 1023—1074
76. *Эрдёш П.*, Некоторые нерешенные проблемы. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, *7*, № 4, 109—143 (РЖМат, 1964, 1А16)
77. *Юдицкий М. И.*, О свойствах оценки наименьших квадратов для одного класса моделей регрессии. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1977, № 17, 153—162 (РЖМат, 1977, 9В214)
78. *Anderson G. A.*, An asymptotic expansion for the noncentral Wishart distribution. Ann. Math. Statist., 1970, *41*, № 5, 1700—1707 (РЖМат, 1971, 12В244)
79. *Arnold L.*, On Wigner's semicircle law for the eigenvalues of random matrices. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, *19*, № 3, 191—198 (РЖМат, 1972, 1В37)
80. —, On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices. J. Math. Anal. and Appl., 1960, *20*, 262—268
81. *Bagai O. P.*, The distribution of the generalized variance. Ann. Math. Statist., 1965, *36*, № 1, 120—130 (РЖМат, 1965, 10В53)
82. *Bellman R. E.*, A note on the mean value of random determinants. Quart. Appl. Math., 1955, *13*, № 3, 322—324 (РЖМат, 1958, 4495)
83. *Bennett B. M.*, On the cumulants of the logarithmic generalized variance and variance ratio. Skand. Aktuarietidskr., 1955, *38*, № 1—2, 17—21 (РЖМат, 1956, 8981)
84. *Bharucha-Reid A. T.*, Probabilistic methods in applied mathematics. V. 2. New York — London, Acad. Press, 1970
85. —, On the theory of random equations. Stochastic Processes Math. Phys. and Engng. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 1964, 40—69 (РЖМат, 1973, 8В279)
86. *Chandra P. C.*, Distribution of the determinant of the sum of products matrix in the non-central linear case. Math. Nachr., 1965, *28*, № 3—4, 169—179
87. *Dyson F. J.*, The dynamics of a disordered linear chain. Phys. Rev., 1953, *92*, № 6, 1331—1338 (РЖМат, 1955, 331)
88. *Fabian V.*, Zufälliges Abrunden und die Konvergenz des linearen (Seidelschen) Iterationsverfahrens. Math. Nachr., 1957, *16*, № 5—6, 265—270 (РЖМат, 1958, 7203)

89. *Fortet R.*, Random determinants. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1951, *47*, 465—470
90. *Goodman N. R.*, The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 1, 178—180 (РЖМат, 1964, 6В124)
91. *James A. T.*, The non-central Wishart distribution. Proc. Roy. Soc., 1955, *A229*, № 1178, 364—366 (РЖМат, 1956, 8203)
92. *Komlós J.*, On the determinant of random matrices. Stud. sci. math. hung., 1968, *3*, № 4, 387—399 (РЖМат, 1969, 11В31)
93. —, On the determinant of (0, 1) matrices. Stud. sci. math. hung., 1967, *2*, № 1—2, 7—21 (РЖМат, 1967, 11А277)
94. *Mehta M. L.*, Random matrices and the statistical theory of energy levels. New York — London, Acad. Press, 1967, 260 p.
95. *Nicholson W. L.*, On the distribution of 2×2 random normal determinants. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 2, 575—580 (РЖМат, 1959, 9309)
96. *Nyquist H., Rice S. O., Riordan J.*, The distribution of random determinants. Quart. Appl. Math., 1954, *12*, № 2, 97—104 (РЖМат, 1955, 3859)
97. *Porter C. E.*, Statistical theories of spectra. Fluctuations. New York — London, Acad. Press, 1965, 578 p.
98. *Prékopa A.*, On random determinants. I. Stud. sci. math. hung., 1967, *2*, № 1—2, 125—132 (РЖМат, 1967, 10В4)
99. *Schmidt H.*, Disordered one-dimensional crystals. Phys. Rev., 1957, *105*, № 2, 425—441
100. *Selberg A. A.*, Bemerkninger om et multiplet integral. Norsk mat. tidsskr., 1944, *26*, 71—78
101. *Silverstein J. W.*, Comments on a result of Yin, Bai, and Krishnaiah for large dimensional multivariate *F* matrices. J. Multivar. Anal., 1984, *15*, № 3, 408—409 (РЖМат, 1985, 7В42)
102. *Wachter K. W.*, The strong limits of random matrix spectra for sample matrices of independent elements. Ann. Probab., 1978, *6*, № 1, 1—18 (РЖМат, 1978, 10В29)
103. —, The limiting empirical measure of multiple discriminant ratios. Ann. Statist., 1980, *8*, № 5, 937—957 (РЖМат, 1981, 5В197)
104. *Wigner E. P.*, On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Ann. Math., 1968, *67*, № 2, 325—327
105. —, Random matrices in physics. SIAM Rev., 1967, *9*, № 1, 1—23 (РЖМат, 1968, 7В149)
106. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.*, Limiting behavior of the eigenvalues of a multivariate *F* matrix. J. Multivar. Anal., 1983, *13*, № 4, 508—516 (РЖМат, 1984, 6В30)
107. —, *Krishnaiah P. R.*, A limit theorem for the eigenvalues of product of two random matrices. J. Multivar. Anal., 1983, *13*, № 4, 489—507 (РЖМат, 1984, 6В29)