



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. О. Кузнецов, О свойствах конформного радиуса области,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2001, том 276, 237–252

<https://www.mathnet.ru/zns11419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

21 мая 2025 г., 02:37:52



В. О. Кузнецов

О СВОЙСТВАХ КОНФОРМНОГО РАДИУСА ОБЛАСТИ

Конформный радиус односвязной области D относительно точки $z \in D$ будем обозначать через $\mathcal{R}(D, z)$. Если $\infty \in D$, то полагаем $\mathcal{R}(D, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(\{z: z^{-1} \in D\}, 0)$. Для удобства изложения функцию $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$ будем продолжать по непрерывности в \mathbb{C} , полагая $\mathcal{R}(D, z) = 0$ для $z \notin D$. Если $\mathcal{R}(D, z_0) = \sup_{z \in D} \mathcal{R}(D, z) = \rho$, то точку z_0 будем называть конформным центром области D , а величину ρ – максимальным конформным радиусом области D и обозначать через $\mathring{R}(D)$.

Понятие конформного радиуса односвязной области представляет собой одно из основных понятий теории конформных отображений, в терминах которого формулируются многие классические результаты геометрической теории функций. Однако зависимость величины конформного радиуса $\mathcal{R}(D, z)$ от положения точки z в области D до последнего времени была сравнительно мало изучена. Некоторые свойства функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$, конформного центра и максимального конформного радиуса установлены в [1, 2].

В недавних работах Е. Г. Емельянова [3] и Л. В. Ковалева [4] получены точные неравенства для разности значений конформного радиуса в двух точках области, расположенной на конечной плоскости. Настоящая работа продолжает исследования в [2–4] и посвящена изучению зависимости между значениями функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$ в различных точках области и некоторым смежным вопросам. Теорема 1 §1 дает точную оценку конформного радиуса произвольной односвязной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки z через конформные радиусы этой области относительно двух других точек. В теореме 2 устанавливается связь конформного радиуса области с положением её конформного центра и наибольшим конформным радиусом. В §2 приводятся аналогичные результаты для выпуклых областей.

В дальнейшем для функции $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta^{-1} + \dots$, регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки, полагаем $f'(\infty) = -\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\zeta^2 f'(\zeta)] = a_1$. Через $\text{cap} E$ обозначаем логарифмическую емкость замкнутого ограниченного множества E . Будем использовать также следующие обозначения:

M – класс мероморфных и однолистных в круге $U = \{|\zeta| < 1\}$ функций $f(\zeta)$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$;

S – класс функций $f(\zeta) \in M$, регулярных в круге U ;

S^c – класс функций $f(\zeta) \in S$, отображающих круг U на выпуклые области;

Σ – класс функций $f(\zeta) = \zeta + a_0 + a_1\zeta^{-1} + \dots$, мероморфных и однолистных в области $\{|\zeta| > 1\}$.

§1. Свойства конформного радиуса произвольной односвязной области

1. Пусть a и b – различные точки на замыкании $\overline{\mathbb{R}}$ вещественной оси \mathbb{R} . Через $\langle a, b \rangle$ будем обозначать ту из лежащих на $\overline{\mathbb{R}}$ дуг с концами в точках a и b , которая проходится “слева направо” при движении от точки a к точке b . Таким образом, $\langle a, b \rangle = (a, b)$ при $a < b$, $\langle a, b \rangle = (a, +\infty) \cup \{\infty\} \cup (-\infty, b)$ при $a > b$, $\langle a, \infty \rangle = (a, +\infty)$, $\langle \infty, b \rangle = (-\infty, b)$. Пусть $D(a, b) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \langle b, a \rangle$. Семейство областей $D(a, b)$, где a и b – всевозможные различные точки $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим через \mathcal{D} .

Теорема 1. Пусть D – односвязная область на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{R}(D, 0) = r$, $\mathcal{R}(D, 1) = R$. Пусть

$$P_1(x) = r(1-x)^2 + Rx^2 - 2x(1-x)\sqrt{4+rR}, \quad P_1(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} r+R+2\sqrt{4+rR},$$

$$P_2(x) = r(1-x)^2 + Rx^2 + 2x(1-x)\sqrt{4+rR}, \quad P_2(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} r+R-2\sqrt{4+rR},$$

и пусть

$$a_1 = \frac{2-r+\sqrt{4+rR}}{4+R-r}, \quad b_1 = \frac{2+r-\sqrt{4+rR}}{4+r-R}, \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{2-r-\sqrt{4+rR}}{4+R-r}, \quad b_2 = \frac{2+r+\sqrt{4+rR}}{4+r-R} \quad (2)$$

– нули многочленов $P_1(z)$ и $P_2(x)$, соответственно. Тогда $\langle a_2, b_2 \rangle \setminus [b_1, a_1] \subset D$. Имеют место неравенства

$$P_1(x) \leq \mathcal{R}(D, x) \leq P_2(x) \quad \text{при } x \in (0, 1), \quad (3)$$

$$P_1(x) \geq \mathcal{R}(D, x) \geq P_2(x) \text{ при } x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]. \quad (4)$$

Равенство в левых частях неравенств (3) и (4) имеет место только в случае $D = D(a_1, b_1)$ и $x \in \overline{\langle a_1, b_1 \rangle}$. Равенство в правых частях этих неравенств имеет место только в случае $D = D(a_2, b_2)$ и $x \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle}$.

Замечание. Левая часть неравенства (3) и правая часть неравенства (4) формально справедливы и для тех x , для которых $P_1(x) < 0$ или $P_2(x) < 0$. В этом случае, как показывает анализ теоремы, существуют области, удовлетворяющие условиям теоремы 1, но не содержащие точки x .

Доказательство. Пусть $x \in (-\infty, \infty) \cap D$, $\rho = \rho(x) = \mathcal{R}(D, x)$. Существует функция $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \dots \in M$ такая, что функция $\rho f(\zeta) + x$ отображает круг U на область D . При всех достаточно малых z имеем

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) &= \frac{z}{\rho} - c_2\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + o(z^2), \\ \mathcal{R}(D, x+z) &= \rho\left(1 - \left|f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)\right|^2\right) \left|f'\left(f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)\right)\right| = \\ &= \rho\left(1 - \left|\frac{z}{\rho}\right|^2\right) \left|1 + 2c_2\left(\frac{z}{\rho} - c_2\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right) + 3c_3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right| + o(z^2) = \\ &= \rho\left[1 + \frac{2\operatorname{Re}(c_2z)}{\rho} + \frac{\operatorname{Re}[(3c_3 - 2c_2^2)z^2] + 2(\operatorname{Im}c_2z)^2 - |z|^2}{\rho^2}\right] + o(z^2) = \\ &= \rho + 2\operatorname{Re}(c_2z) + \frac{3\operatorname{Re}[(c_3 - c_2^2)z^2] + (|c_2|^2 - 1)|z|^2}{\rho} + o(z^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно,

$$\rho' = \rho'(x) = 2\operatorname{Re}c_2, \quad \rho'' = \rho''(x) = 2\frac{3\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) + |c_2|^2 - 1}{\rho}. \quad (6)$$

Поскольку $f \in M$, то $(f(\zeta^{-1}))^{-1} = \zeta - c_2 - (c_3 - c_2^2)\zeta^{-1} + \dots \in \Sigma$ и, в силу известной оценки для класса Σ (см., например, [5]), $\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) \geq -1$. Так как $|c_2|^2 \geq \frac{1}{4}(\rho')^2$, то из (6) получаем

$$\rho'' \geq \frac{(\rho')^2}{2\rho} - \frac{8}{\rho}. \quad (7)$$

Это неравенство справедливо при всех вещественных $x \in D$. Равенство в этом неравенстве достигается только при $\text{Im}c_2 = 0$ и $\text{Re}(c_3 - c_2^2) = -1$, что имеет место только в случае $D \in \mathcal{D}$.

Докажем сначала утверждения теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4). Если $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, то

$$\mathcal{R}(D(\alpha, \beta), x) = \left| \frac{4(x - \beta)(x - \alpha)}{\beta - \alpha} \right|.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение $a = a(r, R)$, $b = b(r, R)$ системы

$$\mathcal{R}(D(a, b), 0) = r, \quad \mathcal{R}(D(a, b), 1) = R, \quad (0, 1) \subset \langle a, b \rangle,$$

единственно и дается равенствами (2). Выражая $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D(a_2, b_2)x)$ через r и R , находим, что $\rho_0(x) = P_2(x)$ при $x \in \langle a_2, b_2 \rangle$ и $\rho_0(x) = 0$ при $x \notin \langle a_2, b_2 \rangle$.

Заметим, что функция $\rho_0(x)$ при всех $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \setminus \{\infty\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'' = \frac{(\rho')^2}{2\rho} - \frac{8}{\rho},$$

а для функции $\rho(x)$, соответствующей области $D \notin \mathcal{D}$, при любом вещественном $x \in D$ в (7) имеет место строгое неравенство. Сделаем в (7) замену переменной $s = \sqrt{\rho}$, убеждаемся, что функции $s(x) = \sqrt{\rho(x)}$ и $s_0(x) = \sqrt{\rho_0(x)}$ удовлетворяют условиям

$$s''(x) > -\frac{4}{s^3(x)} \quad \text{и} \quad s_0''(x) = -\frac{4}{s_0^3(x)},$$

соответственно.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = s(x) - s_0(x)$. Эта функция непрерывна на $(-\infty, \infty)$, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\varphi(x) = -s_0(x) < 0$ при $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \setminus D$. При этом, если $\varphi(x) \geq 0$ для некоторого $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \cap D$, то $s(x) \geq s_0(x)$ и

$$\varphi''(x) = s''(x) - s_0''(x) > -\frac{4}{s^3(x)} + \frac{4}{s_0^3(x)} \geq 0.$$

Для доказательства утверждений теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4) достаточно показать, что $\varphi(x) < 0$ при всех $x \in (0, 1)$ и $\varphi(x) > 0$ при всех $x \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle} \setminus [0, 1]$.

Предположим, что $\varphi(x_0) \geq 0$ для некоторого $x_0 \in (0, 1)$. Тогда наибольшее значение функции φ на $[0, 1]$ достигается в некоторой точке $c \in (0, 1) \cap D$ и является локальным максимумом функции φ . Поскольку $\varphi(c) \geq 0$ и, следовательно, $\varphi''(c) > 0$, то это невозможно.

Доказательство правой части неравенства (4) начнем с рассмотрения случая $|r - R| < 4$. Тогда $-\infty < a_2 \leq 0$, $1 \leq b_2 < \infty$. Отметим, что при $r = R = 0$ правая часть неравенства (4) бессодержательна, так как в этом случае $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ и $P_2(x) < 0$ при $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]$. Пусть $R > 0$. Из (2) тогда вытекает, что $b_2 > 1$. Так как $\varphi(1) = 0$, то $\varphi''(1) > 0$ и, поскольку $\varphi(x) < 0$ при $x \in (0, 1)$, то $\varphi'(1) > 0$. Предположим, что $\varphi(x_0) \leq 0$ для некоторого $x_0 \in (1, b_2]$. Тогда существует $c > 1$ такое, что $\varphi(c) = 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x \in (1, c)$. Следовательно, $\varphi''(x) > 0$ на $[1, c]$ и, в силу выпуклости, $\varphi(x) < 0$ на $(1, c)$. Полученное противоречие показывает, что $\varphi(x) > 0$ на $(1, b_2]$. Поскольку $\varphi(x) < 0$ при $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \setminus D$, то $[1, b_2] \subset D$. Если $r > 0$, то случай $x_0 \in [a_2, 0)$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $|r - R| \geq 4$. Тогда $\infty \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle}$. Предположим, что $\mathcal{R}(D, x) \leq \mathcal{R}(D(a_2, b_2), x)$ для некоторого $x \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle} \setminus [0; 1]$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\mu(z) = \frac{z}{1 + \lambda(z - 1)}, \quad \lambda - \text{вещественное.}$$

Имеем $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu'(0) = (1 - \lambda)^{-1}$, $\mu'(1) = (1 - \lambda)$. Положим $\tilde{D} = \mu(D)$, $D(\tilde{a}, \tilde{b}) = \mu(D(a_2, b_2))$, $\tilde{x} = \mu(x)$, $\tilde{r} = \mathcal{R}(\tilde{D}, 0) = (1 - \lambda)^{-1}r$, $\tilde{R} = \mathcal{R}(\tilde{D}, 1) = (1 - \lambda)R$. Тогда $\tilde{x} \in \overline{\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle} \setminus [0, 1]$. Выбрав надлежащим образом параметр $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, получим $|\tilde{r} - \tilde{R}| < 4$ и, в силу доказанного выше, $\mathcal{R}(\tilde{D}, \tilde{x}) > \mathcal{R}(D(\tilde{a}, \tilde{b}), \tilde{x})$. Отсюда

$$\mathcal{R}(D, x) = |\mu'(x)|^{-1} \mathcal{R}(\tilde{D}, \tilde{x}) > |\mu'(x)|^{-1} \mathcal{R}(D(\tilde{a}, \tilde{b}), \tilde{x}) = \mathcal{R}(D(a_2, b_2), x).$$

Утверждения теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4) доказаны.

Чтобы проверить утверждения теоремы относительно левых частей неравенств (3) и (4) рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\mu(z) = \frac{z}{2z - 1}.$$

Имеем $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu'(0) = \mu'(1) = -1$, $\mu(\langle a_1, b_1 \rangle) = \langle a_2, b_2 \rangle$. Применяя доказанные выше неравенства к области $\mu(D)$ и точкам $0, 1, \mu(x)$, получим остальные утверждения теоремы.

Полагая в теореме 1 $R = 0$, получим

Следствие 1. Пусть D - односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, $1 \notin D$, $\mathcal{R}(D, 0) = r$. Пусть $a = r(r-4)^{-1}$, $b = r(r+4)^{-1}$. Тогда $\langle a, b \rangle \subset D$ и для всех $x \in \langle a, b \rangle \setminus \{\infty\}$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{R}(D, x) - r(1-x)^2| \leq 4|x(1-x)|. \quad (8)$$

Если, кроме того, $\infty \in \langle a, b \rangle$, то

$$|\mathcal{R}(D, \infty) - r| \leq 4. \quad (9)$$

Равенство в (8) при $x \neq 0, 1$ имеет место только в случаях $D = D(1, b)$ и $x \in \langle 1, b \rangle \setminus \{\infty\}$, $D = D(a, 1)$ и $x \in [a, 1]$. Равенство в (9) имеет место только в случаях $D = D(1, b)$ и $D = D(a, 1)$.

Следствие 2 [3,4]. Пусть D - односвязная область на \mathbb{C} , $\mathcal{R}(D, 0) = r$. Тогда

$$|\mathcal{R}(D, 1) - r| \leq 4. \quad (10)$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только в случаях: $D = D(\infty, \frac{1}{4}r)$, $r \leq 4$; $D = D(-\frac{1}{4}r, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим дробно-линейное преобразование $\mu(z) = z(z+1)^{-1}$, переводящее точки $0, 1, \infty$ в $0, \frac{1}{2}, 1$, и применим к области $\tilde{D} = \mu(D)$ следствие 1. Имеем $\mathcal{R}(\tilde{D}, 0) = r$, $\mathcal{R}(\tilde{D}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\mathcal{R}(D, 1)$, $\mu^{-1}(a) = -\frac{1}{4}r$, $\mu^{-1}(b) = \frac{1}{4}r$. Здесь a и b - те же, что и в следствии 1. Полагая в (8) $x = \frac{1}{2}$ и преобразуя полученное неравенство, приходим к неравенству (10). При этом равенство в (10) для области $D(\infty, \frac{1}{4}r)$ имеет место только в случае $\frac{1}{2} \in [b, 1]$, т.е. при $r \geq 4$.

Замечание. В силу следствия 2, значения конформных радиусов $\mathcal{R}(D, 0) = r$ и $\mathcal{R}(D, 1) = R$ области $D \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию $|r - R| = 4$ только тогда, когда $D = D(\infty, a)$, $a \leq 0$, или $D = D(b, \infty)$, $b \geq 1$. В этом случае $\mathcal{R}(D, x) = r(1-x) + Rx$ для любого вещественного $x \in D$. Если $|r - R| < 4$, то прямой функциональной зависимости между величинами $\mathcal{R}(D, 0)$, $\mathcal{R}(D, 1)$ и $\mathcal{R}(D, x)$ не существует. Поскольку экстремальная область $D(a_2, b_2)$ в теореме 1 при $|r - R| \leq 4$ не содержит бесконечно удаленной точки,

то правые части неравенств (3) и (4) в этом случае являются точными и в более узком семействе односвязных областей D на конечной плоскости, для которых $\mathcal{R}(D, 0) = r$, $\mathcal{R}(D, 1) = R$.

Следствие 3. Пусть $r, R > 0$, $\tilde{D}(z_1, z_2, z_3, r, R)$ – семейство односвязных областей D на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащих фиксированные различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и таких, что $\mathcal{R}(D, z_1) = r$, $\mathcal{R}(D, z_2) = R$. Пусть O – окружность, проходящая через точки z_1, z_2, z_3 , и пусть Γ – та из двух соединяющих точку z_1 с точкой z_2 дуг окружности O , внутренней точкой которой является точка z_3 . Пусть γ_1 и γ_2 – дуги окружности O , концы которых a_1, b_1 и a_2, b_2 определяются равенствами $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_k, a_k) = r$, $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_k, b_k) = R$, $k = 1, 2$. Пусть γ_1 – та из этих двух дуг, которая не пересекается с дугой Γ . Тогда наибольшее значение величины $\mathcal{R}(D, z_3)$ в семействе $\tilde{D}(z_1, z_2, z_3, r, R)$ достигается только для области $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_1$. Если $z_3 \in \gamma_2$, то в семействе $\tilde{D}(z_1, z_2, z_3, r, R)$ существуют области, не содержащие точки z_3 . Если $z_3 \notin \gamma_2$, то наименьшее значение величины $\mathcal{R}(D, z_3)$ в семействе $\tilde{D}(z_1, z_2, z_3, r, R)$ достигается только для области $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_2$.

Для доказательства достаточно рассмотреть дробно-линейное преобразование, переводящее точки z_1, z_2, z_3 в $0, 1, 1/2$, и применить теорему 1.

Используя связь между логарифмической емкостью ограниченного континуума и конформным радиусом его дополнения относительно бесконечно удаленной точки, из теоремы 1 получаем

Следствие 4. Пусть E – континуум на \mathbb{C} , $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, 0) = r$, $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, 1) = R$. Тогда

$$\text{cap } E \geq \frac{1}{r + R + 2\sqrt{4 + rR}}. \tag{11}$$

Если $|r - R| > 4$, то

$$\text{cap } E \leq \frac{1}{r + R - 2\sqrt{4 + rR}}. \tag{12}$$

Равенство в неравенстве (11) имеет место только в случае $E = [b_1, a_1]$, в неравенстве (12) – только в случае $E = [b_2, a_2]$. Здесь a_1, b_1, a_2, b_2 определяются формулами (1), (2).

2. Если точка z_0 является конформным центром области D , то, в силу определения, z_0 – стационарная точка функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$. Имеет место

Теорема 2. Пусть $z = 0$ – стационарная точка функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$, $\rho = \rho(0)$. Тогда

$$\mathcal{R}(D, z) \geq \rho - \frac{4|z|^2}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta} D(-a, a)$, $e^{-i\theta} z \in [-a, a]$, $a = \frac{1}{2}\rho$, θ – произвольное вещественное число.

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $z = x$, где x – вещественное число. Пусть $f(\zeta)$ и c_2 – те же, что и при доказательстве теоремы 1. Из (5) вытекает, что $z = 0$ является стационарной точкой функции $\rho(z)$ тогда и только тогда, когда $c_2 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что $D_0 = D(-a, a)$ – единственная область в семействе \mathcal{D} , для которой функция $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0, x)$ удовлетворяет условиям $\rho_0(0) = \rho$, $\rho'_0(0) = 0$. При этом $\rho_0(x) = \rho - 4\rho^{-1}x^2$, если $x \in [-a, a]$, и $\rho_0(x) = 0$, если $x \notin [-a, a]$. Таким образом, равенство в (13) для области D_0 имеет место при всех $x \in [-a, a]$.

Пусть теперь $D \neq D_0$. Тогда $D \notin \mathcal{D}$ и, как установлено при доказательстве теоремы 1, для функции $\rho(x) = \mathcal{R}(D, x)$ в (7) при всех вещественных $x \in D$ имеет место строгое неравенство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} - \sqrt{\rho_0(x)} > 0$ при всех $x \in [-a, 0) \cup (0, a]$. Функция φ , как и при доказательстве теоремы 1, обладает следующим свойством: $\varphi''(x) > 0$ при всех $x \in [-a, a]$, для которых $\varphi(x) \geq 0$. Поскольку $\rho(0) = \rho_0(0) = \rho$, $\rho'(0) = \rho'_0(0) = 0$, то $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Поэтому $\varphi''(0) > 0$ и, следовательно, $\varphi(x) > 0$ в некоторой проколлотой окрестности точки $x = 0$. Предположим, что $\varphi(x_0) \leq 0$ при некотором $x_0 \in (0, a]$. Тогда существует такое $y > 0$, что $\varphi(x) > 0$ на $(0, y)$ и $\varphi(y) = 0$. Это невозможно, поскольку в этом случае $\varphi''(x) > 0$ на $(0, y)$, и, в силу выпуклости, $\varphi(x) < 0$ на $(0, y)$. Случай $x_0 \in [-a, 0)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\rho > 0$, $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \dots \in M$, функция $\rho f(\zeta)$

отображает круг U на область D . Тогда

$$\mathcal{R}(D, z) \geq \frac{|\rho + c_2 z|^2 - 4|z|^2}{\rho}. \quad (13)$$

Если $|c_2| > 2$, то

$$\mathcal{R}(D, \infty) \geq \frac{|c_2|^2 - 4}{\rho}. \quad (14)$$

Равенство в (13) при $z \neq 0$ достигается только в случае $D = \mu^{-1}(e^{i\theta} D(-a, a))$, $e^{-i\theta} \mu(z) \in [-a, a]$. Равенство в (14) достигается только в случае $D = \mu^{-1}(e^{i\theta} D(-a, a))$. Здесь $a = \frac{1}{2}\rho$, $\mu(z) = \rho z / (\rho + c_2 z)$, θ – произвольное вещественное число.

Замечание. Геометрически теорема 3 означает, что экстремальными областями для неравенств (13) и (14) являются области, полученные удалением из римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ дуги окружности, проходящей через точки 0 , $-\rho c_2^{-1}$ и z .

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \mu(\rho f(\zeta))$. Поскольку $g(\zeta) = \rho \zeta + o(\zeta^2)$, то можно использовать теорему 2. Применяя эту теорему к области $\mu(D)$ и точкам $\mu(z)$ и $\mu(\infty)$, получим все утверждения теоремы 3.

Полагая в теореме 3 $\rho = 1$ и переформулировав теорему в терминах отображающей функции, получим

Следствие 5. Пусть $f(\zeta) = \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots \in M$. Тогда

$$|f'(\zeta)| \geq \frac{|1 + c_2 f(\zeta)|^2 - 4|f(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2}.$$

Равенство в этом неравенстве при $\zeta \neq 0$ достигается только в случае

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - c_2 \zeta + e^{2i\theta} \zeta^2}, \quad e^{i\theta} \zeta \in (-1, 1),$$

θ – произвольное вещественное число.

Следствие 6. Пусть D – односвязная область, $\mathcal{R}(D, 0) = \rho > 0$. Тогда

$$\mathcal{R}(D, -z) + \mathcal{R}(D, z) \geq 2\rho - \frac{8|z|^2}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}D(-a, a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a, a]$, $a = \frac{1}{2}\rho$, θ — произвольное вещественное число.

Доказательство. В силу теоремы 3,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(D, -z) + \mathcal{R}(D, z) &\geq \frac{|\rho + c_2 z|^2 + |\rho - c_2 z|^2 - 8|z|^2}{\rho} = \\ &= \frac{2\rho^2 + 2|c_2 z|^2 - 8|z|^2}{\rho} \geq 2\rho - \frac{8|z|^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Следствие 7. Пусть E — континуум на \mathbb{C} , $\text{cap } E = c < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, -1) + \mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, 1) \geq 2 \frac{1 - 4c^2}{c}.$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только в случае $E = [-2c, 2c]$.

Для доказательства достаточно рассмотреть отображение $\mu(z) = z^{-1}$ и применить следствие 6 к области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mu(E)$, положив $z = 1$.

§2. СВОЙСТВА КОНФОРМНОГО РАДИУСА ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Через Π будем обозначать семейство всевозможных вертикальных полос $\Pi(a, b) = \{a < \text{Re } \zeta < b\}$ и полуплоскостей $\Pi(a, \infty) = \{\text{Re } \zeta > a\}$, $\Pi(\infty, b) = \{\text{Re } \zeta < b\}$, a, b — вещественные числа, $a < b$.

Лемма. Пусть $r, R \geq 0$, $|R - r| \leq 2$. Тогда существует область $D \in \Pi$ такая, что $\mathcal{R}(D, 0) = r$, $\mathcal{R}(D, 1) = R$.

Доказательство. Пусть $D \in \Pi$, $\tilde{D} = \mu(D)$, где $\mu(z) = z(2z - 1)^{-1}$. Тогда область \tilde{D} является дополнением до римановой сферы объединения двух, возможно вырожденных, кругов, касающихся друг друга в точке $z = 1/2$. Центры этих кругов расположены на вещественной оси и область \tilde{D} полностью определяется радиусами этих кругов. Радиус левого круга обозначим через x , правого — через y , а область \tilde{D} будем обозначать через $\tilde{D}(x, y)$. Условие $0, 1 \in \overline{D}$ равносильно условию $0 \leq x, y \leq 1/4$. Поскольку $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu'(0) = \mu'(1) = -1$, то $\mathcal{R}(D, 0) = \mathcal{R}(\tilde{D}, 0)$, $\mathcal{R}(D, 1) = \mathcal{R}(\tilde{D}, 1)$. Положим $g(x, y) = \mathcal{R}(\tilde{D}(x, y), 0)$, $h(x, y) =$

$\mathcal{R}(\tilde{D}(x, y), 1)$. Функции g и h определены и непрерывны на множестве $K \setminus \{(0, 0)\}$, где $K = \{(x, y): x \in [0, 1/4], y \in [0, 1/4]\}$ – квадрат на xy -плоскости, и убывают по каждому из аргументов. Достаточно показать, что существует точка $M \in K$ такая, что $g(M) = r$, $h(M) = R$. Пусть, для определенности, $R \geq r$. Имеем $g(1/4, 0) = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0}} g(x, y) = +\infty$. Кроме того, $h(x, 0) - g(x, 0) = 2$ и $h(x, x) = g(x, x)$ при любом $x \in (0, 1/4]$. В силу монотонности функции g на каждом из отрезков, по которым прямая $y = (\operatorname{tg} \varphi)x$, $\varphi \in [0, \pi/4]$, пересекает квадрат K , существует единственная точка $A(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$, для которой $g(A) = r$. Поскольку g непрерывна, то функция $A(\varphi)$ непрерывна на $[0, \pi/4]$. Следовательно, функция $\delta(\varphi) = h(A(\varphi)) - g(A(\varphi)) = h(A(\varphi)) - r$ также непрерывна на $[0, \pi/4]$. Поскольку $\delta(0) = 2$, $\delta(\pi/4) = 0$ и $0 \leq R - r \leq 2$, то найдется угол $\varphi \in [0, \pi/4]$ такой, что $\delta(\varphi) = R - r$. Тогда $g(A(\varphi)) = r$, $h(A(\varphi)) = R$. Лемма доказана.

Пусть D – выпуклая область, $\mathcal{R}(D, 0) = r$, $\mathcal{R}(D, 1) = R$. В [4] показано, что $|r - R| \leq 2$ и функция $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$ является вогнутой в D . При этом равенство $|r - R| = 2$ имеет место только для областей $D = \Pi(a, \infty)$, $a \leq 0$, и $D = \Pi(\infty, b)$, $b \geq 1$. В этом случае $\mathcal{R}(D, x) = r(1 - x) + Rx$ для любого вещественного $x \in D$. Если $|r - R| < 2$, то, в силу вогнутости функции $\rho(z)$, $\mathcal{R}(D, x) \geq r(1 - x) + Rx$ при $x \in (0, 1)$ и $\mathcal{R}(D, x) \leq r(1 - x) + Rx$ при вещественных $x \in D \setminus [0, 1]$. Следующая теорема дополняет эту информацию.

Теорема 4. Пусть D – выпуклая область и пусть $\mathcal{R}(D, 0) = r$, $\mathcal{R}(D, 1) = R$, $|r - R| < 2$. Пусть

$$P(a, b, x) = 2 \frac{b - a}{\pi} \sin \frac{(x - a)\pi}{b - a}, \quad x \in [a, b].$$

Тогда $(a, b) \setminus [0, 1] \subset D$, где a и b однозначно определяются условиями

$$r = P(a, b, 0), \quad R = P(a, b, 1), \quad a \leq 0, \quad b \geq 1. \quad (15)$$

Имеют место неравенства

$$\mathcal{R}(D, x) \leq P(a, b, x) \quad \text{при } x \in (0, 1); \quad (16)$$

$$\mathcal{R}(D, x) \geq P(a, b, x) \quad \text{при } x \in (a, b) \setminus [0, 1]. \quad (17)$$

Равенство в неравенствах (16) и (17) имеет место только в случае $D = \Pi(a, b)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x)$ и $f(\zeta)$ – те же, что и при доказательстве теоремы 1. Из (6) получаем

$$\rho'' = \frac{2 \operatorname{Re}(3c_3 - 4c_2^2) + (\rho')^2 - 2}{\rho}. \quad (18)$$

Так как область D является выпуклой, то (см., например, [6]) $g(\zeta) = \zeta f'(\zeta) = \zeta + d_2 \zeta^2 + \dots$ – звездообразная функция. Следовательно, $g \in S$ и поэтому (см., например, [5]) $\operatorname{Re}(d_3 - d_2^2) \geq -1$. Поскольку $d_3 - d_2^2 = 3c_3 - 4c_2^2$, то из (18) вытекает, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho'' \geq \frac{(\rho')^2}{\rho} - \frac{4}{\rho}. \quad (19)$$

Равенство в этом неравенстве достигается только при $\operatorname{Re}(d_3 - d_2^2) = -1$, что имеет место только в случае

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + 2\lambda\zeta + \zeta^2}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1.$$

Отсюда $f'(\zeta) = (1 + 2\lambda\zeta + \zeta^2)^{-1}$. Интегрируя, получим:

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + \lambda\zeta} \quad \text{при } |\lambda| = 1$$

и

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \lambda^2} \zeta}{1 + \lambda\zeta} \quad \text{при } |\lambda| < 1.$$

В каждом из этих случаев функция $\rho f(\zeta) + x$ отображает круг U на область $D \in \Pi$.

По лемме, существует полоса $D_0 = \Pi(a, b)$, удовлетворяющая условиям (15). Тогда $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0, x) = P(a, b, x)$ при $x \in [a, b]$. На интервале (a, b) функция $\rho_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'' = \frac{(\rho')^2}{\rho} - \frac{4}{\rho}.$$

Отметим, что полоса $\Pi(a, b)$ определяется функцией $\rho_0(x)$ однозначно, поскольку $\rho_0(x) \neq 0$ только при $x \in (a, b)$. Сделав в (19) замену переменной $s = \log \rho$, убеждаемся, что функции

$s(x) = \log \rho(x)$ и $s_0(x) = \log \rho_0(x)$ удовлетворяют условиям $s''(x) \geq -4 \exp(-2s(x))$ и $s_0''(x) = -4 \exp(-2s_0(x))$, соответственно.

Докажем неравенство (16) сначала в предположении, что $r, R > 0$. Тогда $[0, 1] \subset D$, $a < 0$, $b > 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = s(x) - s_0(x)$. Эта функция непрерывна на $(a, b) \cap D$, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Кроме того, если $\varphi(x) \geq 0$ для некоторого $x \in (a, b) \cap D$, то $s(x) \geq s_0(x)$ и

$$\varphi''(x) = s''(x) - s_0''(x) \geq -4 \exp(2s(x)) + 4 \exp(2s_0(x)) \geq 0.$$

Равенство $\varphi''(x) = 0$ в этом случае имеет место только тогда, когда $\varphi(x) = 0$ и $D \in \Pi$. Для доказательства неравенств (16), (17) и утверждения относительно равенства в этих неравенствах достаточно показать, что $\varphi(x) \leq 0$ при всех $x \in (0, 1)$, $\varphi(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b) \setminus [0, 1]$, и что равенство в этих неравенствах имеет место только тогда, когда $D = \Pi(a, b)$.

Предположим, что $\varphi(x_0) \geq 0$ для некоторого $x_0 \in (0, 1)$. Тогда наибольшее значение функции φ на $[0, 1]$ достигается в некоторой точке $c \in (0, 1)$. Поскольку c – точка максимума, то $\varphi''(c) \leq 0$. С другой стороны, $\varphi(c) \geq 0$, следовательно, $\varphi''(c) \geq 0$. Значит, $\varphi''(c) = 0$. Тогда, в силу свойств функции φ , $\varphi(c) = 0$ и $D \in \Pi$. Пусть $D = \Pi(\tilde{a}, \tilde{b})$. Поскольку $\varphi(c)$ – наибольшее значение функции на $[0, 1]$, то $\varphi(x) \leq 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Заменяя область D областью $\tilde{D} = \Pi(a, b)$, а величины a и b величинами \tilde{a} и \tilde{b} , и повторив те же рассуждения, проверим, что $s_0(x) - s(x) = -\varphi(x) \leq 0$ на $[0, 1]$. Следовательно $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Это означает, что функции $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$ совпадают и $D = \Pi(a, b)$. Отметим, что тем самым доказано, что $\Pi(a, b)$ – единственная область семейства Π , удовлетворяющая условиям (15).

Пусть теперь $rR = 0$. Тогда $[0, 1] \not\subset D$. Если $(0, 1) \cap D = \emptyset$, то $a = 0$, $b = 1$ и неравенство (16) бессодержательно. Пусть $(0, 1) \cap D \neq \emptyset$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{\rho}(x) = P(a - \varepsilon, b + \varepsilon, x)$. Тогда функция $\tilde{\varphi}(x) = \log \rho(x) - \log \tilde{\rho}(x)$, непрерывна на $[0, 1] \cap D$, причем $\tilde{\varphi}(0) < 0$, если $0 \in D$, и $\tilde{\varphi}(1) < 0$, если $1 \in D$. Кроме того, если $x_0 \in (0, 1) \cap \partial D$, то $\tilde{\varphi}(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow x_0$. Поэтому функция $\tilde{\varphi}$ достигает наибольшего значения на $(0, 1) \cap D$. Заменяя в предыдущем рассуждении функцию φ на функцию $\tilde{\varphi}$, проверяем, что $\rho(x) \leq \tilde{\rho}(x)$ при всех $x \in (0, 1) \cap D$. Отсюда, в силу произвольности ε , вытекает, что $\rho(x) \leq \rho_0(x) = P(a, b, x)$ на $[0, 1]$. Предположим, что $\rho(c) = \rho_0(c)$ при некотором $c \in (0, 1)$. Поскольку функция

$\varphi(x) = \log \rho(x) - \log \rho_0(x)$ на $[0, 1]$ неположительна, то c – точка максимума функции φ . Отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает, что $D = \Pi(a, b)$.

Если $D = \Pi(a, b)$, то в (17) имеет место равенство при всех $x \in (a, b) \setminus [0, 1]$. Пусть $D \neq \Pi(a, b)$. Тогда $D \notin \Pi$. Повторяя рассуждения теоремы 1, проверяем, что $\rho(x) > P(a, b, x)$ при всех $x \in (a, b) \setminus [0, 1]$. Теорема доказана.

Пусть $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \dots \in S^c$, функция $\rho f(\zeta)$ отображает круг U на область D . Известно (см., например, [6]), что $|c_2| \leq 1$. Анализ приведенного в [6] доказательства показывает, что $|c_2| = 1$ только в том случае, когда D – полуплоскость. В этом случае $\mathcal{R}(D, z) = \rho + 2\operatorname{Re}(c_2 z)$ для любого $z \in D$. Это утверждение дополняет следующая

Теорема 5. Пусть $\rho > 0$, $|c_2| < 1$, $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \dots \in S^c$, функция $\rho f(\zeta)$ отображает круг U на область D . Пусть

$$c = \operatorname{Re} c_2, \quad \lambda = \frac{\rho}{2\sqrt{1-c^2}}, \quad a = -\lambda \arccos c, \quad b = \lambda \arccos(-c). \quad (20)$$

Тогда $(a, b) \subset D$ и при всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(D, x) \geq \rho \cos \frac{x}{\lambda} + 2\lambda c \sin \frac{x}{\lambda}, \quad (21)$$

Равенство в этом неравенстве при $x \neq 0$ имеет место только в случае c_2 – вещественное число, $D = \Pi(a, b)$, $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $D_0 = \Pi(a, b)$, где a и b определяются формулами (20). Непосредственно проверяется, что $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0, x) = \rho \cos \frac{x}{\lambda} + 2\lambda c \sin \frac{x}{\lambda}$ при $x \in [a, b]$. Поэтому для области D_0 в (21) имеет равенство при всех $x \in [a, b]$. Пусть $D \neq D_0$, $\rho(x) = \mathcal{R}(D, x)$. Имеем $\rho(0) = \rho_0(0) = \rho$, $\rho'(0) = \rho'_0(0) = 2c$. Рассматривая функцию $\varphi(x) = \log \rho(x) - \log \rho_0(x)$ и повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, проверяем остальные утверждения теоремы.

Следствие 8. Пусть D – выпуклая область, $\mathcal{R}(D, 0) = \rho > 0$, $a = \pi\rho/4$. Тогда при всех $|z| \leq a$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(D, z) + \mathcal{R}(D, -z) \geq 2\rho \cos \frac{2|z|}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-a, a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a, a]$, θ — произвольное вещественное число.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай вещественных z . Пусть c_2 , c и λ — те же, что и при доказательстве теоремы 5. Если $|c_2| = 1$, то D — полуплоскость и утверждение теоремы тривиально. Если $|c_2| < 1$, то $c < 1$. Применим к точкам z и $-z$ теорему 5. Если $c \neq 0$, то правая часть неравенства (21) в некоторых точках отрезка $[-a, a]$ отрицательна. Но поскольку

$$a = \frac{\pi\rho}{4} < \pi\lambda = \frac{\pi\rho}{2\sqrt{1-c^2}},$$

то неравенство (21) справедливо при всех $x \in [-a, a]$. Имеем

$$\mathcal{R}(D, x) + \mathcal{R}(D, -x) \geq 2\rho \cos \frac{2\sqrt{1-c^2}x}{\rho} \geq 2\rho \cos \frac{2x}{\rho}.$$

Если D — выпуклая область, то, в силу вогнутости в области D функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$, всякая стационарная точка $z_0 \in D$ функции $\mathcal{R}(D, z)$ является конформным центром области D , а величина $\mathcal{R}(D, z_0)$ — максимальным конформным радиусом. Полагая в теореме 5 $c_2 = 0$, получаем

Следствие 9. Пусть $z = 0$ — конформный центр выпуклой области D и пусть $\mathcal{R}(D) = \rho$, $a = \pi\rho/4$. Тогда при всех $|z| \leq a$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(D, z) \geq \rho \cos \frac{2|z|}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-a, a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a, a]$, θ — произвольное вещественное число.

Следствие 10 [2]. Пусть $z = 0$ — конформный центр выпуклой области D и пусть $\mathcal{R}(D) = \rho$. Тогда $\{|z| < R\} \subset D$, где $R = \pi\rho/4$. При этом $z = Re^{i\theta} \in \partial D$ только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-R, R)$, θ — вещественное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Поляк, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, М., 1962.

2. H. R. Haegi, *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen*, Compositio Math. **8** (1950), 81–111.
3. Е. Г. Емельянов, *О максимуме конформного радиуса в семействах областей, удовлетворяющих дополнительным условиям*, Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 93–108.
4. Л. В. Ковалев, *Оценки конформного радиуса и теоремы искажения для однолистных функций*, Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 141–156.
5. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-ое изд., М., 1966.

С.-Петербургский
государственный
университет
водных коммуникаций

Поступило 16 апреля 2001 г.