В.А.Гриценко

ФУНКЦИИ ФУРЬЕ - ЯКОБИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Формы Якоби $\varphi(\tau, z)$, изученные в книге Эйхлера и Загира [I], это функции на пространстве $H_1 \times \mathbb{C}$ (H_1 - верхняя полуплоскость), являющиеся при фиксированном τ функциями Якоби по z. Примерами таких форм являются первые коэффициенты в разложении Фурье - Якоби зигелевых модулярных форм рода 2. При этом первый коэффициент Фурье-Якоби определяет зигелеву форму, принадлежащую пространству Маасса (формы, полученные в результате подъема из SL_2 в Sp_2). Рассматривая разложения Фурье-Якоби модулярных форм для различных групп (см. книгу Пятецкого-Шапиро [2]), можно получить примеры форм Якоби различных типов. В случае группы $SU(2,2)$ получаются, например, формы на пространстве $H_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (см. [3], [4]). В настоящей работе определяются формы Якоби на пространстве $H_1 \times \mathbb{C}^n$, являющиеся естественным обобщением форм, отмеченных выше. Их арифметика тесно связана с арифметикой модулярных форм на ортогональной группе квадратичной формы сигнатуры $(2,n)$ (см. [5]), и именно эта группа задает, по-видимому, наиболее естественное "обрамление" для исследования форм Якоби на верхней полуплоскости с несколькими комплексными параметрами. Эта статья носит предварительный характер и является изложением доклада автора, прочитанного на семинаре лаборатории теории чисел ЛОМИ.

§ I

Зафиксируем $\mathbb{Z}$-целую решетку в квадратичном пространстве $(V_{\mathbb{Q}}, S)$ вещественной сигнатуры $(2, n+2)$ с $n \geq 1$. Предполагаем, что норма решетки L (идеал $\{\frac{1}{2}S(\ell,\ell),\ \ell\in L\}$) равна $\mathbb{Z}$ и что в L можно выделить гиперболическую плоскость, т.е.

$$L = \langle e_0, e_{n+3} \rangle \perp L_1 . \tag{I}$$

Выберем какой-нибудь базис решетки L_1 и отождествим квадратичную форму S с соответствующей $(n+4)\times(n+4)$-матрицей:

$$S = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & S_1 & \\ 1 & & \end{bmatrix},$$

где S_1 – матрица квадратичной формы вещественной сигнатуры $(1, n+1)$.

Через $G_{\mathbb{R}}$ обозначим связную компоненту единицы вещественной ортогональной группы

$$O(S,\mathbb{R}) = \{ g \in M_{n+4}(\mathbb{R}) : {}^t g S g = S \} .$$

Пусть

$$\mathcal{H}^{n+2} = \{ Z \in \mathbb{C}^{n+2} : S_1(\operatorname{Im} Z, \operatorname{Im} Z) > 0 \},$$

где $\operatorname{Im} Z$ обозначает мнимую часть вектора Z. Цилиндрическая область $\mathcal{H}^{n+2}$ состоит из двух связных компонент. Группа $G_{\mathbb{R}}$ действует на связных компонентах эрмитовой области $\mathcal{H}^{n+2}$ как группа аналитических автоморфизмов. Опишем это действие. Если

$$g = \begin{bmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,n+3} \\ g_{1,0} & \cdots & g_{1,n+3} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n+3,0} & \cdots & g_{n+3,n+3} \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}}, \quad Z = {}^t(z_1,\ldots,z_{n+2}) \in \mathcal{H}^{n+2}$$

(элементы $\mathcal{H}^{n+2}$ записываются как вектор-столбцы), то

$$g\langle Z\rangle = {}^t\left(\frac{-\frac{1}{2} g_{i,0} S_1(Z,Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{i,j} z_j + g_{i,m+1}}{-\frac{1}{2} g_{n+3,0} S_1(Z,Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{n+3,j} z_j + g_{n+3,n+3}} \right) . \tag{2}$$

Знаменатель

$$J(g,Z) = -\frac{1}{2} g_{n+3,0} S_1(Z,Z) + \sum_{j=1}^{n+2} g_{n+3,j} z_j + g_{n+3,n+3}$$

является фактором автоморфности на $\mathcal{H}^{n+2}$ относительно $G_{\mathbb{R}}$.

Предположим теперь, что в подрешетке L_1 можно выделить гиперболическую плоскость

$$L_1 = \langle e_1, e_{n+2} \rangle \perp L_0 , \qquad S_1 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & -S_0 & \\ 1 & & \end{bmatrix} ,$$

где S_0 – матрица положительно определенной квадратичной формы.

Зафиксируем связную компоненту $\mathcal{H}_+^{n+2}$ области $\mathcal{H}^{n+2}$ ("верхнюю полуплоскость") следующим условием:

$$\mathcal{H}_+^{n+2} = \left\{ \begin{array}{l} Z = {}^t(\omega, z_1, \ldots, z_n, \tau) \in \mathbb{C}^{n+2},\ \operatorname{Im}\omega \cdot \operatorname{Im}\tau > S_0[\operatorname{Im} z], \\ \qquad \text{где} \quad z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)\,. \end{array} \right. \tag{3}$$

Стабилизатор Γ_L решетки L в группе $G_{\mathbb{R}}$ является арифметической подгруппой группы G. Голоморфная функция F, заданная на области $\mathcal{H}_+^{n+2}$, называется **модулярной формой веса** k относительно группы Γ_L, если она удовлетворяет уравнению

$$(F|_k \gamma)(Z) = J(\gamma, Z)^{-k} F(\gamma\langle Z\rangle) = F(Z) \tag{4}$$

для любого γ из Γ_L.

В частности, для любой модулярной формы

$$F(\omega + m, z, \tau) = F(\omega, z, \tau) \qquad (m \in \mathbb{Z})\,;$$

поэтому, разлагая голоморфную функцию F в ряд Фурье по ω, получаем

$$F(\omega, z, \tau) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(z, \tau)\, exp\,(2\pi i\, m\, \omega)\,. \tag{5}$$

Функции $\varphi_m(\tau, z)$ называются коэффициентами Фурье-Якоби формы F (см. [2]). (Отметим, что φ_0 зависит лишь от τ).

Раскладывая $F(Z)$ в ряд Фурье по переменной $Z \in \mathcal{H}_+^{n+2}$, получаем

$$F(Z) = \sum_{M \in L_1^*,\ {}^t M S_1 M \geq 0} f(M)\, exp(2\pi i\, {}^t Z S_1 M)\,, \tag{6}$$

где

$$L_1^* = \{\ell^* \in L_1 \otimes \mathbb{Q} : \forall \ell \in L_1\ {}^t\ell^* S_1 \ell \in \mathbb{Z}\}$$

– решетка, двойственная к решетке L_1 (см. (I)). Из единственности разложения в ряд Фурье получаем, что

$$\varphi_m(z, \tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z},\ \ell \in L_0^* \\ 2nm \geq S_0[\ell]}} f(\ell, n)\, exp(2\pi i(n\tau - {}^t z S_0 \ell))\,.$$

Найдем функциональные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты Фурье-Якоби φ_m. С этой целью рассмотрим параболическую подгруппу $P_{\mathbb{R}}$, сохраняющую изотропный флаг $[e_0, e_1]$,

$$P_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} A^* & B_1 & T \\ 0 & U & B \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}} \right\}, \tag{7}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}), \quad U \in G_{\mathbb{R}}(L_0), \quad B \in M_{n,2}(\mathbb{R}),$$

$$B_1 = I\,{}^tA^{-1} B S_0 U, \quad A^* = I\,{}^tA^{-1} I, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

2×2 - матрица T удовлетворяет условию

$${}^tTIA + {}^tAIT = S_0[B].$$

Определим элементы группы $P_{\mathbb{R}}$ следующих трех типов:

$$[A]_2\langle Z\rangle = diag(A^*, E_n, A)\langle Z\rangle = {}^t\!\left(\omega - \frac{cS_0[z]}{2(c\tau+d)}, \frac{z}{c\tau+d}, A\langle\tau\rangle\right), \tag{8}$$

где $A\langle\tau\rangle = (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$,

$$[U]_n\langle Z\rangle = diag(E_2, U, E_2)\langle Z\rangle = {}^t(\omega, Uz, \tau), \tag{9}$$

$$[x,y]_n\langle Z\rangle = \begin{bmatrix} E_2 & \begin{matrix} {}^tyS_0^{\cdot} \\ {}^txS_0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ +\frac{1}{2}S_0[x] \end{matrix} & \begin{matrix} +\frac{1}{2}S_0[y] \\ +{}^txS_0y \end{matrix} \\ 0 & E_n & x & y \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{E_2} \end{bmatrix} =$$

$$= (\omega + {}^txS_0z + \tfrac{1}{2}S_0[X]\tau + {}^txS_0y,\ z + x\tau + y,\ \tau). \tag{10}$$

Соотношения (8) - (10) вместе с определением (4) модулярных форм дают следующие функциональные уравнения для коэффициентов $\varphi_m(z,\tau)$:

$$\varphi_m(z,\tau)\Big|_k [A]_2 = (c\tau+d)^{-k} \exp\!\left(\pi i \frac{mcS_0[z]}{c\tau+d}\right) \varphi_m\!\left(\frac{z}{c\tau+d}, A\langle\tau\rangle\right) =$$

$$= \varphi_m(z,\tau) \tag{11}$$

для любого $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\varphi_m(Uz,\tau) = \varphi_m(z,\tau) \tag{12}$$

для любого U, сохраняющего решетку L_0 $(U \in \Gamma_{L_0})$,

$$\varphi_m(z,\tau)\big|_k [x,y] = \exp(2\pi i m({}^t x S_0 z + \tfrac{1}{2} S_0[x]\tau)) \times \tag{13}$$
$$\times\, \varphi_m(z + x\tau + y, \tau) = \varphi_m(z,\tau)$$

для любых целочисленных векторов $x, y \in \mathbb{Z}^n$. (Мы фиксируем произвольный базис решетки L_0.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана $\mathbb{Z}$-целая четная решетка L_0 в положительно определенном квадратичном пространстве $(V_{\mathbb{Q}}, S_0)$ ненулевой размерности. Через Γ_{L_0} обозначим группу единиц решетки L_0. Формой Якоби веса k и индекса m $(k, m \in \mathbb{N})$ называется голоморфная на $\mathbb{C}^n \times H_1$ функция, удовлетворяющая функциональным уравнениям (11) – (13) и имеющая разложение Фурье следующего вида:

$$\varphi(z,\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\, \ell \in L_0^* \\ 2nm - S_0[\ell] \geq 0}} f(\ell,n) \exp(2\pi i(n\tau + {}^t z\, S_0 \ell)).$$

Форма φ называется параболической, если $f(\ell,n)$ для n и ℓ с условием $2nm - S_0[\ell] = 0$.

Коэффициенты Фурье-Якоби модулярных (параболических) форм относительно ортогональной группы Γ_L являются примером форм (параболических форм) Якоби.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (11) – (13) в определении форм Якоби веса k и индекса m можно переписать в виде одного соотношения

$$(\varphi_m(z,\tau)\exp(2\pi i m\omega))\big|_k \gamma = \varphi_m(z,\tau)\exp(2\pi i m\omega), \tag{14}$$

которое выполняется для любого элемента $\gamma \in P_{\mathbb{R}} \cap \Gamma_L$ и произвольного ω такого, что $(\omega, z, \tau) \in \mathcal{H}_+^{n+2}$

Как и в случае форм Якоби для группы $Sp_n(\mathbb{Z})$ (см. [1], [6]) любую форму Якоби от n переменных можно разложить в произведение векторнозначных модулярной формы от одной переменной на вектор тета-рядов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для формы Якоби $\varphi(z,\tau)$ веса k и индекса m справедливо следующее разложение

$$\varphi(z,\tau) = \sum_{h \in L_0^* \bmod mL_0} \varphi_h(\tau)\, \vartheta_{mS_0}(\tau, mS_0 z, -\tfrac{h}{m}) \cdot \exp(\pi i\, {}^t h S_0 z), \tag{15}$$

где ϑ_{mS_0} – тета-ряд четной положительно определенной квадратичной формы mS_0:

$$\vartheta_{mS_0}(\tau, mS_0 z, -\frac{h}{m}) =$$

$$= \sum_{X\in\mathbb{Z}^n} exp(\pi i\tau m S_0[X+\frac{h}{m}] + 2\pi i\, m\, {}^tX S_0 z + \pi i\, {}^th m S_0 z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (13) $(x=0, y\in\mathbb{Z}^n)$ $\varphi(z,\tau) = \varphi(z+y,\tau)$, поэтому разложение Фурье по z формы Якоби φ имеет следующий вид:

$$\varphi(z,\tau) = \sum_{\ell\in L_0^*} g_\ell(\tau)\, e({}^t\ell S_0 z),$$

где $e(z) = exp(2\pi i z)$. Полагая в (13) $y=0$, получаем

$$\varphi(z,\tau) = \varphi(z+\tau x, \tau)\, e(m({}^tx S_0 z + 2^{-1} S_0[x]\tau) =$$

$$= \sum_{\ell\in L_0^*} (g_\ell(\tau)\, e({}^t(\ell+mx)S_0 z + \frac{\tau S_0}{2m}[mx+\ell] - \frac{S_0[\ell]}{2m}\tau).$$

Следовательно, можно определить функцию

$$\varphi_\ell(\tau) = g_\ell(\tau)\, e(-\frac{S_0[\ell]}{2m}\tau) = g_{\ell+mx}\, e(-\frac{S_0[\ell+mx]}{2m}\tau).$$

Суммируя по $x\in\mathbb{Z}^n$ и собирая соответствующие слагаемые, получаем искомую формулу.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть q – ступень четной целочисленной квадратичной формы S_0 (qS_0^{-1} – четная целочисленная), $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in$ $\in\Gamma_0(mq)$. Тогда коэффициенты $\varphi_h(\tau)$ формы Якоби веса k и индекса m удовлетворяют соотношению

$$\varphi_{ah}(\tau) = \chi_{S_0}(A)\, exp\left(\frac{\pi i\, ab\, S_0[h]}{m}\right)(c\tau+d)^{\frac{n}{2}-k}\,\varphi_h(A\langle\tau\rangle),$$

где $\chi_{S_0}(A)$ – корень восьмой степени из единицы, входящий в функциональное уравнение для тета-ряда квадратичной формы. (Если $n=2n_1^*$ – четное, то $\chi_{S_0}(A) = (sign\, d)^{n_1^*}\left(\frac{(-1)^{n_1}\det mS_0}{|d|}\right)$ – вещественный характер Дирихле; в случае нечетного n см. [7]).

В частности, функция $\varphi_0(\tau)$ является модулярной формой веса $k-\frac{n}{2}$ относительно группы $\Gamma_0(mq)$, а функции $\varphi_h(\tau)$ – модулярные формы веса $k-\frac{n}{2}$ относительно главной конгруэнц-подгруппы $\Gamma(mq)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство модулярных форм веса k и индекса m имеет конечную размерность.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если ступень квадратичной формы S_0 равна I (решетка L_0 – унимодулярная), то форма Якоби индекса I "пропорциональна" тета-ряду

$$\varphi(z,\tau) = \varphi_0(\tau)\,\vartheta_{S_0}(\tau, S_0 z, 0) .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\varphi_1(z,\tau)$ – первый коэффициент Фурье-Якоби модулярной формы $F(\omega, z, \tau)$ веса k относительно группы Γ_L (см. (5)) и

$$\varphi_1(z,\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\, \ell\in L_0^* \\ 2n \geqslant S_0[\ell]}} f(\ell, n)\exp(2\pi i(n\tau + {}^t\ell S_0 z)) .$$

Модулярные формы $\varphi_h^{(1)}(\tau)$ из разложения (I5) имеют следующие разложения Фурье в бесконечности:

$$\varphi_h^{(1)}(\tau) = \sum_{\substack{n\geqslant 0 \\ n\equiv -\frac{q}{2}S_0[h] (\mathrm{mod}\, q)}} f\Big(h, \frac{n + qS_0[h]}{2q}\Big)\exp\Big(2\pi i\frac{n\tau}{q}\Big),$$

где $h\in L_0^*$, а q – ступень формы S_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $F(Z)$ инвариантна относительно действия элементов вида $diag(1, \gamma, 1)$, где γ сохраняет решетку L_1 (см. (I)), следовательно, коэффициенты Фурье $f(M)$ формы F (см. (6)) инвариантны относительно γ:

$$f(\gamma M) = f(M).$$

В частности, это соотношение для унипотентного γ превращается в следующее равенство для коэффициентов $f(\ell, n)$ функции $\varphi_1(z,\tau)$:

$$f(\ell, n) = f(\ell + x,\ n + {}^t x S_0 \ell + \tfrac{1}{2}S_0[x])$$

для любого $x\in L_0$. Следовательно,

$$\varphi_1(z,\tau) = \sum_{h\in L_0^*/L_0} \sum_{\substack{x\in L_0,\, n\geq 0 \\ n\equiv -\frac{q}{2}S_0[h] (\mathrm{mod}\, q)}} f\left(h+x, \frac{n}{q} + \frac{S_0[h+x]}{2}\right) \times$$

$$\times\, e\left(\tau\left(\frac{n}{q} + \frac{S_0}{2}[h+x]\right) + {}^t(h+x)S_0 z\right) =$$

$$= \sum_{h\in L_0^*/L_0} \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv -\frac{q}{2}S_0[h] (\mathrm{mod}\, q)}} f\left(h, \frac{2n+qS_0[h]}{2q}\right) e\left(\tau\frac{n}{q}\right)\cdot \vartheta_{S_0}(\tau, S_0 z, -h)\cdot e\left(\frac{{}^t h S_0 z}{2}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $S_0[h_1] = S_0[h_2]$ $(h_1, h_2 \in L_0^*)$, то

$$\varphi_{h_1}^{(1)}(\tau) = \varphi_{h_2}^{(2)}(\tau).$$

§ 2. Операторы Гекке

Через $P_{\mathbb{Q}}$ и $P_{\mathbb{Z}} = P_{\mathbb{R}} \cap \Gamma_L$ обозначим подгруппы рациональных и целых точек параболической группы P. Кольцо Гекке $H_P = H(P_{\mathbb{Z}}, P_{\mathbb{Q}})$ – это $P_{\mathbb{Z}}$ -инвариантное подпространство $\mathbb{Q}$ -векторного пространства, состоящего из всех формальных конечных линейных комбинаций

$$X = \sum_i a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i), \quad a_i \in \mathbb{Q}, \; g_i \in P_{\mathbb{Q}}.$$

Представление группы $P_{\mathbb{Z}}$ на этом пространстве задается равенством

$$X \longrightarrow X\cdot\gamma = \sum_i a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i \gamma).$$

Для любых двух элементов

$$X = \sum a_i (P_{\mathbb{Z}} g_i) \quad \text{и} \quad Y = \sum b_j (P_{\mathbb{Z}} h_j)$$

кольца H_P их произведение $X\cdot Y$ определено равенством

$$X\cdot Y = \sum_{i,j} a_i b_j (P_{\mathbb{Z}} g_i h_j) .$$

Кольцо H_P устроено довольно сложно. Даже в локальном случае кольцо $H(P_{\mathbb{Z}_p}, P_{\mathbb{Q}_p})$ не является коммутативным и обладает делителями нуля. Ниже мы выделим в кольце Гекке H_P два подкольца, изоморфные кольцу Гекке группы SL_2. Эти подкольца задаются максимальным изотропным подпространством, выделенном в исходном квадратичном пространстве.

В (8) - (10) были определены элементы стандартных подгрупп параболической группы P. Введем еще один элемент

$$[r]_1 = \begin{bmatrix} E_2 & 0\cdot\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & r\end{smallmatrix} \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть даны два натуральных числа α и β (α делитель β) и число δ, равное натуральному числу в степени ± 1. Тогда справедлива следующая формула для разложения двойного смежного класса по группе $P_{\mathbb{Z}}$ на непересекающиеся левые смежные классы:

$$P_{\mathbb{Z}}\left[\delta\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right]_2 P_{\mathbb{Z}} = \sum_{x,y,r,i} P_{\mathbb{Z}}\cdot\left[\delta\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right]_2\cdot[x,y]_n\cdot[r]_1\cdot[A_i]_2 ,$$

где векторы x и y и число r пробегают указанные системы представителей:

$$x\in\mathbb{Z}^n/\delta\alpha\mathbb{Z}^n, \quad y\in\mathbb{Z}^n/\delta\beta\mathbb{Z}^n, \quad r\in\mathbb{Z}/\delta\alpha\beta\mathbb{Z} ,$$

а матрицы A_i выбраны так, чтобы

$$\Gamma_2\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\Gamma_2 = \sum_i \Gamma_2\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}A_i \qquad (\Gamma_2 = SL_2(\mathbb{Z})) .$$

Доказательство предложения 3 легко получить прямыми вычислениями (см. лемму 3.1 [6]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если α делит β, то

$$P_{\mathbb{Z}}\begin{bmatrix}\beta^{-1} & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{bmatrix}_2 P_{\mathbb{Z}} = \sum_i P_{\mathbb{Z}}\cdot\begin{bmatrix}\beta^{-1} & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{bmatrix}_2\cdot[A_i]_2 .$$

Для доказательства следствия нужно положить в основной формуле $\delta = (\alpha\beta)^{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Определены следующие два вложения кольца Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$ в кольцо Гекке H_P :

$$im : \Gamma_2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Gamma_2 \longrightarrow P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}_2 P_{\mathbb{Z}} , \qquad (17)$$

$$Im : \Gamma_2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Gamma_2 \longrightarrow P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}_2 P_{\mathbb{Z}} . \qquad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения im и Im связаны друг с другом через стандартный антиавтоморфизм $*$ кольца H_P

$$* : P_{\mathbb{Z}}\, g\, P_{\mathbb{Z}} \longrightarrow P_{\mathbb{Z}}\, g^{-1}\, P_{\mathbb{Z}} ,$$

поэтому Im является вложением колец, если im является вложением, а это так в силу следствия I.

Можно определить действие элементов кольца Гекке H_P на формы Якоби. В случае группы $Sp_n(\mathbb{Z})$ аналогичное представление было описано автором в [6].

Для любого $g \in P_{\mathbb{Q}}$ такого, что

$$P_{\mathbb{Q}}\, g\, P_{\mathbb{Q}} = \sum_i P_{\mathbb{Q}}\, g_i ,$$

и любой функции $F(Z)$, заданной на "верхней полуплоскости" $\mathcal{H}_+^{n-2}$ (см. (3) и (4)), положим

$$(F|_k g)(Z) = \sum_i (F|_k g_i)(Z) .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть даны форма Якоби $\varphi(z,\tau)$ веса k и индекса m, натуральные α, β (α делит β), число δ, равное ± 1 степени натурального числа, и комплексное число ω такое, что $Z = {}^t(\omega, {}^t z, \tau) \in \mathcal{H}_+^{n+2}$. Положим

$$X(\delta, \alpha, \beta) = P_{\mathbb{Z}} \left[\delta \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right]_2 P_{\mathbb{Z}} ,$$

где $[\ ]_2$ – элемент из (8). Тогда функция

$$\psi(z,\tau) = (\varphi|_k X)(z,\tau) = ((\varphi(z,\tau)\, e(m\omega))|_k X(\delta,\alpha,\beta))\, e\left(-\frac{m}{\delta^2\alpha\beta}\,\omega\right)$$

является формой Якоби веса k и индекса $m_1 = \dfrac{m}{\delta^2\alpha\beta}$,
если m_1 – целое, и равна 0 в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\widetilde{\varphi}(Z) = \varphi(z,\tau)\,e(m\omega)$. По определению форм Якоби (см. (I4)) функция $\widetilde{\varphi}$ инвариантна относительно действия элементов из группы $P_{\mathbb{Z}}$, поэтому функция $\widetilde{\psi}(Z) = (\widetilde{\varphi}|\chi(\delta,\alpha,\beta))(Z)$ также инвариантна относительно действия группы $P_{\mathbb{Z}}$. Применяя предложение 3, получаем, что у функции $\widetilde{\psi}(Z)$ можно выделить множитель

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}/\delta^2\alpha\beta\mathbb{Z}} e\left(\frac{m\gamma+m\omega}{\delta^2\alpha\beta}\right),$$

и переменная ω входит только в этот множитель. Остальное ясно.

Введем стандартный элемент $T(q)$ кольца Гекке группы $\Gamma_2 = SL_2(\mathbb{Z})$:

$$T(q) = \sum_{\substack{\alpha\beta=q\\ \alpha/\beta}} \Gamma_2\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\Gamma_2$$

Определим образы этого элемента

$$T_-(q) = im\,T(q)\,, \qquad T_+(q) = Im\,T(q)$$

при вложениях im и Im из (I7)-(I8).

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $\varphi(z,\tau)$ – форма Якоби веса k и индекса m , тогда

$(\varphi|_k T_-(q))(z,\tau)$ – форма Якоби индекса mq ,

$(\varphi|_k T_+(q))(z,\tau)$ – форма Якоби индекса $\dfrac{m}{q}$ или 0.

Существуют операторы Гекке, не изменяющие индекса формы Якоби.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha\cdot\beta = q^2$, тогда форма

$$\varphi|_k P_{\mathbb{Z}}\left[q^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right]_2 P_{\mathbb{Z}}$$

имеет тот же вес и индекс, что и форма Якоби φ .

Формы Якоби индекса I в случае групп Sp_2 и $SU(2,2)$ используются для построения модулярных форм из пространства Маасса для этих групп (см. [8], [I], [3], [4], [9]). Для ортогональной группы сигнатуры $(2,n)$ справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть дана произвольная форма Якоби $\varphi(z,\tau)$ веса k и индекса I. Определим функцию F на пространстве $\mathcal{H}_+^{n+2}$, полагая

$$F((\omega,z,\tau)) = \sum_{q=1}^{\infty} (\varphi|_k T_-(q))(z,\tau)\cdot e(q,\omega).$$

Тогда функция F инвариантна (см. (4)) относительно всех преобразований вида $diag(E_2,\gamma,E_2)$, где γ - единица формы S_0 , и всех унипотентных элементов, содержащихся в группе Γ_L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3, элементы $T_-(q)$ имеют следующее разложение на левые смежные классы:

$$T_-(q) = \sum_{\substack{ad=q\\ b \bmod d}} P_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} d^{-1} & q^{-1}b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}_2 . \qquad (19)$$

Пусть

$$\varphi(z,\tau) = \sum_{\substack{2n\geq S_0[\ell]\\ n\in\mathbb{Z},\,\ell\in L_0^*}} f(\ell,n)\, e(n\tau + {}^t\ell S_0 z)$$

- разложение Фурье формы φ . Функция $F(Z)$ инвариантна относительно действия элементов из параболической группы $P_{\mathbb{Z}}$. Найдем ее разложение Фурье. В силу (19) и определения форм Якоби,

$$F(\omega,z,\tau) = \sum_{\substack{ad=q\\ b \bmod d}} a^k \varphi(az,\frac{a\tau+b}{d})\, e(m\omega) =$$

$$= \sum_{ad=q} a^k \sum_{n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, d)} \sum_{\ell\in L_0^*} df(n_1 d,\ell)\, e(n_1 a\tau + a\,{}^t\ell S_0 z + m\omega) .$$

После замены индексов суммирования получаем

$$F(\omega,z,\tau) = q \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z},\,\ell\in L_0^*\\ 2mn\geq S_0[\ell]}} a^{k-1} \sum_{\substack{a\,|\,(n,m)\\ a^{-1}\ell\in L_0^*}} f\left(\frac{nm}{a^2},\frac{\ell}{a}\right) e(n\tau + {}^t\ell S_0 z + m\omega) .$$

Как видно из последнего разложения, функция $F(\omega,z,\tau)$

инвариантна относительно замены переменных $\omega \to \tau$, $\tau \to \omega$. Легко показать, что это преобразование вместе с унипотентными элементами параболической группы $P_{\mathbb{Z}}$ порождают все унипотентные элементы из группы Γ_L. Предложение доказано.

В заключение укажем еще раз на связь между кольцом Гекке H_p и кольцом Гекке всей ортогональной группы Γ_L. Для любого простого p локальное кольцо Гекке группы Γ_{L_p} является подкольцом локального кольца H_p. Используя это вложение и соотношение между операторами Гекке, можно доказать, что пространство функций, построенных по формам Якоби индекса I, инвариантно относительно действия операторов Гекке (детали см. в [3], где был исследован случай группы $SU(2,2)$, отвечающий группе $SO(2,4)$). Как показывает предложение 5, в этом контексте лучше использовать спинорную группу квадратичной формы S вместо ортогональной группы этой формы.

Литература

I. E i c h l e r M., Z a g i e r D. On the theory of Jacobi forms. - Progress in Math.,1985, vol.55, 156 p.

2. П я т е ц к и й - Ш а п и р о И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, I96I.

3. Г р и ц е н к о В.А. Пространство Маасса для $SU(2,2)$. Операторы Гекке и дзета-функции. Препринты ЛОМИ. Р-7-85. Л., 1985. 23 с. (Публикуется в: Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1987, т.I83).

4. K o j i m a H. An arithmetic of hermitian modular forms of degree two. - Invent.Math., 1982, vol.69, N 2, p.217-227.

5. G r i t s e n k o V. Dirichlet series with Euler product in the theory of modular forms with respect to the orthogonal groups.Preprint LOMI. E-11-87. 1987. 23 p.

6. Г р и ц е н к о В.А. Действие модулярных операторов на коэффициенты Фурье-Якоби модулярных форм. - Мат.сб., 1982, т.II9, № 2, с.248-277.

7. S h i m u r a G. On modular forms of half integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.

8. M a a s s H. Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. - Invent.Math., 1979, vol.52, N 1, p.95-104.

9. K r i e g A. The Maaß -Space on the Half-space of quaternions of degree 2. - Math.Ann., Bd 276, N 4, S.675-686.