Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматулин, Особенности распространения слабых возмущений в двухфазных средах с фазовыми переходами,
Прикл. мех. техн. физ., 1970, том 11, выпуск 5, 73–77

https://www.mathnet.ru/pmtf7904

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 15:04:46

ПМТФ, № 5, 1970

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматулин

(Москва)

На основе линеаризированных уравнений гидромеханики [1] и уравнений состояния фаз исследовано распространение слабых возмущений в двухфазных средах, представляющих собой смесь газа с каплями или частицами, с учетом возможных фазовых переходов. Получены зависимости волнового вектора от частоты возмущения. Оценивается влияние массообмена между фазами на характер дисперсионных зависимостей.

Некоторые теоретические и экспериментальные исследования, посвященные распространению звука в двухфазных средах, имеются, например, в [2–5]

Далее везде величины, относящиеся к газу и частицам, снабжены индексом 1 или 2 внизу соответственно. Индекс 0 внизу относится к невозмущенному состоянию, индекс 3 соответствует состоянию насыщения.

1. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии фаз [1] после линеаризации принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = J^\circ - J_0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = J_0 - J^\circ$$

$$\rho_{10} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\alpha \nabla p - \rho_{20} \mathbf{f}, \quad \rho_{20} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = -(1-\alpha) \nabla p + \rho_{20} \mathbf{f} \tag{1.1}$$

$$\rho_{10} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial i_2}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + (J_0 - J^\circ) l_0, \quad \rho_{20} \frac{\partial e_2}{\partial t} = \rho_{20} q - J^\circ l_0 + J_0 p_0 \left(\frac{1}{\rho_{10}^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right)$$

Здесь ρ, p, i, e — возмущения средней плотности, давления, энтальпии и внутренней энергии, α — объемная концентрация газа, l — удельная теплота парообразования, J_0 и J° — соответственно наблюдаемые скорости конденсации и испарения в единице объема смеси.

При заданных соотношениях, отражающих силовое взаимодействие $\mathbf{f}$ теплообмен q и массообмен J_0 и J°, а также при заданных уравнениях состояния фаз система (1.1) является замкнутой. Для $\mathbf{f}$ и q можно принять следующие линейные соотношения, справедливые для ламинарного обтекания одиночной сферы (при достаточно малых числах N_{Re} относительного обтекания)

$$\mathbf{f} = \frac{18\mu_1}{\rho_2^\circ d^2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \qquad q = \frac{12 k_1}{\rho_2^\circ d^2} (T_1 - T_2) \tag{1.2}$$

Здесь μ_1 — вязкость, k_1 — коэффициент теплопередачи вещества первой фазы, ρ_2° — плотность вещества капель (частиц), d — их размер (диаметр).

Влияние объемного содержания частиц на силу трения между фазами в области малых чисел N_{Re} можно учесть с помощью дополнительного множителя [6,7]

$$\varphi = (1 / \alpha)^{3.75} \tag{1.3}$$

Уравнения кинетики фазовых переходов при малых перегревах или переохлаждениях $(T_i - T_3) / T_3$ могут быть записаны в виде [1]

$$J_0 = \frac{6(1-\alpha) l}{T_0 d} F_0 (T_3 - T_1), \quad J^\circ = \frac{6(1-\alpha) l}{T_0 d} F^\circ (T_2 - T_3) \tag{1.4}$$

где F_0 и F° — коэффициенты, определяемые экспериментально или из каких-либо других соображений.

Отметим, что рассмотренные уравнения можно использовать, если линейный масштаб возмущения (длина волны) много больше размера капель, а амплитуды возмущений достаточно малы.

2. Для однокомпонентной двухфазной среды примем следующие уравнения состояния фаз:

$$p = \rho_1^\circ R_1 T_1, \quad i_1(p, T) = c_2(T_3 - T^\circ) + p/\rho_2^\circ + l(p) + c_{p1}(T_1 - T_3) \tag{2.1}$$
$$\rho_2^\circ = \text{const}, \quad i_2(p, T) = c_2(T_2 - T^\circ) + p/\rho_2^\circ \quad (c_{p1}, c_2 = \text{const})$$

Введем безразмерные переменные

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad U = \frac{v}{a}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \Phi = \frac{\rho}{\rho_2^\circ} \quad \left(a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_{10}^\circ}\right) \tag{2.2}$$

и параметры

$$C_1 = \frac{c_{p1}}{\gamma R_1}, \quad C_2 = \frac{c_2}{\gamma R_1}, \quad \theta_3 = \frac{T_3}{T_0}, \quad L = \frac{l_0}{a^2}, \quad r = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \tag{2.3}$$

а также приведенные переменные

$$f^* = \frac{\rho_{20} f}{\rho_2^\circ a}, \quad q^* = \frac{\rho_{20} q}{\rho_2^\circ a^3}, \quad J^* = \frac{J^\circ}{\rho_2^\circ a}, \quad J_* = \frac{J_0}{\rho_2^\circ a}, \quad \tau = at \tag{2.4}$$

Здесь a — скорость звука в первой фазе, τ — приведенное время в единицах длины.

Линеаризируя (2.1) и используя (1.1) — (1.4), (2.2) — (2.4), получаем следующую систему уравнений (одномерный случай):

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + \alpha r \frac{\partial U_1}{\partial x} = J^* - J_*, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} + (1-\alpha)\frac{\partial U_2}{\partial x} = J_* - J^*$$
$$\alpha r \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \frac{\alpha r}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x} + f^* = 0, \quad (1-\alpha)\frac{\partial U_2}{\partial \tau} + \frac{(1-\alpha) r}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x} - f^* = 0$$
$$\alpha r C_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + (1-\alpha) C_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - \alpha r\left(\frac{1}{\gamma} - \beta\right)\frac{\partial P}{\partial \tau} = (J_* - J^*) L_0$$
$$(1-\alpha) C_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = (1-\alpha) q^* - LJ^* + \frac{1-r}{\gamma} J_* \tag{2.5}$$
$$P = \theta_1 + \Phi_1/\alpha r + \Phi_2/\alpha, \quad \beta = (C_2 - C_1)\theta_3' + r/\gamma + L'$$
$$f^* = (1-\alpha)\frac{U_1 - U_2}{\tau_v} \quad \left(\tau_v = \frac{\rho_2^\circ d^2 a}{18\mu_1}\right), \quad q^* = C_2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{\tau_T} \quad \left(\tau_T = \frac{\rho_2^\circ d^2 a c_2}{12 k_1}\right)$$
$$J^* = (1-\alpha)\frac{\theta_2 - \theta_3' P}{\tau^\circ} \quad \left(\tau^\circ = \frac{\rho_2^\circ d a}{6 l F^\circ}\right), \quad J_* = (1-\alpha)\frac{\theta_3' P - \theta_1}{\tau_0} \quad \left(\tau_0 = \frac{\rho_2^\circ d a}{6 l F_0}\right)$$

Здесь и далее штрихи означают полную производную по безразмерному давлению; τ_v, τ_T, τ°, τ_0 — приведенные времена релаксации (имеют размерность длины).

Рассмотрим распространение плоских периодических волн в среде, описываемой уравнениями (2.5); решения этой системы ищем в виде затухающей бегущей волны $\exp[i(kx - \omega t)]$. Условие существования нетривиального решения такого типа приводит к следующей связи между волновым вектором и безразмерной частотой возмущения η ($\eta = \omega\tau_T / a$):

$$K^2 = \eta^2 \frac{\alpha\gamma}{\tau_T^2 m_*} \frac{(1 + m - i\eta\tau_v/\tau_T)}{(1/\alpha m_* - i\eta\tau_v/\tau_T)}\left(1 + \frac{\Pi_0 + \pi_1\Pi_3 - \Pi_1\Pi_4}{\Pi_2\Pi_4 - \pi_2\Pi_3}\right)$$
$$m = (1-\alpha)/\alpha r, \quad m^* = 1 - \alpha(r - 1), \quad \Pi_0 = \operatorname{Re}\Pi_0 + i \operatorname{Im}\Pi_0$$

$$\operatorname{Re}\Pi_0 = (1-r)\left[\theta_3'(C_1+mC_2)+\beta-\frac{1}{\gamma}\right]\left[(1-\alpha)\left(\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau^\circ}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\alpha)\tau_T}{C_2\tau_0\tau^\circ}\left(\frac{1-r}{\gamma}-L\right)\right]$$
$$\operatorname{Im}\Pi_0 = \eta(r-1)(1-\alpha)\left[\frac{\gamma\theta_3'C_2+\gamma L'+r-1}{\gamma\tau_0}+\frac{\theta_3'C_1}{\tau^\circ}\right] \tag{2.6}$$
$$\Pi_1 = (1-\alpha)\theta_3'\left(\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{\tau^\circ}\right)-i\eta\left(\frac{1}{\gamma}-\beta\right)\frac{\alpha r}{\tau_T},\quad \Pi_2 = (1-\alpha)\frac{L}{\tau_0}-i\eta\frac{\alpha r C_1}{\tau_T},$$
$$\Pi_3 = (1-\alpha)\left(\frac{L}{\tau^\circ}-i\eta\frac{C_2}{\tau_T}\right),\quad \Pi_4 = 1+\frac{\tau_T}{\tau^\circ}\frac{L}{C_2}-i\eta$$
$$\pi_1 = \frac{\theta_3'\tau_T}{C_2}\left(\frac{L}{\tau^\circ}+\frac{1-r}{\gamma\tau_0}\right),\quad \pi_2 = \frac{1-r}{\gamma C_2}\frac{\tau_T}{\tau_0}-1$$

Из (2.6) предельным переходом могут быть получены соотношения для равновесной a^e ($\eta \to 0$) и замороженной a^f ($\eta \to \infty$) скоростей звука в газовзвеси с фазовыми переходами

$$a^e = a_1^e G^{1/2}[(G+\theta_3'C_2m)(1+m)\alpha^2]^{-1/2}$$
$$\left(G = \frac{L(1-\theta_3')}{1-r}+\theta_3'C_2+L'+\frac{r-1}{\gamma},\quad a_1^e = \left[\frac{L}{(1-r)G}\frac{p_0}{\rho_1^\circ}\right]^{1/2}\right) \tag{2.7}$$
$$a^f = a_1^f\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ}\right]^{1/2}\qquad \left(a_1^f = \left[\frac{C_1}{\beta+C_1/\gamma}\frac{p_0}{\rho_1^\circ}\right]^{1/2}\right)$$

При $\alpha = 1$ ($m = 0$) имеем $a^e = a_1^e$ и $a^f = a_1^f$. Из (2.7) видно, что $a_1^e \neq a_1^f$, так как a^e соответствует волне, за которой смесь является насыщенной ($T_1 = T_2 = T_3$). Но при $\alpha \approx 1$, если амплитуда волны ненулевая, за волной может оказаться перегретый пар ($m = 0$, $\alpha = 1$, $T_1 > T_3$). Учет этого обстоятельства устраняет кажущееся на первый взгляд несовпадение a_1^e и a_1^f. В чистом паре равновесная и замороженные скорости звука совпадают и равны a_1^f.

3. Аналогично рассмотрен более простой случай газовзвеси без фазовых переходов, когда уравнения состояния фаз имеют вид

$$p = \rho_1^\circ R_1 T_1,\quad i_1 = c_{p1}T_1,\quad \rho_2^\circ = \text{const},\quad e_2 = c_2T_2\qquad (c_{p1},\ c_2 = \text{const}) \tag{3.1}$$

В этом случае существует следующая связь между волновым числом и безразмерной частотой возмущения:

$$K^2 = \eta^2\frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*}\frac{(1+m-i\eta\tau_v/\tau_T)(\gamma C_*/C_1-i\eta)}{(1/\alpha m_*-i\eta\tau_v/\tau_T)(\Gamma C_*/C_1-i\eta)} \tag{3.2}$$
$$\left(\Gamma = \frac{c_{p1}+mc_2}{c_{p1}-R_1+mc_2},\qquad c_0 = \frac{(c_{p1}-R_1)\alpha\rho_1^\circ+c_2(1-\alpha)\rho_2^\circ}{\alpha\rho_1^\circ+(1-\alpha)\rho_2^\circ},\qquad c_* = c_0(1+m)\right)$$

Здесь Γ — эффективный показатель адиабаты смеси, C_0 — теплоемкость единицы массы смеси при постоянном объеме.

Выражения для равновесной и замороженной скоростей звука в таких газовзвесях имеют вид

$$a^e = a\left[\frac{\Gamma}{\gamma\alpha^2(1+m)}\right]^{1/2},\qquad a^f = a\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ}\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

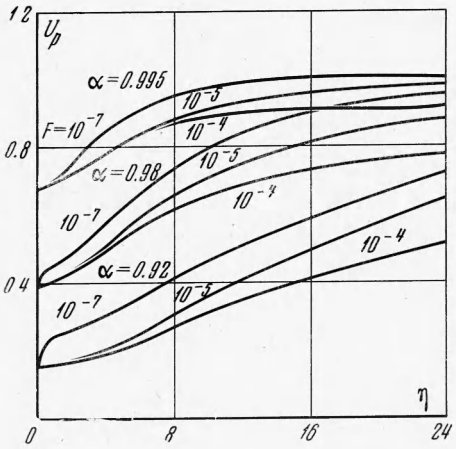
Коэффициент затухания δ при $\eta \to \infty$ стремится к значению δ^f

$$\delta^f = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ}\right]^{-1/2}\left[\frac{1}{\tau_T^2}\frac{C_*}{C_1}(\gamma-\Gamma)+\frac{1}{\tau_v\tau_T}\frac{m(1-r)^2}{1+mr^2}\right] \tag{3.4}$$

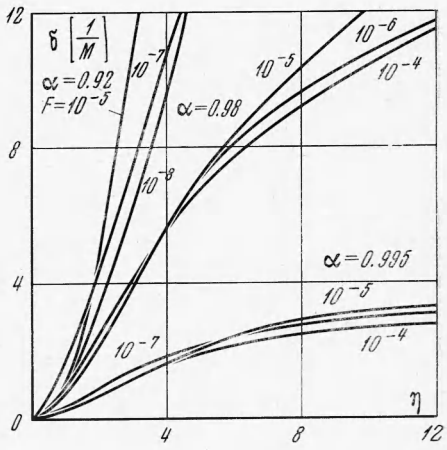
4. Интересно оценить влияние фазовых переходов на характер дисперсионных зависимостей.

На фиг. 1, 2 приведены кривые, отображающие характер зависимостей фазовой скорости U_p и коэффициента затухания δ от частоты внешнего возмущения.

Кривые построены для различных значений коэффициента $F = F^\circ = F_0$ и различных объемных паросодержаний в двухфазной пароводяной смеси при начальном давлении $p_0 = 10$ *бар* со следующими начальными термодинамическими данными: $a = (\gamma p_0 / \rho_{10}^0)^{1/2} = 502$ *м/сек*, $R_1 = 429.5$ *дж/кг·град*, $\mu_1 = 16.05 \cdot 10^{-6}$ *н·сек/м*^{2}, $k_1 = 314.4 \cdot 10^{-4}$ *вт/м·град*, $c_2 = 4.40 \cdot 10^3$ *дж/кг·град*. Приводимые кривые соответствуют диаметру частиц $d = 10^{-5}$ *м*.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчеты показывают, что при $F \geqslant 10^{-4}$ *кг·сек/м*^{4} и $F \leqslant 10^{-7}$ *кг·сек/м*^{4} в рассматриваемой области частот процесс практически не зависит от значения этого коэффициента. При малых частотах ($\eta \to 0$), а также при достаточно больших частотах ($\eta \to \infty$) влияние изменения F может стать более сильным. Отметим, что величина коэффициента F может быть определена из измерения скорости распространения и коэффициента затухания слабого возмущения в однокомпонентной двухфазной смеси. Однако отсутствие надежно контролируемых экспериментальных данных затрудняет сравнение полученных результатов с экспериментом.

С ростом объемного содержания капель влияние фазовой и температурной неравновесности увеличивается, однако в целом остается достаточно малым. Как правило, наиболее существенным процессом, влияющим на дисперсионные зависимости, является трение между фазами. Однако с увеличением давления смеси роль трения уменьшается. В пределе при $r \to 1$ скоростная неравновесность отсутствует и вязкостные дисперсия и диссипация равны нулю.

Относительная интенсивность процессов диссипации зависит также от соотношений между временами релаксации рассматриваемых процессов. Заметим, что соотношения между временами релаксации по скорости и температуре и временами релаксации по фазовым переходам определяются степенью дисперсности среды. При принятых допущениях относительно кинетики испарения и конденсации с уменьшением размеров диспергированной фазы относительная роль фазовых переходов в диссипации энергии возрастает и при достаточно малых размерах капель их влияние может стать преобладающим. Непосредственный анализ влияния явления массообмена между фазами на распространение возмущения в двухфазной среде можно выполнить, используя ее односкоростную и однотемпературную мо-

дель. Отметим, что если равновесие по фазовым переходам означает и равновесие по температурам, то обратное, вообще говоря, неверно. При равенстве температур фаз в волне могут происходить неравновесные фазовые переходы, вызывая дисперсию и диссипацию. Соответствующее рассматриваемому случаю дисперсионное соотношение имеет вид

$$K^2 = \eta^2 \frac{\gamma\alpha^2(1+m)}{\tau_T^2}\left[\frac{2m(1-r)(G+C_2\theta_3'm)\tau_T/\tau_0 - i\eta(Q+C_2m)}{2mL\tau_T/\tau_0 - i\eta(C_1+mC_2)}\right]$$

$$(Q = G + (1-\theta_3')(C_1 - L/(1-r))) \qquad (4.1)$$

Здесь G и равновесная скорость распространения возмущения вычисляются по (2.7). Для замороженной по массообмену скорости звука имеем выражение

$$(a_*^f)^2 = \frac{a^2}{\gamma\alpha^2(1+m)}\,\frac{C_1+mC_2}{C_1(1-\theta_3')+C_2(m+\theta_3')+L'+(r-1)/\gamma} \qquad (4.2)$$

Из (2.7) и (4.2) видно, что $a^f \neq a_*^f$, так как a_*^f вычислялась для смеси, равновесной по скоростям и температурам. В чистом паре ($\alpha = 1$) $a_1^f = a_{1*}^f$.

Некоторые оценки показывают, что коэффициенты F в линейных соотношениях для скорости фазовых переходов весьма велики. Поэтому при достаточно малых частотах внешнего возмущения однокомпонентная двухфазная среда обладает равновесным фазовым составом и удовлетворяет условию равенства температур фаз. В этом случае дисперсия и диссипация обусловлены исключительно вязкостным взаимодействием фаз, а дисперсионное соотношение имеет вид

$$K^2 = \eta^2 \frac{1}{(U_1^e)^2}\,\frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*}\,\frac{(1+m-i\eta\tau_v/\tau_T)}{(1/\alpha m_* - i\eta\tau_v/\tau_T)} \qquad (4.3)$$

Отметим, что при $r < 0.1$ учет присоединенной массы не оказывает существенного влияния на дисперсионные зависимости. С учетом этого эффекта дисперсионная связь (3.2) запишется так:

$$K^2 = \eta^2 \frac{\alpha}{\tau_T^2 m_*}\,\frac{[1+m-i\eta(1+0.5r(1+m))\tau_v/\tau_T][\gamma C_*/C_1 - i\eta]}{[1/\alpha m_* - i\eta(1+0.5r)\tau_v/\tau_T][\Gamma C_*/C_1 - i\eta]} \qquad (4.4)$$

Любое малое возмущение произвольного профиля может быть составлено из суперпозиции гармонических волн. Согласно общим результатам, изложенным, например, в [8] для случая реагирующего газа, можно утверждать, что передний фронт произвольного импульса движется со скоростью a^f и затухает по экспоненте с показателем $(-\delta^f x)$.

В заключение отметим, что полученные выражения (2.7) и (3.3) для равновесных и замороженных скоростей звука совпадают с соотношениями, следующими из рассмотрения условий существования волн уплотнения в двухфазных средах [9].

Поступила 6 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Дейч М. Е., Филиппов, Г. А., Стекольщиков Е. В. Скорость звука в двухфазных средах. Теплоэнергетика, 1964, № 8.
3. Семенов Н. И., Костерин С. И. Результаты исследования скорости звука в движущихся газожидкостных смесях. Теплоэнергетика, 1964, № 6.
4. Золотарев П. П. О распространении слабых возмущений в смесях. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
5. Städtke H. Speed of sound and shock waves in two phase flows. Electr. MHD. Proc. Sympos. Warsaw; vol 3, Vienna, 1968.
6. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О.М. Приближенные закономерности гидравлики псевдоожиженного слоя и стесненного падения. Изв. вузов, Нефть и газ, 1958, № 1.
7. Буевич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
8. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., «Мир», 1967.
9. Нигматулин Р. И. К вопросу о волнах уплотнения в двухфазных средах. Вестн. МГУ, Матем. и механ., 1969, № 4.