Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. Д. Бураго, Реализация двумерного метризованного многообразия поверхностью в E^3, *Докл. АН СССР*, 1960, том 135, номер 6, 1301–1302

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.83
23 января 2025 г., 04:11:16

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 135, № 6

МАТЕМАТИКА

Ю. Д. БУРАГО

РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНОГО МЕТРИЗОВАННОГО МНОГООБРАЗИЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ В E^3

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 VII 1960)

1. В работах Дж. Нэша [1] и Н. Кейпера [2] осуществлено изометричное вложение n-мерного риманова пространства R^n в $(n+1)$-мерное эвклидово пространство E^{n+1}. В этих работах метрика в R^n задается с помощью квадратичной формы с коэффициентами из C^1.

В случае двумерного многообразия в настоящей работе строится реализация более общих метрик, заданных функцией пары точек. Из этих результатов следует, в частности, что геометрию всякого многообразия ограниченной кривизны А. Д. Александрова [3] можно рассматривать как внутреннюю геометрию некоторой поверхности в E^3.

2. Пусть в многообразии M задана внутренняя метрика ρ и последовательность многогранных метрик ρ_n. Метрики ρ_n называются пропорционально сходящимися к ρ, если $\dfrac{\rho_n(X, Y)}{\rho(X, Y)} \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно относительно X, Y.

Если метрика ρ имеет в каждой точке касательный конус (в смысле внутренней геометрии), то, как доказал Ю. Г. Решетняк [4], ρ аппроксимируется пропорционально сходящимися многогранными метриками.

Обозначим через Φ класс несамопересекающихся поверхностей в E^3, у которых в каждой точке существует касательная плоскость. (Эти поверхности, вообще говоря, не являются гладкими.)

Теорема. *Пусть метрика ρ, заданная на двумерном ориентируемом многообразии M, допускает аппроксимацию пропорционально сходящимися многогранными метриками ρ_n. Тогда существует поверхность $F \in \Phi$ с внутренней метрикой ρ.*

Следствие 1. Пусть в каждой точке двумерного ориентируемого многообразия M с метрикой ρ существует касательный конус. Тогда существует поверхность $F \in \Phi$ с внутренней метрикой ρ.

Следствие 2. Всякое ориентируемое многообразие ограниченной кривизны, не имеющее точек с кривизной 2π, с границей в виде кривой ограниченной вариации поворота или лишенное границы, изометрично некоторой поверхности $F \in \Phi$.

3. Наметим план доказательства теоремы. Пусть ρ — произвольная метрика, удовлетворяющая условию теоремы; ρ_n — многогранные метрики, пропорционально сходящиеся к ρ. С каждой метрикой ρ_n свяжем некоторое топологическое отображение φ_n многообразия M на себя.

Лемма 1. *Последовательность метрик ρ_n и отображений φ_n можно выбрать так, что*:

1) $\rho_{n+1}(\varphi_n(X), \varphi_n(Y)) > \rho_n(X, Y)$;

2) $\varphi_n \in C^\infty(D_n)$, $D_n = M \setminus \bigcup A_i$, *где A_i — вершины всех метрик ρ_k для $k \leqslant n$*;

3) $\rho_{n+1}(X, \varphi_n(X)) \to 0$ *равномерно относительно X*;

4) $\dfrac{\rho_{n+1}(\varphi_n(X), \varphi_n^{-}(Y))}{\rho(X, Y)} \to 1$ *равномерно относительно* X, Y,

причем последовательности 3)—4) *сходятся столь же быстро, как и* $\rho_n(X, Y) \to \rho(X, Y)$.

Отображения φ_n строятся при помощи триангуляций многообразия M. В основе этих построений лежит:

Лемма 2. *Пусть полные углы вокруг вершин и углы между соседними ребрами границы развертки* K *ограничены снизу числом* $\alpha > 0$. *Тогда развертку* K *можно разбить на плоские треугольники, прилегающие по целым сторонам, так что все углы получившихся треугольников ограничены снизу числом* $C(\alpha) > 0$, *зависящим только от* α.

Доказательство леммы 2 сходно с доказательством теоремы 2 работы ([5]).

С помощью конструкции Кейпера каждая метрика ρ_n (начиная с некоторого достаточно большого n) вкладывается в E^3 в виде поверхности $F_n \in C^\infty(D_n)$. Поверхность $F_n \in \Phi$, имеет метрику, близкую к ρ_n, и расположена вблизи поверхности F_{n-1}, которая, ввиду 1) — 2), служит для ρ_n «коротким» вложением (см. ([2])). При надлежащем выборе параметров в формулах Кейпера для поверхностей F_n искомая поверхность F, реализующая метрику ρ, является пределом последовательности поверхностей F_n. Доказательство этого факта основывается на свойствах 2) — 4) метрик ρ_n.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 VI 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Нэш, Сборн. переводов Математика, **1**, № 2, 3 (1957). [2] Н. Кейпер, Там же, стр. 17. [3] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [4] Ю. Г. Решетняк, Изв. Сибирск. отд. АН СССР, **10**, 15 (1959). [5] Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, Вестн. ЛГУ, **7**, 66 (1960).