



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. O. Vatulyan, D. K. Plotnikov, A. A. Poddubny, On some models of indentation for functionally-graded coatings, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2018, Volume 18, Issue 4, 421–432

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.211.24.175

November 4, 2024, 13:28:10





УДК 539.3

## О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ИНДЕНТИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ

А. О. Ватульян, Д. К. Плотников., А. А. Поддубный

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, vatulyan@math.rsu.ru  
Плотников Дмитрий Константинович, аспирант кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, dplotnikov@sfnu.ru

Поддубный Алексей Андреевич, аспирант кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344006, Ростов-на-Дону, Б. Садовая, 105/42, poddubny\_sfnu@mail.ru

В работе представлен ряд приближенных моделей деформирования неоднородной упругой полосы, отражающих особенности распределения свойств неоднородной структуры по толщине. В основе моделей лежат гипотезы о характере изменения компонент поля перемещений, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности: непрерывные, а также разрывные или имеющие сильную градиентность. Построены решения контактной задачи для разных законов неоднородности. Проведен сравнительный анализ моделей, выполнено сравнение результатов решений с решением, построенным на основе конечно-элементной модели.

*Ключевые слова:* индентирование, покрытие, функционально-градиентный материал, неоднородная полоса.

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

### ВВЕДЕНИЕ

При производстве различных изделий с целью улучшения их эксплуатационных характеристик широко применяется нанесение покрытий. Защитные и упрочняющие покрытия используются при изготовлении деталей машин, различных элементов инженерных конструкций, режущего инструмента, медицинских приборов и обеспечивают возможность создания изделий повышенной прочности, износостойкости, трещиностойкости, позволяют добиться улучшения трибологических свойств, характеристик теплопроводности, возможности эксплуатации в экстремальных температурных условиях и др. [1].

В настоящее время одним из наиболее широко применяемых и быстро развивающихся типов покрытий являются покрытия из функционально-градиентных материалов. Отличительной особенностью таких покрытий является переменный состав и изменение свойств с глубиной покрытия. Существует множество разнообразных способов нанесения градиентных покрытий на подложку: вакуумное напыление (физическое осаждение из паровой фазы), химическое осаждение из паровой фазы, импульсное лазерное напыление, электрофоретическое осаждение и др. [1, 2].

Эффективность применения градиентных покрытий зависит от знания свойств получаемой неоднородной структуры, поэтому важным этапом в разработке покрытий



является контроль их характеристик. Отметим, что для определения приповерхностных свойств различных материалов, в том числе покрытий, широко применяются методы индентирования [3, 4].

Как правило, исследование контактных задач основано на решении интегрального уравнения с нерегулярным ядром [5]. При исследовании задач о контактном взаимодействии для неоднородных структур ядро интегрального уравнения не может быть найдено в аналитическом виде и строится либо численно, либо на основе приближенных моделей. В [6] разработан численно-аналитический метод построения и решения интегральных уравнений контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородного слоя и полупространства. В [7] представлен численно-аналитический метод решения контактной задачи для функционально-градиентного покрытия, лежащего на упругом полупространстве.

Другим способом исследования контактных задач является построение упрощенных моделей, позволяющих строить ядра интегральных уравнений в аналитическом виде. В [8] проведен асимптотический анализ решения задачи о равновесии однородной упругой полосы в предположении о малости толщины полосы. На его основе построен ряд приближенных моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Решение контактных задач на основе построенных моделей приводит к исследованию некоторых операторных уравнений.

В [9] исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы, построена приближенная модель, в основе которой лежат гипотезы о линейном изменении компонент вектора перемещений по толщине полосы. Построено в аналитическом виде решение контактной задачи для произвольных непрерывных законов неоднородности.

В настоящей работе предложены некоторые подходы к исследованию задач о контактном взаимодействии для неоднородных сред. Представлен ряд моделей деформирования неоднородной упругой полосы, свойства которой могут изменяться как непрерывно, так и разрывным образом, осуществлен сравнительный анализ.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках плоской постановки рассмотрим задачу о контактном взаимодействии жесткого штампа параболической формы с неоднородной упругой полосой толщины  $h$ , жестко сцепленной с недеформируемым основанием. Свяжем с полосой прямоугольную систему координат  $(x_1, x_3)$  с началом в основании полосы, ось  $x_3$  направлена вверх. Коэффициенты Ламе являются произвольными положительными функциями координаты  $x_3$ :  $\lambda = \lambda(x_3)$ ,  $\mu = \mu(x_3)$ .

Уравнения равновесия и определяющие соотношения плоской задачи имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 3, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(x_3) u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu(x_3) \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Считая, что трение между контактными поверхностями штампа и полосы отсут-



ствуем, сформулируем граничные условия задачи:

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R}x_1^2, \quad |x_1| \leq a, \quad (5)$$

где  $a$  — размер площадки контакта,  $\delta$  и  $R$  — внедрение и радиус кривизны параболического штампа соответственно.

Также должно быть выполнено условие равновесия штампа:

$$P = \int_{-a}^a \sigma_{33}(x_1, h) dx_1. \quad (6)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки, локализованной на отрезке  $[-a, a]$ , на верхнюю границу полосы:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, h) &= p_*, \\ p_* &= p(x_1) \quad |x_1| \leq a, \quad p_* = 0 \quad |x_1| > a. \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства обезразмерим задачу, введя безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i h, \quad u_i = \hat{u}_i h, \quad \sigma_{ij} = \mu_0 \hat{\sigma}_{ij}, \\ a &= \beta h, \quad r = Rh, \quad \delta = \delta_* h, \\ \lambda &= \mu_0 f_1, \quad \mu = \mu_0 f_2, \quad p = \mu_0 q, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mu_0$  — характерное значение модуля сдвига полосы, например  $\mu_0 = \max_{0 \leq x_3 \leq h} \mu(x_3)$ .

## 2. МОДЕЛЬ 1

В [9] представлена приближенная модель деформирования неоднородной упругой полосы. В основе модели лежит предположение о линейном характере изменения компонент вектора перемещений по вертикальной координате, а именно

$$\hat{u}_1 = \xi_3 u(\xi_1), \quad \hat{u}_3 = \xi_3 w(\xi_1). \quad (9)$$

Гипотезы (9) удовлетворяют граничным условиям при  $\xi_3 = 0$ , функции  $u(\xi_1)$  и  $w(\xi_1)$  представляют собой перемещения верхней границы полосы. С помощью вариационного принципа Лагранжа построено операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение верхней границы полосы с нормальной нагрузкой

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q'' + a_0 q \quad (10)$$

и стыковые условия на границе области контакта

$$\begin{aligned} u_-(\pm\beta) &= u_+(\pm\beta), \quad u'_-(\pm\beta) = u'_+(\pm\beta), \\ w_-(\pm\beta) &= w_+(\pm\beta), \quad w'_-(\pm\beta) = w'_+(\pm\beta), \end{aligned} \quad (11)$$

где индексами «−» и «+» обозначены решения в области контакта и вне ее; параметры  $a_i, b_i$  зависят от законов неоднородности полосы [9].



Решение уравнения (10) должно удовлетворять условиям (11), а также условиям

$$w \rightarrow 0 \quad (|\xi_1| \rightarrow \infty), \quad q = 0 \quad (|\xi_1| > \beta), \quad w = \delta_* - \frac{1}{2r} \xi_1^2 \quad (|\xi_1| \leq \beta). \quad (12)$$

Пользуясь симметрией задачи, построим решение только для значений  $\xi_1 > 0$ . В области  $\xi_1 > \beta$  примем  $q = 0$  и решение дифференциального уравнения относительно неизвестной функции  $w$ , убывающее при  $\xi_1 \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$w(\xi_1) = C_1 e^{-\lambda_1(\xi_1 - \beta)} + C_2 e^{-\lambda_2(\xi_1 - \beta)}, \quad \lambda_{1,2} = \left[ \frac{1}{2b_2} \left( b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Полагая в соотношении (10)  $w = \delta_* - \frac{1}{2r} \xi_1^2$  в зоне контакта  $0 \leq \xi_1 \leq \beta$ , получим с учетом четности контактное напряжение в виде

$$q(\xi_1) = C_3 \operatorname{ch}(k\xi_1) + B_1 \xi_1^2 + B_0, \quad (14)$$

где

$$B_0 = \frac{1}{ra_1 k^2} \left( b_1 - \frac{b_0}{k^2} + b_0 \delta_* r \right), \quad B_1 = -\frac{b_0}{2ra_1 k^2}, \quad k^2 = \frac{a_0}{a_1}.$$

Из стыковых условий (11) найдем неизвестные  $C_1, C_2, C_3$ , а также установим связь между величиной площадки контакта и глубиной внедрения штампа. Связь между силой, действующей на штамп, и глубиной внедрения определяется из условия равновесия штампа. В аналитическом виде окончательно получим:

$$\delta_* = r^{-1} \left( F_1(\beta) + \frac{1}{2} \beta^2 \right), \quad P = r^{-1} \left( F_2(\beta) + p_1 \beta^3 + p_0 \beta \right), \quad (15)$$

где приняты обозначения

$$F_1(\beta) = \frac{\beta s_2 \operatorname{cth} k \beta + \beta s_1 + s_0}{c_1 \operatorname{cth} k \beta + c_2}, \quad F_2(\beta) = -\frac{2}{a_0} \frac{\beta^2 b_0 s_2 \operatorname{cth} k \beta + \beta^2 b_0 s_0 + \beta s_3 + s_4}{c_1 \operatorname{cth} k \beta + c_2}$$

$$p_0 = 2 \frac{b_2 - b_1}{a_0}, \quad p_1 = -\frac{2}{3} \frac{b_0}{a_0},$$

причем коэффициенты  $c_i, s_i$  зависят от  $a_i, b_i$ .

Отметим, что найденное контактное давление не обращается в ноль на границе области контакта. Такое поведение наблюдается для некоторых приближенных моделей, рассмотренных в [8].

### 3. МОДЕЛЬ 2

Модель, представленная в предыдущем параграфе, основана на линейных по толщине гипотезах и достаточно адекватно описывает деформирование непрерывно-неоднородной полосы, однако такой подход не позволяет учесть возможный разрывный характер законов неоднородности полосы. Рассмотрим другую модель деформирования неоднородной полосы. В качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем следующие:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \psi_1(\xi_3) u(\xi_1), & \hat{u}_3 &= \psi_3(\xi_3) w(\xi_1), \\ \psi_1(\xi_3) &= g_1(\xi_3)/g_1(1), & \psi_3(\xi_3) &= g_3(\xi_3)/g_3(1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$g_1(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_2} d\xi_3, \quad g_3(\xi_3) = \int_0^{\xi_3} \frac{1}{f_1 + 2f_2} d\xi_3.$$



Принятые гипотезы асимптотически удовлетворяют уравнениям равновесия, когда величина области контакта велика по сравнению с толщиной полосы. Отметим, что гипотезы (16) содержат параметры Ламе и, таким образом, законы неоднородности полосы влияют на характер изменения перемещений по толщине. Например, в случае однородной полосы компоненты вектора перемещений представляют собой линейные по  $\xi_3$  функции и совпадают с (9); для полосы, состоящей из нескольких однородных слоев, перемещения являются кусочно-линейными по толщине.

Воспользуемся приближенным подходом, изложенным в [8]. Введем безразмерный функционал потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{11}u'^2 + 2(A_{12}u'w + A_{21}uw') + A_{20}w^2 + A_{10}u^2 + A_{22}w'^2) dx_1 - \int_{-\beta}^{\beta} qw dx_1, \tag{17}$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{10} &= \int_0^1 f_2 \psi_1'^2 d\xi_3, & A_{11} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \psi_1^2 d\xi_3, & A_{12} &= \int_0^1 f_1 \psi_1 \psi_3' d\xi_3, \\ A_{20} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \psi_3'^2 d\xi_3, & A_{21} &= \int_0^1 f_2 \psi_1' \psi_3 d\xi_3, & A_{22} &= \int_0^1 f_2 \psi_3^2 d\xi_3. \end{aligned} \tag{18}$$

По структуре функционал (17) совпадает с функционалом для модели 1 [8], и все выкладки, проведенные в парагр. 2, справедливы и для модели с гипотезами (16), а коэффициенты операторного уравнения задаются выражениями

$$\begin{aligned} a_0 &= A_{10}, & a_1 &= A_{11}, & b_0 &= A_{10}A_{20}, \\ b_1 &= A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, & b_2 &= A_{11}A_{22}. \end{aligned} \tag{19}$$

#### 4. МОДЕЛЬ 3

Вычислительные эксперименты для моделей 1 и 2 показали, что значения горизонтальной компоненты перемещения  $\hat{u}_1$  на порядок меньше, чем  $\hat{u}_3$ , поэтому можно рассмотреть более простую модель [10], в которой принято

$$\hat{u}_1 = 0, \quad \hat{u}_3 = \psi_3(\xi_3)w(\xi_1). \tag{20}$$

Функционал потенциальной энергии с учетом (20) упрощается и принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{20}w^2 + A_{22}w'^2) dx_1 - \int_{-\beta}^{\beta} qw dx_1. \tag{21}$$

Аналогично предыдущим пунктам получим операторное уравнение и стыковые условия:

$$-A_{22}w'' + A_{20}w = q, \tag{22}$$



$$w_-(\pm\beta) = w_+(\pm\beta), \quad w'_-(\pm\beta) = w'_+(\pm\beta). \quad (23)$$

Связь внедрения и площадки контакта для данной модели имеет вид

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2r} \left( \beta^2 + \frac{2}{m}\beta \right), \quad m^2 = \frac{A_{20}}{A_{22}}, \quad (24)$$

зависимость безразмерной силы от величины области контакта дается формулой

$$P_*(\beta) = \frac{2}{r} \left( -\frac{1}{3}A_{20}\beta^3 + \frac{1}{m}A_{20}\beta^2 + A_{22}\beta \right). \quad (25)$$

## 5. МОДЕЛЬ 4

Приведенные выше приближенные модели достаточно адекватны, когда упругие характеристики полосы изменяются непрерывным образом. Однако наибольший интерес представляют собой задачи для покрытий, свойства которых терпят разрывы. Модель 1 предполагает линейное изменение перемещений по всей толщине полосы и не позволяет корректно описать структуру с разрывными свойствами. В модели 2 нарушается стыковка по компонентам напряжений в точках разрыва свойств полосы.

Исследуем задачу для полосы, состоящей из двух полос (полоса 1 и 2). Свойства каждой из полос могут изменяться произвольным гладким образом по толщинной координате, однако будем считать, что при переходе через границу раздела параметры Ламе полосы имеют разрыв. Для двухслойной полосы безразмерный функционал потенциальной энергии запишем в виде

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{S_1} \hat{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dS_1 + \frac{1}{2} \int_{S_2} \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dS_2 - \int_{-\beta}^{\beta} q \hat{u}_3(\xi_3, 1) d\xi_1. \quad (26)$$

В качестве гипотез о характере компонент поля перемещений примем кусочно-линейные законы:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(1)} &= \frac{\xi_3}{h_1} u(\xi_1), & \hat{u}_3^{(1)} &= \frac{\xi_3}{h_1} w(\xi_1), \\ \hat{u}_1^{(2)} &= -\frac{\xi_3 - 1}{h_2} u(\xi_1) + \frac{\xi_3 - h_1}{h_2} U(\xi_1), & \hat{u}_3^{(2)} &= -\frac{\xi_3 - 1}{h_2} w(\xi_1) + \frac{\xi_3 - h_1}{h_2} W(\xi_1), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $h_1, h_2$  — толщины полос, отнесенные к общей толщине полосы. Функции  $u(\xi_1)$  и  $w(\xi_1)$  являются безразмерными смещениями на границе слоев при  $\xi_3 = h_1$ , а  $U(\xi_1)$  и  $W(\xi_1)$  — безразмерные компоненты перемещения верхней границы полосы при  $\xi_3 = 1$ .

Потребуем выполнения условий сопряжения на границе полос для компонент вектора напряжений  $\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{33}$

$$\hat{\sigma}_{13}^{(1)} |_{\xi_3=h_1} = \hat{\sigma}_{13}^{(2)} |_{\xi_3=h_1}, \quad \hat{\sigma}_{33}^{(1)} |_{\xi_3=h_1} = \hat{\sigma}_{33}^{(2)} |_{\xi_3=h_1},$$

что дает соотношения

$$U = \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} G_1 \right) u - h_2 (1 - G_1) w', \quad W = h_2 G_2 u' + \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} G_3 \right) w. \quad (28)$$



$$G_1 = \frac{f_2^{(1)}}{f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1}, \quad G_2 = \frac{f_1^{(1)} - f_1^{(2)}}{f_1^{(2)} + 2f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1}, \quad G_3 = \frac{f_1^{(1)} + 2f_2^{(1)}}{f_1^{(2)} + 2f_2^{(2)}} \Big|_{\xi_3=h_1},$$

$\hat{\lambda}_i, \hat{\mu}_i, i = 1, 2$  — безразмерные параметры Ламе полос 1 и 2.

Исключив из (27) с учетом (28) функции  $U, W$ , получим в полосе 2 следующие представления:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1^{(2)} &= \left[ 1 + \frac{1}{h_1} (\xi_3 - h_1) G_1 \right] u - (\xi_3 - h_1) (1 - G_1) w', \\ \hat{u}_3^{(2)} &= (\xi_3 - h_1) G_2 u' + \left[ 1 + \frac{1}{h_1} (\xi_3 - h_1) G_3 \right] w. \end{aligned} \tag{29}$$

После подстановки соотношений (27), (29) и интегрирования по толщинной координате получим, что функционал (26) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{10}u^2 + A_{11}u'^2 + A_{12}u''^2 + 2A_{13}q_*u' + 2A_{14}u''u + A_{20}w^2 + A_{21}w'^2 + \\ &+ A_{22}w''^2 + 2A_{23}q_*w + 2A_{24}w''w + 2A_{31}u'w + 2A_{32}uw' + 2A_{33}u'w'' + 2A_{34}u''w') d\xi_1, \end{aligned}$$

где параметры  $A_{ij}$  — некоторые интегральные характеристики законов неоднородности, например

$$A_{10} = \frac{1}{h_1^2} \left( G_1^2 \int_{h_1}^1 f_2^{(2)} d\xi_3 + \int_0^{h_1} f_2^{(1)} d\xi_3 \right), \quad A_{12} = G_2^2 \int_{h_1}^1 f_2^{(2)} (\xi_3 - h_1)^2 d\xi_3.$$

С помощью вариационного принципа Лагранжа, варьируя упрощенный функционал, получим систему двух дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами, связывающую компоненты смещения на границе полос с нагрузкой на верхней границе:

$$\begin{aligned} A_{12}u^{IV} + (A_{34} - A_{33})w''' + (2A_{14} - A_{11})u'' + (A_{32} - A_{31})w' + A_{10}u &= A_{13}q', \\ A_{22}w^{IV} - (A_{34} - A_{33})u''' + (2A_{24} - A_{21})w'' - (A_{32} - A_{31})u' + A_{20}w &= -A_{23}q. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье, установим связь между трансформантами компонент перемещений и нагрузкой в виде

$$\tilde{u} = K_u(\alpha)\tilde{q}, \quad \tilde{w} = K_w(\alpha)\tilde{q}.$$

Воспользовавшись соотношениями (28), построим передаточную функцию для данной задачи:

$$\tilde{W} = K(\alpha)\tilde{q}, \quad K(\alpha) = \frac{a_3\alpha^6 + a_2\alpha^4 + a_1\alpha^2 + a_0}{b_4\alpha^8 + b_3\alpha^6 + b_2\alpha^4 + b_1\alpha^2 + b_0},$$

и операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе с нагрузкой:

$$b_4W^{(8)} - b_3W^{(6)} + b_2W^{(4)} - b_1W'' + b_0W = -a_3q^{(6)} + a_2q^{(4)} - a_1q'' + a_0q. \tag{30}$$





На основе операторного уравнения (30) можно сформулировать интегральное уравнение контактной задачи:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1) q(\eta) d\eta = -\delta_* + \frac{1}{2r} \xi_1^2, \quad (31)$$

причем ядро интегрального уравнения (31) представимо в форме интеграла Фурье:

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad t = \eta - \xi_1,$$

или в виде

$$k(t) = 2\pi i \sum_{k=1}^4 R_k e^{iz_k |t|}, \quad (32)$$

где  $z_k$  — полюса рациональной функции  $K(\alpha)$ , лежащие в верхней полуплоскости, и  $R_k = \operatorname{Res}_{\alpha=z_k} K(\alpha)$ .

Аналогичным изложенному в парагр. 2 образом строится решение операторного уравнения в контактной зоне и вне области контакта. В силу громоздкости это решение не приведено.

## 6. СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ниже приведены результаты вычислительных экспериментов для описанных в работе моделей, а также проведено сравнение приближенных решений с решениями, построенными на основе конечно-элементной (КЭ) модели для прямоугольника конечной длины  $2l$  с соотношением  $h/l = 0.2$ . Решения на основе метода конечных элементов (МКЭ) построены с помощью КЭ пакета ANSYS. Контактная задача решена для непрерывных (модели 1–3) и разрывных (модели 2, 4) законов неоднородности. В КЭ модели непрерывные законы неоднородности смоделированы путем создания многослойного тела (10 слоев) с различными значениями параметров Ламе в слоях.

На рис. 1 представлено сравнение результатов решения контактной задачи для непрерывных законов неоднородности. В качестве примера выбран закон  $f_2 = 0.25(1 + 3\xi_3^3)$ ,  $f_1 = 1.63f_2$ , что соответствует значению коэффициента Пуассона  $\nu = 0.31$ . Вычисления производились для  $r = 10$ .

Приближенные модели дают завышенное значение силы при одинаковом внедрении и большие значения деформации по сравнению с МКЭ. Кривые вертикального смещения для моделей 1–3 отличаются незначительно, однако модель 1 дает существенно большее завышение силы по сравнению с моделями 2, 3. На рис. 1, а видно, что приближенные модели не отражают эффекта возвышения поверхности вблизи контактной зоны. Отметим, что для приведенного примера результаты решения контактной задачи для моделей 2 и 3 практически совпадают, что говорит о целесообразности использования более простых моделей, не учитывающих компоненту перемещения  $\hat{u}_1$  для полосы с непрерывно изменяющимися свойствами.

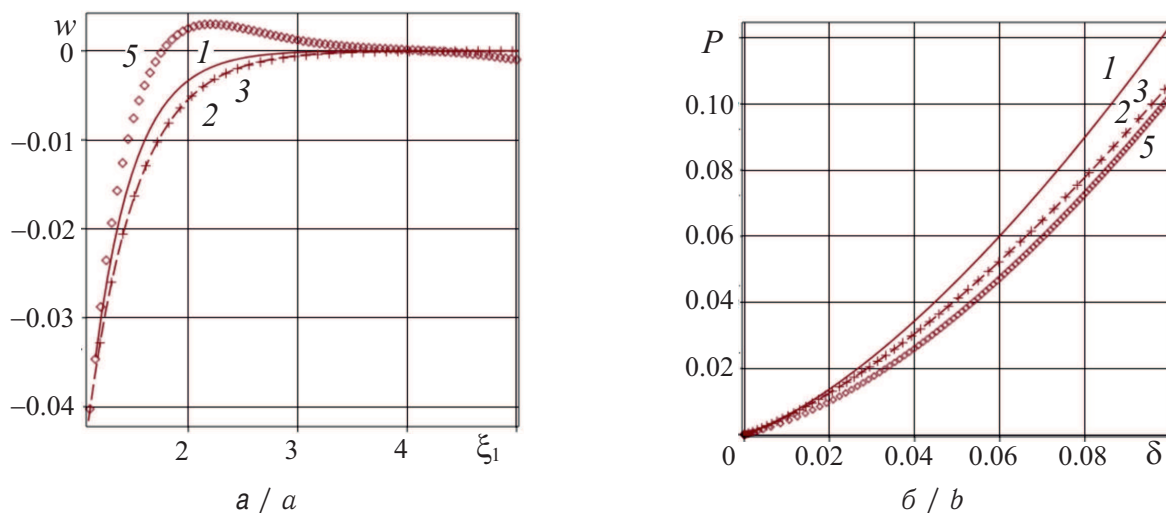


Рис. 1. Вертикальное смещение верхней границы (а) и зависимость «сила-внедрение» (б) для непрерывных законов неоднородности. На рис. 1–3 номера кривых 1–4 соответствуют номерам приближенных моделей, кривая 5 — конечно-элементной модели  
 Fig. 1. Vertical displacement of the upper border (a) and dependence „Force-Indentation“ (b) for continuous laws of heterogeneity. In Fig. 1–3 numbers of curves 1–4 correspond to the numbers of approximate models, curve 5 to the finite element model

На рис. 2 приведены результаты решения контактной задачи для полосы, состоящей из двух полос. Каждая из полос имеет постоянные свойства по толщине. Вычислительный эксперимент проведен для следующих значений параметров:  $G_1 = 0.1$ ,  $\nu = 0.31$ ,  $r = 10$ . Решение контактной задачи на основе модели 4 показывает хорошее соответствие с решением МКЭ.

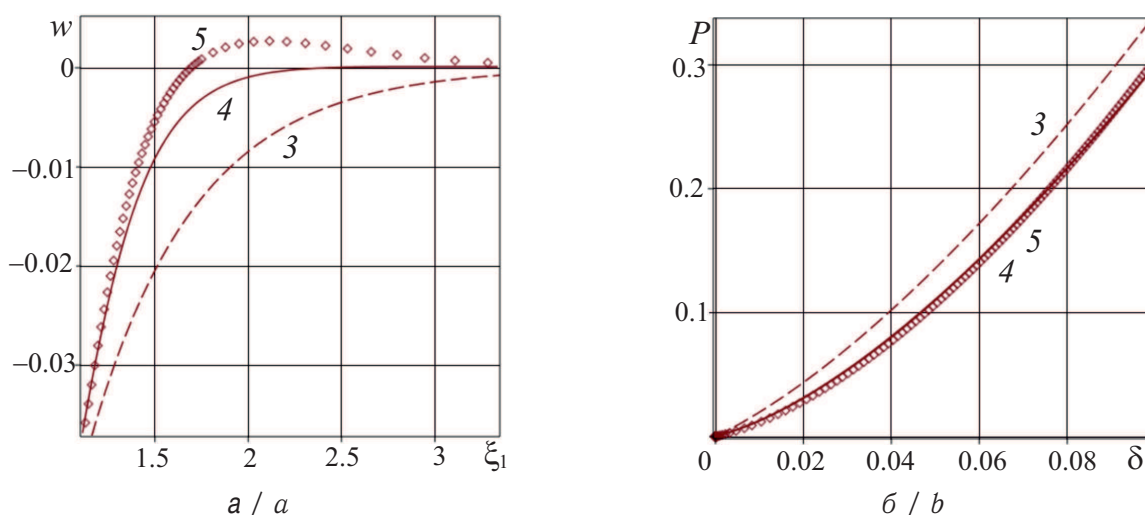


Рис. 2. Вертикальное смещение верхней границы (а) и зависимость «сила-внедрение» (б) для разрывных законов неоднородности  
 Fig. 2. Vertical displacement of the upper border (a) and dependence „Force-Indentation“ (b) for discontinuous laws of heterogeneity



На рис. 3 представлено распределение контактного давления под штампом. Отметим, что приближенная модель дает локальный максимум в распределении контактного давления вблизи границы контактной области. В серии расчетов варьировалось и отношение  $h/l$ , все представленные выше выводы справедливы и для больших значений вплоть до  $h/l = 1$ . Представленные приближенные модели позволяют рассматривать контактные задачи как для непрерывно-неоднородной полосы, так и для полосы со свойствами, изменяющимися разрывным образом по вертикальной координате, и могут служить основой для решения обратных задач.

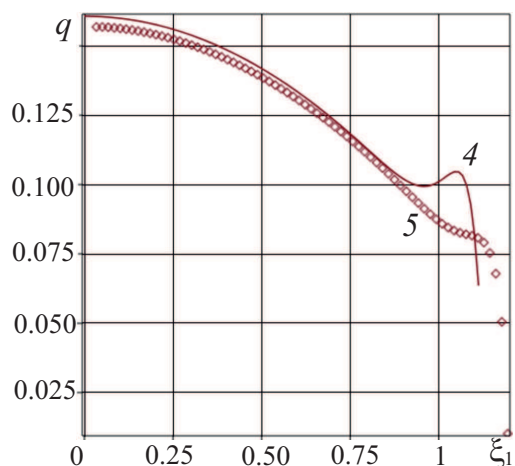


Рис. 3. Контактное давление под штампом

Fig. 3. Contact pressure under punch

**Благодарности.** Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00069).

#### Библиографический список

1. Grainger S., Blunt. J. Engineering Coatings: Design and Application. Woodhead Publ. Ltd, UK, 1998. 336 p.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Materials Today. 2016. Vol. 5. P. 223–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Головин Ю. И. Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикроразмерах, тонких поверхностных слоях и пленках // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 12. С. 2113–2142.
4. Oliver W. C., Pharr G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. Mater. Res. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>.
5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М. : Наука, 1974. 456 с.
6. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. В. Белоконь, Л. И. Кренин, И. С. Трубочник. М. : Физматлит, 2006. 240 с.
7. Волков С. С., Васильев А. С., Айзикович С. М., Селезнев Н. М., Леонтьева А. В. Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
8. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. : Наука, 1983. 488 с.
9. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Об индентировании неоднородной полосы // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2017. № 3. С. 22–29.
10. Ватульян А. О., Коссович Е. Л., Плотников Д. К. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 94–100.



**Образец для цитирования:**

Ватульян А. О., Плотников Д. К., Поддубный А. А. О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

## On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings

A. O. Vatulyan, D. K. Plotnikov, A. A. Poddubny

Alexander O. Vatulyan, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru)

Dmitry V. Plotnikov, <https://orcid.org/0000-0002-2989-1949>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, [dplotnikov@sfnu.ru](mailto:dplotnikov@sfnu.ru)

Alexey A. Poddubny, <https://orcid.org/0000-0002-5565-420X>, Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science named after of I. I. Vorovich, Southern Federal University, 105/42 Bolshaya Sadovaya St., Rostov on Don 344006, Russia, [poddubny\\_sfnu@mail.ru](mailto:poddubny_sfnu@mail.ru)

The paper presents approximate models of deformation for an inhomogeneous elastic strip. Approximate models reflect the distribution features of the inhomogeneous structure properties over the thickness. The models are based on hypotheses about the nature of the change in the components of the displacement field, which allows to consider arbitrary laws of heterogeneity: continuous, as well as discontinuous or having a strong gradient. Solutions of the contact problem for different inhomogeneity laws are constructed. Comparative analysis of the models is carried out. The results of the solutions are compared with the solution based on the FE model.

*Key words:* coating, functionally graded material, indentation, inhomogeneous strip.

**Acknowledgements:** This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00069).

### References

1. Grainger S., Blunt. J. *Engineering Coatings: Design and Application*. Woodhead Publ. Ltd, UK, 1998. 336 p.
2. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. *Applied Materials Today*, 2016, vol. 5, pp. 223–245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Golovin Yu. I. Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: A Review. *Physics of the Solid State*, 2008, vol. 50, iss. 12, pp. 2205–2236. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783408120019>
4. Oliver W. C., Pharr G. M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *J. Mater. Res.*, 2004, vol. 19, no. 1, pp. 3–20. DOI: <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>
5. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti*. [Non-classical mixed problems in elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1974. 456 p. (in Russian).



6. *Kontaktne zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnih sred* [Contact problems of theory of elasticity for inhomogeneous media] / S. M. Aizikovich, V. M. Aleksandrov, A. V. Belokon, L. I. Krenev, I. S. Trubchik. Moscow, Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian).
7. Volkov S. S., Vasilev A. S., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Leonteva A. V. Stress-strain state of an elastic soft functionally graded coating during the indentation of a spherical indenter. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 20–34 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.4.02>
8. Alexandrov V. M., Mhitaryan S. M. *Kontaktne zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i podlozhkami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers]. Moscow, Nauka, 1983. 488 p. (in Russian).
9. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. On indentation of heterogeneous strip. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 3, pp. 22–29 (in Russian).
10. Vatul'yan A. O., Kossovich E. L., Plotnikov D. K. Some specific characteristics of indentation of cracked layered structures. *Mechanics of Solids*, 2017, no. 4, pp. 429–434. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654417040094>

---

**Cite this article as:**

Vatulyan A. O., Plotnikov D. K., Poddubny A. A. On Some Models of Indentation for Functionally-Graded Coatings. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 421–432 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-421-432>

---