B. Kh. Sendov, A certain method for the simultaneous approximate computation of all positive roots of an algebraic equation,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1974, Number 5, 185–186

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 518

Бл. Сендов

ОДИН МЕТОД ОДНОВРЕМЕННОГО ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К семидесятилетию Александра Петровича Нордена

А. Пуанкаре [1] доказал следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ является алгебраическим многочленом с действительными коэффициентами. Если k — достаточно большое натуральное число, то число положительных нулей $f(x)$ точно равняется числу перемен знаков коэффициентов многочлена $g(x)=(1+x)^k f(x)$.*

Цель этой заметки — показать, как можно использовать перемены знаков коэффициентов многочлена $g(x)$ для одновременного приближенного вычисления всех положительных нулей многочлена $f(x)$.

Обозначим через $0<x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_p$, $p\leqslant m$, все положительные нули многочлена

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m, \tag{1}$$

где a_i, $i=\overline{0,\ m}$, — действительные числа. Если $f(x)$ не имеет положительных нулей, то $p=0$. Без ограничения общности можно считать, что $a_0>0$, $a_m\neq 0$.

Пусть k — натуральное число и

$$(1+x)^k f(x)=\sum_{\nu=0}^{m+k} b_k(\nu)\,x^\nu. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения: $\nu_k(1)$ — наименьшее целое число, для которого $b_k(\nu_k(1))\geqslant 0$ и $b_k(\nu_k(1)+1)<0$, $b_k(0)=a_0>0$ (если такого числа не существует, то все коэффициенты (2) положительны и (1) не имеет положительных нулей); $\nu_k(2)$ — наименьшее целое число, большее $\nu_k(1)$, для которого $b_k(\nu_k(2))\leqslant 0$ и $b_k(\nu_k(2)+1)>0;\ldots;\ \nu_k(s)$ — наименьшее целое число, большее $\nu_k(s-1)$, для которого $(-1)^{s-1}b_k(\nu_k(s))\leqslant 0$ и $(-1)^{s-1}b_k(\nu_k(s)+1)<0$. Продолжаем эту процедуру, пока не переберем все коэффициенты $b_k(\nu)$. Таким образом получаем числа

$$\nu_k(1),\ \nu_k(2),\ldots,\ \nu_k(s). \tag{3}$$

Согласно теореме 1 существует такое $k_0=k_0(f)$, что для $k\geqslant k_0$ имеем $s_k=p$, где p — число положительных нулей многочлена (1). В дальнейшем будем предполагать, что $k\geqslant k_0$.

Теорема 2. *Числа* (3) *удовлетворяют равенствам*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\nu_k(s)}{k-\nu_k(s)+1}=x_s,\quad s=\overline{1,\ p}, \tag{4}$$

где x_s являются положительными нулями многочлена (1).

Доказательство. Покажем сначала существование чисел $\delta=\delta(f)\in(0,\ 1)$ и $N=N(f)$, зависящих только от f, таких, что для $k>N$ имеют место равенства

$$\operatorname{sgn} b_k(\nu)=\operatorname{sgn} a_0 \text{ для } 0\leqslant\nu\leqslant\delta_k, \tag{5}$$

$$\operatorname{sgn} b_k(\nu)=\operatorname{sgn} a_m \text{ для } (1-\delta)k\leqslant\nu\leqslant m+k. \tag{6}$$

Из определения $b_k(\nu)$, пользуясь (2), получаем

$$b_k(\nu)\Big/\binom{k}{\nu}=a_0+\frac{\nu}{k-\nu+1}a_1+\frac{\nu(\nu-1)}{(k-\nu+1)(k-\nu+2)}a_2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1)}{(k-\nu+1)(k-\nu+2)\ldots(k-\nu+m)}a_m. \tag{7}$$

Если $\nu\leqslant\delta k$ и $0\leqslant i\leqslant\nu$, то

$$0\leqslant\frac{\nu-i}{k-\nu+i+1}\leqslant\frac{\delta k-i}{(1-\delta)k+i+1}\leqslant\frac{\delta}{1-\delta}$$

и, следовательно,

$$\left|b_k(\nu)\Big/\binom{k}{\nu}-a_0\right|\leqslant\frac{\delta}{1-\delta}\left[|a_1|+\frac{\delta}{1-\delta}|a_2|+\ldots+\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{m-1}|a_m|\right].$$

Отсюда, если δ достаточно мало, следует (5). Аналогично доказывается и (6).

Покажем далее, что, если $\delta\in(0,\ 1)$ — фиксированное число и $k\delta\leqslant\nu\leqslant(1-\delta)k$, то

$$b_k(\nu)\Big/\binom{k}{\nu}=f\left(\frac{\nu}{k-\nu+1}\right)+C\theta_{k,\nu}\frac{1}{k}, \tag{8}$$

где $C=C(f)$ — константа, не зависящая от k и ν, и $|\theta_{k,\nu}|\leqslant1$. Действительно, из (7) получаем

$$b_k(\nu)\Big/\binom{k}{\nu}=f\left(\frac{\nu}{k-\nu+1}\right)+\frac{\nu}{k-\nu+1}\sum_{i=2}^{m}B(k,\ \nu,\ i)\,a_i, \tag{9}$$

где

$$B(k,\ \nu,\ i)=\frac{\nu-1}{k-\nu+2}\,\frac{\nu-2}{k-\nu+3}\cdots\frac{\nu-i+1}{k-\nu+i}-\left(\frac{\nu}{k-\nu+1}\right)^{i-1}.$$

Отсюда, имея в виду $\delta_k\leqslant\nu\leqslant(1-\delta)k$, находим

$$|B(k,\ \nu,\ i)|\leqslant\frac{i(i-1)}{(1-\delta)^2}\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\frac{1}{k}. \tag{10}$$

Равенство (8) следует из (9) и (10), если взять

$$C=C(f)=\frac{1}{\delta(1-\delta)}\sum_{i=2}^{m}i(i-1)\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{i}|a_i|.$$

В силу (3) и (8) получаем

$$(-1)^{s-1}\left[f\left(\frac{\nu_k(s)}{k-\nu_k(s)+1}\right)+C\theta'\frac{1}{k}\right]\geqslant0,$$

$$(-1)^{s-1}\left[f\left(\frac{\nu_k(s)+1}{k-\nu_k(s)}\right)+C\theta''\frac{1}{k}\right]<0,$$

где θ', $\theta'' \in [-1, 1]$. Следовательно, существует точка $\xi = \xi(k, \nu, s)$, для которой

$$\frac{\nu_k(s)}{k - \nu_k(s) + 1} \leqslant \xi < \frac{\nu_k(s) + 1}{k - \nu_k(s)}; \tag{11}$$

$$f(\xi) + C\theta k^{-1} = 0, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{12}$$

Так как C не зависит от k и ν, то из (11) и (12) следует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k(s)}{k - \nu_k(s) + 1} = \lim \xi(k, \nu, s) = x_s, \quad f(x_s) = 0.$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Нетрудно видеть, что, если x_s есть q-кратный корень (1), то

$$x_s = \frac{\nu_k(s)}{k - \nu_k(s) + 1} + O\left(\frac{1}{k^{1/q}}\right),$$

т. е. сходимость метода для простых нулей — порядка k^{-1}, а для q-кратных — порядка $k^{-1/q}$. Сходимость довольно медленная и, следовательно, описанный метод можно рекомендовать только для локализации нулей. Преимуществом метода является его очень простая реализация путем машинной программы.

Для примера

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$$

метод дает при $k = 2000$ следующие приближения:

$x_s = 1{,}000$	2,000	3,000	4,000	5,000
$\frac{\nu_k(s)}{k - \nu_k(s) + 1} = 0{,}981$	1,961	2,941	3,957	5,051

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Sur les équations algébriques. C. r. Acad. sci., v. 97, 1883, p. 1418—1419.

г. София (Болгария)

Поступила
8 II 1974