УДК 514.772

ОТКРЫТЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. Б. Маренич, В. А. Топоногов

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой — кривизной: секционной кривизной, кривизной Риччи или скалярной кривизной. (Обычно на кривизну накладываются при этом условия типа неравенства.) В двумерном случае все указанные кривизны совпадают и эта связь достаточно просто описывается с помощью теоремы Гаусса—Бонне. В многомерном случае теоремы, аналогичной теореме Гаусса—Бонне, нет, и возможность серьезного изучения многомерных римановых многообразий появилась после появления теоремы сравнения Рауха и Александрова—Топоногова. Используя эти теоремы, формулы первой и второй вариаций длины и теорию Морса, часто удается получить те или иные геометрические характеристики риманова многообразия, например: оценки на диаметр и радиус инъективности; существование в нем выпуклых подмножеств и т. п. А далее, из уже полученных геометрических свойств получить информацию и о топологическом строении риманова многообразия. В качестве примера приведем теорему о сфере.

Теорема о сфере. Если в многообразии V^n секционная кривизна K_σ в каждой точке удовлетворяет неравенству $\frac{1}{4}<K_\sigma\leqslant 1$, то V^n — гомеоморфно S^n.

Доказательство этой теоремы проходит в точности по указанной схеме: сначала из теоремы сравнения Александрова—Топоногова получается оценка на диаметр: $\operatorname{diam} V^n<2\pi$. Затем из теоремы Клингенберга выводится оценка на радиус инъективности: $r_V\geqslant\pi$ и, наконец, на основе полученных оценок чисто геометрически строится гомеоморфизм V^n и S^n: многообразие представляется в виде объединения двух метрических шаров. Эта статья посвящена обзору результатов о геометрии римановых многообразий неотрицательной секционной кривизны и о геометрии других римановых многообразий в том или ином смысле близких к ним. Впервые открытые двумерные поверхности неотрицательной гауссовой кривизны изучал Кон—Фоссен [11]. Основным инструментом исследования в этих работах была теорема Гаусса—Бонне. Первым результатом в многомерном случае была теорема о цилиндре [23], обобщающая аналогичную теорему Кон—Фоссена для двумерных поверхностей.

Самый существенный шаг в изучении этих многообразий был сделан Чигером и Громолом. Им принадлежат основные конструкции и доказательство основной теоремы, которую в сжатом виде можно сформулировать так. В любом открытом многообразии V^n неотрицательной секционной кривизны существует замкнутое вполне геодезическое многообразие S и V^n диффеоморфно νS — нормальному расслоению S в V^n. В настоящее время в теории многомерных открытых многообразий неотрицательной секционной кривизны получено много новых интересных результатов. Обзору этих результатов и посвящена эта статья. Основные результаты мы приводим либо с полными доказательствами, либо с достаточно подробными комментариями. Обзор результатов, полученных до 1977 года, содержится в статье [6] (см. также [63]). Авторы предполагают, что читатель знаком с основными понятиями и теоремами римановой геометрии и вариационного исчисления в целом, с формулировками теорем сравнения Рауха и Топоногова, а также с понятиями фундаментальной группы, универсального накрытия, CW-комплекса, гомотопической эквивалентности и чисел Бетти. Все эти сведения можно найти в учебниках по римановой геометрии в [2], [10], [35] и топологии [20], [21].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Открытым многообразием V^n назовем полное, n-мерное, некомпактное, ориентируемое риманово многообразие без края. Через $\rho(p, q)$ обозначим расстояние между точками p и q многообразия V^n. Лучом (прямой) будем называть полугеодезическую линию, каждый отрезок которой есть кратчайшая. Через каждую точку $p \in V^n$ проходит, по крайней мере, один луч l_p. В самом деле, пусть p_k — последовательность точек V^n, для которых $\rho(p, p_k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда существует подпоследовательность l_{k_i} последовательности кратчайших l_k, соединяющих p и p_k, которая сходится к некоторой полугеодезической l_p. Нетрудно, от противного, доказать, что l_p — луч. Для каждого луча $l = \exp_p(tv)$, $t > 0$, и точки $q \in V^n$ существует $\lim\limits_{t\to\infty}(\rho(q, l(t)) - t) = h_l(q)$, так как функция $(\rho(q, l(t)) - t)$ есть монотонно невозрастающая функция, ограниченная снизу числом — $\rho(p, q)$. Тем самым определена функция $h_l: V^n \to \mathbb{R}$, которая называется функцией Буземана; $h_l(V^n) = (-\infty, T_0]$, $0 \leqslant T_0 \leqslant \infty$. Множества подуровня функции Буземана называются оришарами $A_{l,t} = \{q \mid h_l(q) < t\}$, а их границы — орисферами. Из определения следует, что оришар $A_{l,t}$ является объединением возрастающего семейства метрических шаров: $A_{l,t} = \bigcup_{\substack{t+\tau>0\\ \tau>0}} B_{l,t,\tau}$, где $B_{l,t,\tau} = \{q \mid \rho(q, l(t+\tau)) < \tau\}$. Все пространство V^n при этом оказывается объединением оришаров $V^n = \bigcup_{-\infty<t<\infty} A_{l,t}$. Важную роль при изучении открытых многообразий играют множества $C_{l,t} = V^n \setminus A_{l,-t}$, $t \in [-T_0, \infty)$ — дополнения к оришарам, называемые орипространствами.

Теорема 1.1. Семейство множеств $C_{l,t}$ является семейством эквидистант, то есть для $t_2 > t_1$

$$C_{l,t_1} = \{q \in C_{l,t_2} \mid \rho(q, \partial C_{l,t_2}) \geqslant t_2 - t_1\},$$

где через ∂C обозначена граница множества C.

Доказательство: Если $q \in C_{l,t_1} = V^n \setminus A_{l,-t_1}$, то для всех s $\rho(q, l(s)) \geqslant s - t_1$; а так как для любой q_2 из $A_{l,-t_2}$ найдется s такое, что $q_2 \in B_{l,t_2,s}$, то из неравенства треугольника

$$\rho(q_1, q_2) \geqslant \rho(q_1, l(s)) - \rho(q_2, l(s)) \geqslant (s - t_1) - (s - t_2) = t_2 - t_1$$

и того, что $\partial C_{l,t_2} = \partial A_{l,-t_2}$, следует $\rho(q_1, \partial C_{l,t_2}) \geqslant t_2 - t_1$. Обратно: если $\rho(q_1, \partial C_{l,t_2}) < t_2 - t_1$ и $q_1 \in C_{t_2}$, то найдутся $s > 0$ и точка $q_2 \in B_{l,t_2,s}$ такие, что $\rho(q_1, q_2) < t_2 - t_1$. Поэтому

$$t_2 - t_1 > \rho(q_1, q_2) \geqslant \rho(q_1, l(s)) - \rho(q_2, l(s)) \geqslant \rho(q_1, l(s)) - (s - t_2),$$

откуда следует, что $q_1 \in B_{l,t_1,s} \subset V^n \setminus C_{l,t_1}$. Теорема 1 доказана.

Таким образом каждое открытое многообразие допускает исчерпание семейством эквидистант: $V^n = \bigcup_{-\infty<t<\infty} C_{l,t}$.

§ 2. АБСОЛЮТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ ЭКВИДИСТАНТ И ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИИ БУЗЕМАНА

Множество C в римановом многообразии называется абсолютно выпуклым множеством, если вместе с любыми своими двумя точками содержит любую геодезическую дугу, их соединяющую. Открытое многообразие неотрицательной секционной кривизны будем обозначать через V_0^n, а через $K_{\sigma(\lambda,\mu)}$ — секционную кривизну в двумерном направлении $\sigma(\lambda, \mu)$, определенном векторами λ и μ. Для многообразий V_0^n справедлива следующая очень важная теорема, на которой основываются все последующие построения.

Теорема 2.1. В многообразии V_0^n каждое орипространство $C_{l,\tau}$ есть абсолютно выпуклое множество.

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдется такая геодезическая дуга $c_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что точки $c_0(0)$ и $c_0(1)$ лежат в $C_{l,\tau}$, а некоторая точка $c_0(t)$ — вне $C_{l,\tau}$, то есть найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $c_0(t) \in A_{l,-\tau-\varepsilon}$ и тем самым $c_0(t) \in B_{l,\theta_0,\theta_0-\tau-\varepsilon}$ при некотором θ_0. Поэтому для всех $\theta > \theta_0$

$$c_0(t) \in B_{l,\theta,\theta-\tau-\varepsilon}. \tag{1}$$

Через $c_0(t_\theta)$ обозначим точку $c_0(t)$, ближайшую к $l(\theta)$. Через c_0^θ обозначим отрезок $c_0|_{[0,t_\theta]}$ геодезической c_0, который, не уменьшая общности, можно считать кратчайшей, а через c_1^θ и c_2^θ — кратчайшие, соединяющие точку $l(\theta)$ и точки $c_0(t_\theta)$ и $c_0(0)$, соответственно. Из определения точки $c_0(t_\theta)$ и неравенства: $0 < t_0 < 1$ следует, что угол α_2 в треугольнике $c_0^\theta c_1^\theta c_2^\theta$, лежащий против стороны c_2^θ, равен

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Из условия (1) и условия $c_0(0) \notin B_{l,\theta,\theta-\tau}$ следует, что для всех θ

$$L(c_1^\theta) - L(c_2^\theta) \leqslant -\varepsilon, \tag{3}$$

где через $L(c)$ обозначена длина геодезической c. Построим на плоскости $\mathbb{R}^2$ треугольник $\bar{c}_0\bar{c}_1\bar{c}_2$ с теми же длинами сторон, что и у треугольника $c_0^\theta c_1^\theta c_2^\theta$. Из теоремы сравнения углов треугольников Топоногова [22] (см. также [10]) следует, что угол $\bar{\alpha}_2$, лежащий против стороны $\bar{c}_2$, не больше угла $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$$0 < \bar{\alpha}_2 \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Далее, из определения точки $c_0(t_0)$ следуют неравенства:

$$L(c_2^\theta) > L(c_1^\theta) \geqslant \theta - d, \text{ где } d = \tau + \rho(c_0(0), c_0(1)), \tag{5}$$

$$L(c_0^\theta) \leqslant L(c_0). \tag{6}$$

Применим теперь к треугольнику $\bar{c}_0\bar{c}_1\bar{c}_2$ теорему косинусов. Получим

$$\cos\bar{\alpha}_2 = \frac{L^2(c_0^\theta) + L^2(c_1^\theta) - L^2(c_2^\theta)}{2\cdot L(c_0^\theta)\cdot L(c_2^\theta)} =$$

$$= \frac{L(c_1^\theta) + L(c_2^\theta)}{2L(c_1^\theta)} \cdot \frac{L(c_1^\theta) - L(c_2^\theta)}{L(c_0^\theta)} + \frac{L(c_0^\theta)}{2L(c_1^\theta)}.$$

Из неравенств (3), (5) и (6) следует, что при θ достаточно больших $\cos\bar{\alpha}_2 < 0$, что противоречит неравенству (4). Теорема доказана. Эту теорему можно доказать и для многообразий, секционная кривизна которых неотрицательна в некотором интегральном смысле (см. [1]).

Из теоремы 2.1 следует, что любое открытое многообразие неотрицательной секционной кривизны допускает исчерпание семейством абсолютно выпуклых эквидистант $C_{l,t}$. Вообще говоря, эти множества не компактны. Однако немного усовершенствовав конструкцию, можно исчерпать многообразие V^n семейством компактных абсолютно выпуклых эквидистант. Пусть:

$$C_{p,\tau}=V^n\setminus\bigcup_{l\in\mathscr{L}}A_{l,-\tau}=\bigcap_{l\in\mathscr{L}}C_{l,\tau},$$

где $\mathscr{L}$ — множество всех лучей, выходящих из точки p. Тогда при любом τ множества $C_{p,\tau}$ компактны. В самом деле, если для некоторого τ $C_{p,\tau}$ некомпактно, то найдется последовательность точек $p_k\in C_{p,\tau}$ такая, что $\rho(p_k, p)\to\infty$ при $k\to\infty$. Выбирая из семейства кратчайших pp_k сходящуюся подпоследовательность, мы, как и в § 1, найдем луч $l_p(t)$, выходящий из точки p и целиком, в силу абсолютно выпуклости $C_{p,\tau}$, лежащий в $C_{p,\tau}$. Но по определению $C_{p,\tau}$ точки $l_p(t)$ при $t>\tau$ не принадлежат $C_{p,\tau}$. Полученное противоречие доказывает компактность $C_{p,\tau}$. Очевидно также, что $V^n=\bigcup_{\tau>0}C_{p,\tau}$.

Если в некотором римановом многообразии V^n существует абсолютно выпуклое множество C, то все многообразие V^n гомотопически эквивалентно C (см. [37]). Поэтому из существования абсолютного выпуклого множества $C_{p,\tau}$ следует

Теорема 2.2. *Многообразие V_0^n гомотопически эквивалентно конечному CW-комплексу.*

Для двумерных поверхностей V_0^2 с неотрицательной гауссовой кривизной K из теоремы 2.1 и теоремы Гаусса—Бонне следует, что интегральная кривизна $\omega(C_{l,\tau})=\int\limits_{C_{l,\tau}}KdS$ множества $C_{l,\tau}$ при любом l и любом τ не превосходит 2π и, следовательно, $\omega(V_0^2)\leqslant 2\pi$. Это утверждение первоначально было доказано Кон-Фоссеном [11]. Кроме того, в работе [62] доказано, что если $\omega(V_0^2)>\pi$ $(\omega(V_0^2)\leqslant\pi)$, то множество $C_{l,\tau}$ при любом l и любом τ компактно (некомпактно). О некоторых обобщениях последних утверждений см. [64].

Как известно (см. [6], [37]), выпуклое множество C в римановом многообразии V^n является топологическим многообразием, а его край ∂C — локально липшицевым многообразием. В каждой точке q из ∂C определен K_qC — касательный конус к C:

$$K_qC=\{v\in T_qV\mid \exists t_0\colon\ \forall 0<t<t_0,\ \exp_q tv\in \operatorname{int} C\}\cup\{0\}\subset T_qV.$$

Касательный конус является выпуклым конусом в касательном пространстве T_qV, причем $K_qC\setminus\{0\}$ открыто в T_qV^n. Нетрудно показать, что почти для всех точек q из ∂C конус K_qC есть открытое полупространство в T_qV^n, дополненное нулем. Известно также (см. [4], [6]), что почти везде на ∂C можно определить аналог второй квадратичной формы, которая будет неотрицательно определена. Известно, что поверхность ∂C можно приблизить «почти выпуклыми» гладкими поверхностями. А именно: можно построить семейство выпуклых множеств $\tilde{C}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, сходящихся к C: $\operatorname{dist}(C_\varepsilon, C) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ так, что $\partial \tilde{C}_\varepsilon$ — гладкие поверхности для всех $\varepsilon > 0$, все нормальные кривизны которых не меньше, чем $-\varepsilon$. Для этого надо сгладить функцию $\rho(\ \ , \partial C)$ и взять в качестве $\tilde{C}_\varepsilon$ множество подуровня. Другим важным следствием существования семейства выпуклых эквидистант является возможность построения короткого отображения (отображения не увеличивающего длины) $\varphi_\tau : V_0^n \to C_\tau$. Построение отображения φ_τ заключается в следующем. Если $q \in C_\tau$, то $\varphi_\tau(q) = q$, если $q \in V_0^n \setminus C_\tau$, то $q \in \partial C_t$ при некотором $t > \tau$. Разобьем тогда интервал (τ, t) на N отрезков точками $t_i = t - \varepsilon \cdot i$, где $\varepsilon = (t - \tau)/N$, $i = 1, \ldots, N-1$. Точку q_1 на ∂C_{t_1} определим как точку, ближайшую к q, точку q_2 на ∂C_{t_2} определим как точку, ближайшую к q_1, и т. д. Через N шагов получим точку $q_N \in \partial C_\tau$. При $N \to \infty$ точки q_N сходятся к некоторой точке $\varphi_\tau(q)$, а полигон $qq_1 \ldots q_N$ сходится к спрямляемой кривой $l_q(\tau)$. Из выпуклости C_τ легко следует, что φ_τ — короткое отображение, аналогично тому, как в евклидовом пространстве при «ортогональном проектировании» на выпуклое множество длины сокращаются.

Другим следствием теоремы 2.1 является утверждение о выпуклости функции Буземана. Напомним, что функция $h : V^n \to \mathbf{R}$ называется выпуклой, если ее ограничение на любую геодезическую дугу $\gamma(t) : [a, b] \to V^n$, $h \circ \gamma(t) : [a, b] \to \mathbf{R}$ есть выпуклая вверх функция, где t — параметр, пропорциональный длине.

Теорема 2.3. Для каждого луча l в открытом многообразии неотрицательной (положительной) секционной кривизны функция Буземана выпукла (строго выпукла).

Предварительно докажем следующую лемму, имеющую самостоятельный интерес.

Лемма 2.4. Пусть C — локально выпуклое множество в римановом многообразии неотрицательной (положительной) секционой кривизны, $\gamma(t) : [a, b] \to V^n$ — дуга геодезической линии, $\rho(t) = \rho(\gamma(t), \partial C)$. Тогда если $\gamma(t) \subset \operatorname{int} C$, то $\rho(t)$ есть выпуклая (строго выпуклая) функция на $[a, b]$.

Доказательство леммы. Функция $\rho(t)$ может быть, вообще говоря, негладкой функцией. Поэтому для доказательства выпуклости функции $\rho(t)$ мы для каждого значения $t_0 \in [a, b]$ построим гладкую функцию $\varphi_{t_0}(t)$, удовлетворяющую условиям: 1) $\varphi_{t_0}(t_0) = \rho(t_0)$, 2) $\varphi_{t_0}(t) \geqslant \rho(t)$ в некоторой окрестности точки t_0, 3) $\varphi''_{t_0}(t_0) \leqslant 0$ $(\varphi''_{t_0}(t_0) < 0)$. Пусть q — точка на ∂C, ближайшая к $\gamma(t_0)$, а $c(s)$ — кратчайшая, соединяющая $\gamma(t_0)$ и q; $c(0)=\gamma(t_0)$, $c(\rho(t_0))=q$. Так как q — ближайшая на ∂C к $\gamma(t_0)$, а C — выпукло, то для любого вектора e, ортогонального $\dot c(\rho(t_0))$, геодезическая $\bar\gamma(t)=\exp_q(t-t_0)e$ не пересекает $\operatorname{int} C$, и поэтому для функции $\varphi_{t_0}(t)=\rho(\gamma(t), \bar\gamma(t))$ выполнены первые два условия. Пусть теперь

$$e(s)=I_{\gamma(t_0)c(s)}(\dot\gamma(t_0)-(\dot\gamma(t_0), \dot c(0))\,\dot c(0)),$$

где через $I_{\gamma(t_0)c(s)}$ обозначен оператор параллельного переноса из точки $\gamma(t_0)$ в точку $c(s)$ вдоль дуги $c(0)c(s)$, их соединяющей. Из формулы второй вариации длины следует, что

$$\varphi''_{t_0}(t_0)=-\int\limits_0^{\rho(t_0)} K_{\sigma(\dot c(s), e(s))}ds. \qquad (7)$$

Из (7) и неотрицательности (положительности) секционной кривизны получаем $\varphi''_{t_0}(t_0)\leqslant 0$ $(\varphi''_{t_0}(t_0)<0)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть $\gamma:[a, b]\to V^n$ — дуга геодезической. Найдем такое τ, что $\gamma\subset\operatorname{int} C_{l,\tau}$. Из определения функции Буземана и теоремы 1.1 следует, что $h_l(\gamma(t))=\rho(t)-\tau$, где $\rho(t)=\rho(\gamma(t), \partial C_{l,\tau})$. Утверждение теоремы теперь следует из выпуклости $C_{l,\tau}$ и только что доказанной леммы.

Сам факт существования на открытом многообразии V^n выпуклой функции, без всяких дополнительных условий, дает возможность получить некоторую информацию о его топологическом строении. Пусть $\varphi: V^n\to\mathbf{R}$ — выпуклая непрерывная функция. Обозначим через $V^a(\varphi)=\{x\in V^n|\varphi(x)=a\}$, $\lambda=\inf\varphi$, $m=\inf\dim V^\alpha(\varphi$ и через $V_\varphi=V^\lambda(\varphi)$, если $m<n$. Некоторые из результатов в этом направлении, полученные в работах [42] и [43], мы сформулируем в виде одной теоремы.

Теорема 2.5. Если $\varphi: V^n\to\mathbf{R}$ — выпуклая непрерывная функция, то справедливы следующие утверждения.

1) Вложение $\{x|\varphi(x)\leqslant\alpha\}\to V^n$ при $\alpha\geqslant\lambda$ является гомотопической эквивалентностью.

2) Если $V_\varphi\neq\varnothing$, то существует гладкое многообразие L такое, что $V^n\setminus V_\varphi$ диффеоморфно $L\times\mathbf{R}$ и V^n гомеоморфно νV_φ — нормальному расслоению V_φ в V^n.

3) Если $V_\varphi\neq\varnothing$, а $\partial V_\varphi=\varnothing$, то V^n диффеоморфно νV_φ.

4) Если φ — строго выпуклая функция и $\forall a\in\varphi(V^n)\setminus\{\lambda\}$ — размерность $V^a(\varphi)=n-1$, то V^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$.

5) Если $\exists a$ такое, что $\dim V^a(\varphi)=n-1$ и $\partial V^a(\varphi)$ есть несвязное множество с компактными компонентами, то V_φ есть замкнутая вполне геодезическая гиперповерхность, а каждая компонента $\partial V^a(\varphi)$ гомеоморфна V_φ.

6) V^n имеет не более двух концов (то есть $V^n\setminus C_{l,\tau}$ имеет не более двух компонент связности для любого l и достаточно большого τ).

Большая часть утверждений теоремы 2.5 верна и в том случае, когда $\varphi: V^n \to \mathbb{R}$ квазивыпукла. Функция φ называется квазивыпуклой, если на любой геодезической дуге $\gamma: [a, b] \to V^n$ функция $\varphi \circ \gamma(t)$ удовлетворяет неравенству $\varphi \circ \gamma(t) \leqslant \leqslant \max(\varphi \circ \gamma(a), \varphi \circ \gamma(b))$.

Из теоремы 2.1 можно получить также теорему о цилиндре.

Теорема 2.6 (Топоногов [23]). Если в многообразии V_0^n существует прямая линия l, то V_0^n изометрично $V_0^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Прямую l произвольной точкой p разобьем на два луча l_1 и l_2. Из теоремы сравнения Топоногова, неравенства треугольника и условия теоремы вытекает, что $\partial C_{l_1, \tau} = \partial C_{l_2, -\tau}$ для любого τ, а из следствия теоремы 2 следует, что обе эти гиперповерхности локально выпуклы и причем выпуклы в разные стороны. Следовательно, гиперповерхность $V_\tau^{n-1} = \partial C_{l_1, \tau} = \partial C_{l_2, -\tau}$ есть вполне геодезическая гиперповерхность в V_0^n при любом $\tau \in (-\infty, \infty)$. Известно, что ортогональные траектории любого семейства вполне геодезических гиперповерхностей осуществляют их изометрию, значит, гиперповерхности $V_{\tau_1}^{n-1}$ и $V_{\tau_2}^{n-1}$ изометричны друг другу при любых τ_1 и τ_2. Нетрудно также доказать, что сами ортогональные траектории к V_τ^{n-1} являются прямыми линиями в V_0^n. Из двух последних утверждений следует доказательство теоремы 2.6, причем за V_0^{n-1} можно взять любое из V_τ^{n-1}.

Первоначальное, более геометрическое, доказательство было изложено в [23] (см. также [10]). Позднее в работе [36] теорема 2.6 была доказана для любого многообразия с неотрицательной кривизной Риччи. Более простое доказательство последнего утверждения и некоторое ее обобщение было получено в [39], [50].

§ 3. Soul-КОНСТРУКЦИЯ

Как было уже показано в § 2, для многообразия V_0^n существует семейство компактных абсолютно выпуклых эквидистант C_t при $t \geqslant 0$. Оказывается, что это семейство C_t можно продолжить путем построения «внутренних эквидистант» от C_0 до некоторого семейства C_t при $t \in [T, 0)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Существует такое разбиение $T = t_m < < \ldots < t_0 = 0$ отрезка $[T, 0]$ и такие абсолютно выпуклые компактные множества C_t для всех $t \in [T, 0]$, что выполняются следующие утверждения:

1. для $t_{l+1} \leqslant t < t_l$ $C_t = \{p \in C_{t_l} \mid \rho(p, \partial C_{t_l}) \geqslant t_l - t\}$;
2. $\dim C_{t_{l+1}} < \dim C_{t_l}$;

3. $C_T = S$ — вполне геодезическое замкнутое многообразие S в V_0^n;

4. V_0^n диффеоморфно νS-пространству нормального расслоения S в V_0^n.

Доказательство. Построение абсолютно выпуклых множеств C_t, $t\in[T, 0)$, проведем последовательно. Предположим, что множество $C_{t_0} = C_0$ имеет внутренние точки V_0^n, и пусть $t_1 = -\sup\limits_{p\in C_0} \rho(p, \partial C_0)$. Множество C_t при $t_1 < t < 0$ определим как «внутреннюю» эквидистанту:

$$C_t = \{p\in C_{t_0} \mid \rho(p, \partial C_{t_0}) \geqslant t_0 - t\}.$$

Докажем, что C_t — абсолютно выпуклое множество. Пусть p и q — точки из C_t, а $\gamma:[a, b]\to V_0^n$ — геодезическая, их соединяющая. Тогда $\rho(\gamma(s), \partial C_0) \geqslant \min(\rho(\gamma(a), \partial C_0), \rho(\gamma(b), \partial C_0))$, как это следует из выпуклости функции $\rho(\gamma(s), \partial C_0)$ (см. лемму 2.5), то есть $\gamma(s)\subset C_t$, откуда и следует абсолютная выпуклость C_t. Множество $C_{t_1} = \bigcap\limits_{t_1<t} C_t$ является абсолютно выпуклым компактным множеством без внутренних точек многообразия V_0^n. Следовательно, C_{t_1} есть вполне геодезическое подмногообразие многообразия V_0^n. Если C_{t_1} — замкнутое подмногообразие, то все три первых утверждений теоремы доказаны и $T = t_1$. Если же C_{t_1} имеет край, который мы обозначим через ∂C_{t_1}, то процесс построения множеств C_t продолжается. Пусть $t_2 = -\sup\limits_{p\in C_{t_1}} \rho(p, \partial C_{t_1}) + t_1$ и $C_t = \{p\in C_{t_1} \mid \rho(p, \partial C_{t_1}) > t_1 - t\}$ при $t\in(t_2, t_1]$. Снова, точно также, доказывается, что C_t — абсолютно выпуклые множества и $C_{t_2} = \bigcap\limits_{t>t_2} C_t$ есть вполне геодезическое подмногообразие, размерность которого меньше размерности C_{t_1}. Повторяя, если это нужно, указанную процедуру, мы через конечное число шагов построим все множества C_t, причем C_T уже будет вполне геодезическим многообразием без края. Тем самым три первых утверждения теоремы доказаны. Доказательство последнего утверждения теоремы мы здесь не можем привести из-за недостатка места.

Гомеоморфность V_0^n и νS была доказана в [37], а диффеоморфность в [24]. Для удобства дальнейшего изложения перепараметризуем семейство эквидистант так, чтобы в новой параметризации $S = C_0$, то есть $C_\tau \to S$ при $\tau\to 0$. Отметим некоторые следствия из основной теоремы. Для каждой точки $p\in S$ и любого t_i на ∂C_{t_i} найдется точка q_i, для которой $\rho(p, q_i) = \rho(p, \partial C_{t_i}) = \mathrm{dist}(S, \partial C_{t_i}) = t_i - t_{i+1}$. Обозначим через $\overline{pq_i}$ вектор в точке p, касательный к кратчайшей pq_i, и определим в точке p множества $\mathscr{L}_{p,i}$ $(i=0, \ldots, m-1)$:

$$\mathscr{L}_{p,i}=\{\overline{pq_i}\mid q_i\in\partial C_{t_i},\quad \rho(p, q_i)=\rho(p, \partial C_{t_i})\}.$$

Из определения $\mathscr{L}_{p,i}$, способа построения множеств C_t и S и теоремы 2.1 вытекают следующие простейшие свойства множеств $\mathscr{L}_{p,i}$:

(1) $\mathscr{L}_{p,i}\subset\nu_p^i S$ — нормальному пучку S в C_{t_i};

(2) для любого $\lambda\in\nu_p^i S$ найдется вектор $\nu\in\mathscr{L}_{p,i}$ такой, что угол между λ и ν не превосходит $\frac{\pi}{2}$;

(3) если $q_t=pq_i\cap\partial C_t$, то $\rho(p, q_t)=\rho(p, \partial C_t)=t-t_{i+1}$, $t_{i+1}<t<t_i$;

(4) если $\nu\in\mathscr{L}_p=\mathscr{L}_{p,0}$, то полугеодезическая линия $l_p=\exp_p(S\nu)$ есть луч.

Перейдем к рассмотрению более содержательных следствий из теоремы 3.1.

Пленка Синга. Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, а $v(t)$ — поле параллельных единичных векторов вдоль $\gamma(t)$. Пленкой Синга назовем двумерную поверхность $\pi_{\gamma,v}(t, s)=\exp_{\gamma(t)}(sv(t))$, $-\infty<t<\infty$, $0\leqslant s\leqslant a$.

Теорема 3.2. Если $\dim S>0$, $\gamma(t)\subset S$, а $v(0)\in\mathscr{L}_{p,i}$, то пленка Синга $\pi_{\gamma,v}$ есть вполне геодезическая поверхность, изометричная полосе на плоскости R^2, и $\pi_{\gamma,v}\cap\partial C_{t_{i+1}+s}=\pi(s', t)|_{s'=s}=\gamma_s(t)$ есть геодезическая линия.

Доказательство. Пусть $q_i=\exp_{\gamma(0)}(s\nu)\cap\partial C_{t_i}$. Вдоль кратчайшей $\gamma(0)q_i=l_\nu(s)$ построим поле параллельных векторов $e(s)$, определенное равенством $e(0)=\dot\gamma(0)$, и определим семейство геодезических $\overline{\gamma}_s(t)=\exp_{l_v(s)}(te(s))$. Геодезическая $\overline{\gamma}_s(t)$, в силу абсолютной выпуклости множества $C_{t_{i+1}+s}$, лежит вне $\operatorname{int} C_{t_{i+1}+s}$. Следовательно, $\rho(t)=\rho(\overline{\gamma}_s(t), \gamma(t))\geqslant s$ при любом t и $\rho(0)=s$. С другой стороны, из теоремы сравнения Берже [32] следует, что функция $\rho(t)\leqslant s$. Сопоставляя эти два неравенства, получаем $\rho(t)\equiv s$ при всех t и $0\leqslant s\leqslant t_i-t_{i+1}$. Отсюда и из той же теоремы сравнения Берже следует, что обе эти пленки Синга совпадают и являются вполне геодезическими и плоскими (см. [6]).

Из этой теоремы, в частности, следует, что если $\dim S>0$, то в $V_0{}^n$ существуют двумерные направления, в которых секционная кривизна равна нулю. Отсюда и из теоремы 3.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.3 ([37]). Открытое многообразие $V_0{}^n$ строго положительной секционной кривизны диффеоморфно R^n.

В оригинальной работе [37] теорема 3.3 следовала из обращения в нуль «смешанной» секционной кривизны в точках S.

Теорема 3.4. Если $p\in S$, $e\in T_pS$ и $\nu\in\nu_pS$, то $K_\sigma(e, \nu)=0$.

Доказательство. Строгое доказательство теоремы 3.4 достаточно длинно (см. [37]). Приведем коротко идею доказательства. Пусть в некоторой точке $p \in S$ существуют вектор $e \in T_pS$ и вектор $\nu \in \nu_pS$ такие, что $K_{\sigma(l,\nu)} > 0$. Тогда вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_p(te)$ можно построить якобиево поле $w(t)$, удовлетворяющее условиям: 1) $w(t)$ не касательное к S; 2) $w(t_0) = w(t_1) = 0$, где $t_0 < 0 < t_1$ — некоторые числа. Рассмотрим вариацию геодезических $\sigma(\varepsilon, t) = \exp_{\gamma(t_0)}(t(\varepsilon w'(t_0) + e))$, порожденную полем $w(t)$. Тогда для $t < t_1$ и близких к t_1, $\frac{d}{dt}\left\|\left.\frac{\partial\sigma(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right\| = \|w(t)\|' < 0$. Пользуясь последним неравенством, можно доказать, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число t_2; $t_0 < t_2 < t_1$, что функция $\rho(\gamma(t), \sigma(\varepsilon, t))$ достигает максимума в точке t_2, или по-другому, что то же самое, функция $\rho(\sigma(\varepsilon, t), \partial C_\tau)$ при $\tau > \rho(\gamma(t_2), \sigma(\varepsilon, t_2))$ достигает в точке t_2 минимума, вопреки лемме 2.4. Отметим еще одно следствие теоремы 3.1 и теоремы о цилиндре.

Теорема 3.5. Если $\dim S = 1$, то универсальное накрывающее $\tilde{V}_0^n$ многообразия V_0^n есть цилиндр.

Доказательство. Если $\dim S = 1$, то S есть окружность и, следовательно, фундаментальная группа V_0^n есть группа целых чисел $\mathbf{Z}$. Поэтому в $\tilde{V}_0^n$ существует полная геодезическая линия γ, которая при отображении накрытия $\pi: \tilde{V}_0^n \to V_0^n$ переходит в S. Так как S (по теореме 3.1) есть абсолютно выпуклое множество, то образ любой кратчайшей $\tilde{\gamma}$ с концами на γ при накрытии π лежит в S, то есть $\tilde{\gamma} \subset \gamma$. Откуда следует, что γ — прямая линия, и теорема 3.5 теперь следует из теоремы 2.6.

Полученная теорема позволяет описать полностью двумерный случай.

Теорема 3.6 (Кон—Фоссен [11]). Многообразие V_0^2 либо диффеоморфно плоскости, либо изометрично цилиндру.

Наконец, из теоремы 1 и существования короткого отображения $\varphi_0 : V_0^n \to S$ вытекает

Теорема 3.7. Если в открытом многообразии V_0^n существует два семейства эквидистант C_t^1, C_t^2, сходящихся к S^1 и S^2, соответственно, то S^1 изометрично S^2 и существует изометрическое вложение $F: S^1 \times [0, a] \to V_0^n$ так, что $F(S^1 \times \{0\}) = S^1$, $F(S^1 \times \{a\}) = S^2$.

Доказательство. Для каждого семейства абсолютно выпуклых эквидистант C_t^i существуют короткие отображения $\varphi_0^i: V_0^n \to S^i$. Рассмотрим отображение $\varphi_0^1 \circ \varphi_0^2: S^1 \to S^1$. Это отображение является отображением на все S^1 и одновременно коротким и, следовательно, изометрией. Отсюда уже следует утверждение теоремы.

§ 4. ТЕОРЕМЫ КОНЕЧНОСТИ

Как мы уже упомянули во введении, одной из задач римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между кривизной и топологическим строением многообразия. Эта связь может носить разный характер и смысл. В этом параграфе мы сформулируем и прокомментируем теоремы, которые удобно назвать теоремами «конечности». Во-первых, это теоремы о конечности гомотопического типа. Примером такой теоремы может служить уже сформулированная нами теорема 2.2, в которой утверждается, что любое многообразие V_0^n гомотопически эквивалентно конечному CW-комплексу. Это же утверждение можно получить и из теоремы 3.1. Если же отказаться от условия неотрицательности секционной кривизны, заменив его каким-нибудь более слабым условием, то теорема 2.2, вообще говоря, уже не будет верной. Так, например, на связной сумме $\mathbb{R}^4 \times S^3$ и бесконечного числа экземпляров $S^3 \times CP^2$ можно построить метрику с положительной кривизной Риччи (см. [61]). Это говорит о том, что в теореме 2.2 условие неотрицательности секционной кривизны не является излишним. Однако если к условиям на кривизну добавить какие-нибудь дополнительные условия геометрического характера, то можно получить некоторые теоремы, аналогичные теореме 2.2.

Пусть $V_k{}^n$ — открытое многообразие неотрицательной кривизны Риччи, секционная кривизна которого ограничена снизу числом $k<0$. Обозначим через $d(\rho)$ диаметр сферы $S(\rho) = \{q \in V_k{}^n \mid \rho(p, q) = \rho\}$ во внутренней метрике области $V_k{}^n \setminus B(p, \xi\rho)$, где ξ есть некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству: $0<\xi<1$. В работе [29] доказана

Теорема 4.1. Если в многообразии V_k^n функция $d(\rho) = O\left(\rho^{\frac{1}{n}}\right)$, то V_k^n гомотопически эквивалентно внутренности некоторого компактного многообразия с краем (конечность гомотопического типа).

Условие неотрицательности кривизны Риччи в этой теореме можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы кривизна Риччи стремилась достаточно быстро к нулю на бесконечности (см. [29]). Другой тип теорем конечности касается сразу целого класса многообразий. Приведем для начала теорему Громова для компактного случая.

Теорема 4.2. Если V^n есть n-мерное компактное многообразие неотрицательной секционной кривизны, то существует константа $c(n)$, зависящая только от n, такая, что для любого поля F выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(V^n, F) \leqslant c(n),$$

где через $b_i(V^n, F)$ обозначены числа Бетти в размерности i многообразия V^n.

Из этой теоремы и основной теоремы следует аналогичная теорема для V_0^n.

Теорема 4.3. Существует константа $c(n)$ такая, что $\sum_{i=1}^{n} b_i(V_0^n, F) \leqslant c(n)$ для любого многообразия V_0^n.

Эта теорема также неверна, если условие неотрицательности секционной кривизны заменить на условие положительности кривизны Риччи. Как показано в той же работе [61], на связной сумме любого числа экземпляров $S^3 \times CP^2$ можно ввести метрику с положительной кривизной Риччи. Однако для многообразий, у которых секционная кривизна уже не обязательно неотрицательна, но стремится достаточно быстро к нулю на бесконечности, теоремы такого же типа справедливы. Пусть секционная кривизна многообразия удовлетворяет условиям: (1) $K_\sigma(q) \geqslant -\lambda(\rho)$, $0 \leqslant \lambda$, в точках q, отстоящих на расстоянии ρ от некоторой фиксированной точки p, и (2) $\int_0^\infty \rho\lambda(\rho)d\rho < \infty$. Такие многообразия V_-^n автор работ [27], [28] назвал многообразиями асимптотически неотрицательной секционной кривизны и доказал для них следующую теорему.

Теорема 4.4. Для произвольного поля F

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(V_-^n, F) \leqslant c_1(n, \lambda)$$

{число концов V_-^n}$\leqslant c_2(n, \lambda)$, где $c_1(n, \lambda)$ и $c_2(n, \lambda)$ — константы, зависящие только от n и λ.

Для компактных многообразий существует достаточно много теорем такого типа. Например, теорема о сфере, уже упоминавшаяся во введении, теорема Чигера [33] и много других (см., например, [7], [46], [49]). Для открытых многообразий V_0^n теорем такого типа известно немного. К ним можно отнести теорему 3.3, теорему из [39], а также 6.2, 6.4, 6.5. Во всех этих теоремах речь идет об условиях диффеоморфизма V_0^n пространству $\mathbf{R}^n$.

Одним из основных геометрических элементов доказательств теорем конечности является изучение функции расстояния $\rho : V^n \to \mathbf{R}$, сопоставляющей точке $q \to \rho(p, q)$. Для, вообще говоря, негладкой функции ρ можно ввести понятие критической точки: q — критическая точка функции ρ, если для любого вектора v из T_qV^n найдется кратчайшая pq такая, что $\angle(v, \overline{qp}) \leqslant \pi/2$. Геометрические рассуждения (в большинстве случаев основанные на теореме сравнения Топоногова или ее обобщениях) позволяют оценить радиус инъективности V^n, число $c(n)$ критических точек, а для некомпактных V^n показать, что все они лежат в некоторой компактной окрестности точки p. Откуда утверждения теорем конечности получаются с помощью теорем Морса. Впервые оценки радиуса инъективности V^n при дополнительном условии ограниченности секционной кривизны сверху были даны в [10].

§ 5. ГРУППА ГОЛОНОМИИ РАССЛОЕНИЯ νS

В этом параграфе мы рассмотрим группу голономии расслоения νS, изучим некоторые ее свойства и сформулируем ряд теорем о связях между геометрическим строением многообразий V_0^n и свойствами этой группы. Так как S есть вполне геодезическое подмногообразие многообразия V_0^n, то при параллельном переносе вдоль любого пути $\omega \subset S$ с началом в точке p и с концом в точке q возникает ортогональное отображение $I_{p,q}(\omega): \nu_p S \to \nu_q S$. Подгруппу ортогональной группы $\mathbf{O}(\operatorname{codim} S)$, порожденную отображениями $I_{p,p}(\omega)$, называют группой голономии расслоения νS. Очевидно, что она не зависит от выбора точки p. Обозначим ее через Γ. Так как любой путь ω может быть аппроксимирован полигоном из кратчайших, то из теоремы 3.2 о пленках Синга следует, что $I_{p,q}(\mathscr{L}_{p,t}) = \mathscr{L}_{q,t}$. Из этого равенства видно, что если группа Γ достаточно «велика», то множество $\mathscr{L}_{p,i}$ также достаточно «велико». Например, если расслоение νS неприводимо, то есть не может быть разложено в сумму Уитни двух других расслоений, то группа $\Gamma = \mathbf{O}(\operatorname{codim} S)$ — полная, и для любых векторов λ и $\nu \in \nu_p S$ найдется путь $\omega \subset S$ с началом и концом в точке p такой, что $I_{p,p}(\omega)\nu = \lambda$. В этом случае $\mathscr{L}_p = \nu_p S$. Строение группы Γ легко выясняется при малых коразмерностях S. Если $\operatorname{codim} S = 1$, то $\mathscr{L}_p$ состоит ровно из двух векторов, а Γ тривиальна или $\Gamma = \mathbf{Z}_2$. Если же $\operatorname{codim} S = 2$, S — односвязно, то либо Γ тривиальна, либо Γ — полная группа, и тогда $\mathscr{L}_p = \nu_p S$. Оказывается, что, в случае тривиальности группы Γ, многообразия V_0^n устроены достаточно просто.

Теорема 5.1 (Маренич [13], [14]). *Если группа голономии односвязного многообразия V_0^n тривиальна, то V_0^n изометрично $S \times V_0^{\operatorname{codim} S}$, где последний сомножитель диффеоморфен $\mathbf{R}^{\operatorname{codim} S}$.*

Доказательство. Наметим основные этапы доказательства. Покажем сначала, что из условия теоремы для всех p, v, e, ρ следует:

$$K(p, v, e, \rho) = K_{\sigma(v(\rho),\, e(\rho))} \equiv 0, \tag{1}$$

где $v(\rho)$ и $e(\rho)$ — параллельные векторные поля вдоль геодезической $l_v(\rho) = \exp_p(\rho v)$, выпущенной из точки p в направлении v нормальном к S, а $e(0)$ лежит в $T_p S$. Действительно: по произвольно выбранному вектору v из $\nu_p S$ определим на S поле

$$v(q) = I_{p,q}(\omega)(v),$$

где ω — любой путь в S, соединяющий точки p и q. Из условия теоремы следует, что поле $v(q)$ корректно определено. Из теоремы сравнения Берже [32] следует, что отображение

$$\psi_\tau{}^v(q) = \exp_q(\tau v(q)) : S \to C_\tau$$

не увеличивает длины и является изометрией тогда и только тогда, когда выполнено условие (1). Так как короткое отображение $\varphi_0 : C_\tau \to S$ также не увеличивает длин, а суперпозиция $\varphi_0 \circ \psi_\tau{}^v$ есть отображение «на», то φ_0 и $\psi_\tau{}^v$ — изометрии и, следовательно, выполнено (1). При этом многообразия $S_\tau{}^v = \psi_\tau{}^v(S)$ — вполне геодезические, изометричные S.

Пусть теперь $W_p = \exp_p(\nu_p S)$, а $S_\tau{}^v = \psi_\tau{}^v(S)$, где $v = \overline{pq}$ для некоторой точки q из W_p. При этом $q = W_p \cap S_\tau{}^v$, а из (1) следует, что

$$T_q S_\tau^v = \nu_q W_p \text{ и } \nu_q S_\tau^v = T_q W_p. \qquad (2)$$

Лемма 5.2. Для любых векторов e из $T_q S_\tau^v$ и w из $T_q W_p$ справедливо $K_{\sigma(w,e)} = 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \exp_q(te)$ — геодезическая во вполне геодезическом подмногообразии S_τ^v. Если $K_{\sigma(w,e)} > 0$, то для достаточно большого $a > 0$ вдоль $\bar\gamma(t)$ — отрезка геодезической $\gamma(t)$, где $-a \leqslant t \leqslant a$, найдется векторное поле $w(t) = f(t)\bar w(t)$, где $f(-a) = f(a) = 0$, а $\bar w(t)$ — поле параллельных векторов вдоль $\bar\gamma(t)$ такое, что $\bar w(0) = w$, и значение индексной формы $J_{\bar\gamma}$ на этом поле $J_{\bar\gamma}(w, w) < 0$ отрицательно, то есть вторая производная длины семейства кривых $\bar\gamma_s(t) = \exp_{\bar\gamma(t)}(sw(t))$, $-a \leqslant t \leqslant a$, отрицательна. Однако из условия (1), как нетрудно показать, следует, что отображение $\varphi_0 : C_\tau \to S$ является римановой субмерсией, и поэтому геодезическая $\bar\gamma(t)$ локально минимизирует расстояние между слоями $W_{\tilde\gamma(t)}$, где $\tilde\gamma(t) = \varphi_0(\gamma(t))$. Поэтому длины кривых $\bar\gamma_s(t)$ не меньше длины $\bar\gamma(t)$. Полученное противоречие доказывает лемму 5.2.

Из леммы 5.2 и (1) следует утверждение теоремы: непосредственно проверяется, что отображение $\psi : S \times W_p \to V_0{}^n$, $\psi(q, \exp_p v) = \exp_q(v(q))$ является изометрией. Доказательство леммы 5.2 приведено согласно ([65], 1988), оригинальное доказательство см. в ([14], 1981). Из теорем 3.2, 3.5 и 5.1 вытекает

Следствие 5.3. В любом многообразии $V_0{}^n$, у которого $\dim S = 1$ или $\operatorname{codim} S = 1, 2$, в любой его точке существует двумерное направление, в котором секционная кривизна равна нулю.

В связи с теоремой 5.1, естественно возникает вопрос: при каких условиях группа Γ оказывается тривиальной. Одно из таких условий было сформулировано в работе [31]. В ней рассмотрены многообразия $V_0{}^n$ с неотрицательным оператором кривизны R. Условие неотрицательности оператора кривизны означает, что свертка тензора кривизны $R_{ij,kl}$ с произвольным кососимметрическим тензором второй валентности ξ^{ij} неотрицательна: $R_{ij,kl}\xi^{ij}\xi^{kl}\geqslant 0$. Это условие значительно сильнее условия неотрицательности секционной кривизны при $n>3$, так как при $n>3$ множество кососимметрических тензоров второй валентности не исчерпывается простыми бивекторами. Оказывается, что при этом предположении (неотрицательности R) группа голономии Г тривиальна и тогда, по теореме 5.1, $V_0{}^n=S\times V_0{}^{\operatorname{codim} S}$.

Другое условие тривиальности Г было сформулировано в работах [13], [14] (1981).

Теорема 5.4 (Маренич В. Б.). Если в односвязном многообразии V_0^n выполняются условия: 1) $K(p, v, e, \rho)=O(\rho^4)$ при $\rho\to 0$; 2) $K_\sigma=0$ в каждой точке $p\in S$ и для любого двумерного направления $\sigma\subset\nu_pS$, то группа Г тривиальна, а $V_0^n=S\times V_0^{\operatorname{codim} S}$, где $V_0^{\operatorname{codim} S}$ диффеоморфно $R^{\operatorname{codim} S}$.

Доказательство теоремы проводится с помощью следующей геометрической конструкции с семейством треугольников, которая используется также при доказательстве теорем 5.5 и 6.4.

Пусть p — точка S, векторы e_1, e_2 лежат в T_pS, точки $q_i=\exp_p(ae_i)$ лежат на S, где a мало. Выберем произвольно вектор ν из ν_pS и зададим в точках q_i векторы из $\nu_{q_i}S$: $\nu_i=I_{p,q_i}(pq_i)(\nu)$. «Поднимем» треугольник Δpq_1q_2 «вверх»: образуем семейство треугольников $\Delta(\theta)$ с вершинами $p(\theta)$, $q_1(\theta)$, $q_2(\theta)$, где $p(\theta)=\exp_p(\theta\nu)$, $q_1(\theta)=\exp_{q_1}(\theta\nu_1)$, $q_2(\theta)=\exp_{q_2}(\theta\nu_2)$. Доказательство теоремы мы получим, подсчитав двумя разными способами вторую производную $L(\theta)$ длины стороны $q_1(\theta)q_2(\theta)$ в треугольнике $\Delta(\theta)$:

а) В любом треугольнике $\Delta(\theta)$ длина $L(\theta)$ выражается через длины его сторон $p(\theta)q_1(\theta)$ и $p(\theta)q_2(\theta)$, угол $p(\theta)$ и кривизну $K(\theta)=K_{\sigma(\overline{p(\theta)q_1(\theta)},\ \overline{p(\theta)q_2(\theta)})}$, а именно с точностью до $O(a^4)$.

$$L(\theta)=\tilde{L}(\theta)+ca^3K(\theta)+O(a^4), \tag{3}$$

где $\tilde{L}(\theta)$ — длина соответствующей стороны в плоском треугольнике с теми же длинами сторон, что и $p(\theta)q_1(\theta)$, $p(\theta)q_2(\theta)$, и углом $p(\theta)$, что и в $\Delta(\theta)$, а c — некоторая константа. Такая же формула справедлива и для второй производной $L(\theta)$ по θ. Поэтому если вторые производные указанных в (3) величин по θ при $\theta=0$ равны нулю, то и $L''(0)=O(a^4)$. Действительно,

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\rho(p(\theta), q_i(\theta))|_{\theta=0}=0, \quad i=1, 2,$$

следует из $K(p, \nu, e, \rho)=O(\rho^2)$, а условие $\frac{d^2}{d\theta^2}\angle p(\theta)|_{\theta=0}=0$

из того, что, согласно условию теоремы, выполнено более сильное соотношение 1). Равенство $\frac{d^2}{d\theta^2}K(\theta)|_{\theta=0}=0$ получается из 1) и 2) с помощью тождества Биянки. Подробно это вычисление см. в [14]. Таким образом:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}L(\theta)|_{\theta=0}=O(a^4). \tag{4}$$

б) С другой стороны, вторую производную длины $q_1(\theta)q_2(\theta)$ при $\theta=0$ мы можем найти с помощью формулы второй вариации длины: если $l_\theta(t)$ — семейство кратчайших $q_1(\theta)q_2(\theta)$, где параметр t на $l_0(t)$ равен длине дуги: $0\leqslant t\leqslant t(a)$, то, как следует из условия 1) теоремы 5.4,

$$L''(0)=\int\limits_0^{t(a)}\left\|\frac{D}{\partial t}\nu(t)\right\|^2 dt,$$

где $\nu(t)$ — якобиево поле на $l_0(t)=q_1q_2$, порожденное вариацией $l_\theta(t)$. Из условия 1) следует, что поле $\nu(t)$ линейное, а так как по условию $\nu(0)=\nu_1$ и $\nu(t(a))=\nu_2$, то

$$L''(0)=O(a^{-1}(\angle(\nu, J_\omega(\nu))))^2, \tag{5}$$

где ω — контур треугольника pq_1q_2. Как известно (см. [10]),

$$\angle(\nu, I_\omega(\nu))=\|R(e_1, e_2)\nu\|\cdot \mathrm{area}(\Delta)+o(\mathrm{area}(\Delta)),$$

где area Δ — площадь треугольника, которая есть $O(a^2)$. Поэтому, сравнивая (4) и (5), мы получаем, что для любых касательных к S векторов e_1 и e_2 и любого ν, нормального к S в точке p, справедливо: $R(e_1, e_2)\nu=0$. Откуда и следует утверждение теоремы. Пусть теперь $e(\rho)$, $w(\rho)$ — поля параллельных векторов вдоль $l_{v(\rho)}$, где $e(0)$ принадлежит T_{ps}, $w(0)$ принадлежит ν_{ps}, а $\sigma(p, v, w, e, \rho)$ — двумерное направление, образованное векторами $e(\rho)$, $w(\rho)$.

Теорема 5.5 (Маренич В. Б.) Если в односвязном многообразии V_0^n выполнено: $K_{\sigma(p,v,w,e,\rho)}=O(\rho^4)$ при $\rho\to 0$, то группа Γ — тривиальна, а $V_0^n=S\times V_0^{\mathrm{codim}S}$, где $V_0^{\mathrm{codim}S}$ — диффеоморфно $R^{\mathrm{codim}S}$.

§ 6. ГИПОТЕЗА ЧИГЕРА — ГРОМОЛА И ТЕОРЕМЫ ОБ УСЛОВИЯХ ДИФФЕОМОРФНОСТИ V_0^n И $\mathbf{R}^n$

Здесь мы обсудим вопрос об условиях, при которых V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$. Одна из таких теорем уже была нами доказана.

Если многообразие V_0^n имеет всюду положительную секционную кривизну, то V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ — теорема 3.3. Для двумерных открытых многообразий, согласно теореме 3.6, справедлива альтернатива: либо V_0^2 плоское, либо V_0^2 диффеоморфно $\mathbf{R}^2$, то есть утверждение о диффеоморфности V_0^2 и $\mathbf{R}^2$ имеет место, если на V_0^2 найдется хотя бы одна точка положительной кривизны. Чигер и Громол ([37]) предположили, что аналотичное утверждение справедливо и для многообразий любой размерности:

Гипотеза 6.1 (гипотеза Чигера-Громола). Если в открытом многообразии V_0^n существует точка, в которой все секционные кривизны положительны, то V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$.

В общем виде гипотеза 6.1 пока не доказана. Для ее доказательства, согласно теореме 3.1, достаточно доказать, что $\dim S=0$. В двумерном случае ее утверждение следует, как уже было сказано, из теоремы 3.6 Кон-Фоссена. При $n=3$ и $n=4$ утверждение гипотезы 6.1 следует из следствия 5.3. Первоначально случай $n=3$ был рассмотрен в [4], а случай $n=4$ — в [12].

Для произвольного $n>4$ гипотеза 6.1 доказана только при некоторых дополнительных предположениях: например, в работе [38] изучались многообразия V_0^n, у которых положительной кривизны «достаточно много», а именно, предполагается, что в V_0^n найдутся точка p и число $r>0$ такие, что для всех точек q из шара $B(p, r)$ все секционные кривизны в точке q не меньше, чем $(\pi/\lambda r)^2$, где $\lambda=2{,}46057$. При этом предположении автору с помощью полученного им обобщения теоремы сравнения Топоногова удается показать, что абсолютно выпуклое эквидистантное множество C лежит в шаре $B(p, r)$, где секционная кривизна больше нуля. Тогда из теоремы 3.2 следует: $\dim S=0$.

Наконец, в 1986 году Маренич доказал гипотезу Чигера-Громола для аналитических многообразий.

Теорема 6.2 ([18]). Если в аналитическом многообразии V_0^n существует точка, в которой все секционные кривизны положительны, то V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$.

Теорема 6.2 следует из того, что если $\dim S>0$, то через каждую точку многообразия V_0^n проходит вполне геодезическая пленка Синга нулевой кривизны. А именно: пусть точка p лежит на S и $\dim S>0$. Выберем произвольно векторы e из T_pS и ν из ν_pS, в направлении ν выпустим геодезическую $l_\nu(\rho)=\exp_p\rho\nu$ и зададим вдоль $l_\nu(\rho)$ поля параллельных векторов $e(\rho)$ и $\nu(\rho)$ так, что $e(0)=e$ и $\nu(0)=\nu$. Справедлива

Теорема 6.3. В аналитическом V_0^n $K(p, \nu, e, \rho)\equiv 0$.

Идея доказательства теоремы 6.3 уже приводилась в работе [15] (1985). Она заключается в следующем. Предположим противное: $K(p, \nu, e, \rho)\not\equiv 0$. Так как V_0^n — аналитическое многообразие, то найдется такое число b (выберем его минимально возможным), что $K(p, \nu, e, \rho)=O(\rho^{2b})$. На геодезической $\gamma(t)=$ $=\exp_p(te)$ с помощью поля нормальных векторов $\bar{\nu}(t)$ к S построим пленку Синга $\pi(s, t)=\exp_{\gamma(t)}s\bar{\nu}(t)$ и рассмотрим функцию $f_\tau(t)=\rho(\gamma(t), q_\tau(t))$, где кривая $q_\tau(t)$ есть пересечение пленки $\pi(s, t)$ с ∂C_τ.

Основным техническим моментом доказательства теоремы 6.3 является следующее утверждение.

Лемма 6.4. Справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f_\tau(t)\right| = O\left(f_\tau^{b+1}(t)\right).$$

Доказательство этого равенства из-за недостатка места не может быть здесь приведено.

Лемма 6.4 позволяет заключить, что для любой точки q на ∂C_τ и точки $p(q)$ на S, ближайшей к q, угол между касательным пространством T_pS, параллельно перенесенным в точку q вдоль $p(q)q$, и границей касательного конуса к ∂C_τ в точке q мал: если мы его обозначим через $F(q)$, то

$$F(q) = O(\rho(p, q)^{b+1}). \tag{1}$$

Теперь с длинным отрезком геодезической $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, можно проделать следующую процедуру: «поднять» его с S:

$$\gamma(t) \to \gamma_\tau(t) = \exp_{\gamma(t)}(\tau \bar{\nu}(t)),$$

а затем «опустить» на S с помощью отображения $\varphi_0 : C_\tau \to S$, то есть отобразить:

$$\gamma_\tau(t) \to \varphi_0(\gamma_\tau(t)) = \tilde{\gamma}(t) \subset S. \tag{2}$$

При первом отображении длина $\gamma(t)$ сокращается. Как можно показать:

$$L(\gamma_\tau(t)) \leqslant L(\gamma(t)) - K\tau^{2b+2}\int_0^T \Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \bar{\nu}(t))\, dt, \tag{3}$$

где

$$\Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \bar{\nu}(t)) = \frac{\partial^{2b}}{\partial\rho^{2b}} K(\gamma(t), \bar{\nu}(t), \dot{\gamma}(t), \rho)|_{\rho=0}.$$

Здесь через L обозначена длина кривой. Так как отображение φ_0 короткое, то $L(\tilde{\gamma}(t)) \leqslant L(\gamma_\tau(t))$. Соотношение же (1) позволяет показать, что кривая $\tilde{\gamma}(t)$ лежит близко к $\gamma(t)$ — в ее $o(\tau^{b+1})$-окрестности. Действительно: по построению, отображение $\varphi_\tau : V_0^n \to C_\tau$ таково, что определен вектор, касательный справа к кривой $\varphi_\tau(q)$: $\frac{d_+\varphi_\tau(q)}{d\tau}$, который лежит в нормальном конусе к ∂C_τ, и поэтому

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\varphi_0(\varphi_\tau(q))\right\| \leqslant F(\varphi_\tau(q)) \cdot \left\|\frac{d_+\varphi_\tau(q)}{d\tau}\right\|. \tag{4}$$

Лемма 6.5. Длины кривых $\varphi_\tau(q)$ равномерно по δ сходятся к нулю при $\delta \to 0$ для всех q из δ-окрестности S.

Из леммы 6.5 и (4) следует, что $\rho(p(q), p(\varphi_\tau(q))) = o(\tau^{b+1})$. Если же кривая $\tilde{\gamma}(t)$ лежит в $o(\tau^{b+1})$-окрестности геодезической $\gamma(t)$, то ее длина не может быть меньше длины $\gamma(t)$ более чем на $o(\tau^{b+1}) + T \cdot o(\tau^{2b+2})$

$$L(\tilde{\gamma}(t)) \geqslant L(\gamma(t)) - o(\tau^{b+1}) - T \cdot o(\tau^{2b+2}). \qquad (5)$$

Полагая теперь $T = \tau^{-b}$ и сравнивая (5) и (3), имеем:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \bar{\nu}(t))\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что отображение $(p, e, \nu) \to (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), \bar{\nu}(t))$ так же, как и геодезический поток $(p, e) \to (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$, сохраняет объем. Поэтому по теореме Биркгофа — Хинчина интеграл в левой части последнего соотношения почти всюду стремится к среднему значению функции Φ. Следовательно, среднее значение функции Φ равно нулю. А так как Φ по определению неотрицательна, то $\Phi \equiv 0$ или

$$K(p, \nu, e, \rho) = o(\rho^{2b}),$$

что противоречит выбору b. Отсюда следует теорема 6.3.

Отметим, что требование аналитичности в приведенном выше рассуждении существенно используется при доказательстве леммы 6.4. Однако можно предположить, что от этого требования можно избавиться, сохранив схему доказательства и сопоставляя поведение при $\rho \to 0$ функции $K(p, \nu, e, \rho)$ с поведением при $\rho \to 0$ функций вида $\|R(\nu(\rho), e(\rho))\nu(\rho)\|$, где R — тензор кривизны V_0^n, то есть можно предположить, что теорема 6.3 справедлива для любого многообразия V_0^n (гипотеза Топоногова — Маренича).

Известны также другие условия, обеспечивающие диффеоморфность V_0^n и $\mathbf{R}^n$. Пусть $B(p, \rho)$ — шар в V_0^n с центром в некоторой точке p. Обозначим через $K(\rho)$ максимум секционной кривизны, взятой по всем точкам $q \in \partial B(p, \rho)$ и по всем двумерным направлениям в этой точке. Тогда оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 6.4 Маренич [17]). Если в односвязном многообразии V_0^n функция $K(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, то V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$.

Условие теоремы 6.4 возникло по аналогии с условием основной теоремы в работе [44], в которой доказано, что если V_0^n имеет полюс и $\rho^{-2}K(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, то V_0^n изометрично $\mathbf{R}^n$. Упомянем еще одну теорему о диффеоморфности V_0^n и $\mathbf{R}^n$.

Теорема 6.5. Если в многообразии V_0^n объем шара радиуса ρ с центром в произвольной фиксированной точке растет вместе с ρ как ρ^n, то V_0^n диффеоморфно $\mathbf{R}^n$ (см. [19]).

Доказательство теоремы 6.3 локально — все геометрические построения происходят в малой окрестности S. Поэтому можно предположить, что справедливы следующие утверждения, являющиеся обобщениями гипотезы Чигера — Громола:

Гипотеза 6.7. Пусть C — выпуклое множество с границей ∂C в многообразии V^n неотрицательной секционной кривизны. Если в C найдется точка, в которой все секционные кривизны

V^n положительны, то семейство C_τ внутренних эквидистант C сходится к точке.

Гипотеза 6.8. Если C таково, как указано выше, и на ∂C найдется точка p, где ∂C строго выпукла, то семейство C_τ сходится к точке. Множество C может иметь нерегулярную границу, и точку p на ∂C мы называем точкой строгой выпуклости, если C можно коснуться в точке p снаружи гладкой гиперповерхностью F, все нормальные кривизны которой в точке p положительны. Легко доказать, что если в окрестности точки p все секционные кривизны V^n положительны, то все точки q, попадающие в эту окрестность, являются точками строгой выпуклости. Поэтому гипотеза 6.7 слабее чем 6.8. Гипотезы 6.7 и 6.8 справедливы, если секционная кривизна V^n положительна или, соответственно, все точки ∂C — строго выпуклые. Это утверждение можно обобщить следующим образом: назовем точку p на ∂C k-выпуклой, если в этой точке C можно коснуться снаружи гладкой поверхностью F, сумма k любых нормальных кривизн которой больше нуля. Как показано в [59], справедлива

Теорема 6.9. Если у компактного связного многообразия C положительной секционной кривизны граница ∂C — k-выпукла, то C гомотопически эквивалентно CW-комплексу размерности не выше $(k-1)$.

О других теоремах в этом направлении см. [60], [5].

§ 7. ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРОВ МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА V_0^n

Простейшими примерами многообразий V_0^n являются выпуклые открытые гиперповерхности в евклидовых пространствах и их прямые произведения с любым многообразием неотрицательной секционной кривизны. Построение более сложных примеров многообразий V_0^n основано на теореме О'Нейла о римановых субмерсиях [57] и заключается в следующем. Пусть на многообразиях M_1 и M_2 неотрицательной секционной кривизны действует группа изометрий G. На прямом произведении $M=M_1\times M_2$ определим ее действие так $g(m_1, m_2)=(gm_1, g^{-1}m_2)$, $m_i\in M_i$, $g\in G$. Тогда на пространстве орбит $V^n=M/G$ можно ввести метрику так, чтобы отображение $\pi: M\to V^n$ стало бы римановой субмерсией, то есть отображение π имело бы постоянный ранг, а его дифференциал был изометрией на ортогональном дополнении к его ядру. Согласно теореме О'Нейла, секционная кривизна при римановой субмерсии не убывает, поэтому многообразие V^n оказывается многообразием неотрицательной секционной кривизны. Таким способом были построены полные метрики неотрицательной кривизны на касательных расслоениях TS^n к n-мерной сфере S^n (см. [34]). Кроме того, в каждом классе стабильно эквивалентных расслоений над сферой S^n также найдено расслоение, на котором существует метрика неотрицательной секционной кривизны (см. [58]). Далее, на любых векторных расслоениях со слоем $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, над многообразием с положительной кривизной

Риччи можно построить метрику положительной кривизны Риччи (см. [56]). Наконец, в работе [67] (1988) была детально исследована метрика неотрицательной секционной кривизны на $TS^2 = \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{R}^2/\mathbf{SO}(2)$ и было показано, что эта метрика не обладает свойством «жестокости», то есть ее всегда можно немного «пошевелить» так, чтобы условие неотрицательности секционной кривизны сохранилось, но полученные метрики уже не были бы образами прямого произведения метрик при некоторой римановой субмерсии. В частности, при этом показано, что «слой» TS^2 — образ $\mathbf{R}^2$ при субмерсии перестает быть вполне геодезической поверхностью. Во всех до сих пор известных примерах слои расслоения νS были всегда вполне геодезическими поверхностями. Возможно, что верно следующее утверждение: в любом аналитическом многообразии $V_0{}^n$ слои расслоения νS суть вполне геодезические поверхности, изометричные друг другу. Относительно вопросов, близких к затронутым здесь, смотри работы [3], [16], [47], [48], [54], [68].

§ 8. КЕЛЕРОВЫ ОТКРЫТЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Отметим в заключение некоторые результаты о строении открытых многообразий неотрицательной кривизны, имеющих комплексную структуру. Основные усилия здесь сосредоточены в направлении доказательства следующих гипотез Грини и Ву: [69]

I. Будет ли полное некомпактное келерово многообразие положительной бисекционной кривизны штейновым.

II. Будет ли полное некомпактное кэлерово многообразие положительной секционной кривизны биголоморфно $\mathbf{C}^n$.

Отметим, что если V^{2n} — многообразие, удовлетворяющее условиям гипотезы II, то, согласно теореме 3.1, V^{2n} допускает исчерпание выпуклыми множествами C_t, поэтому V_0^{2n} — штейново, то есть удовлетворяет заключению гипотезы I. Относительно гипотезы I пока мало что известно (авторам обзора), а гипотеза II доказана для многообразий с полюсом и с дополнительными условиями, обеспечивающими в частности квазиизометричность V^{2n} и $\mathbf{C}^n$ (см. [66]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акбаров С. А., Топоногов В. А.* Теорема сравнения углов треугольника для одного класса римановых многообразий // Тр. ин-та мат. СО АН СССР.— 1987.— *9*.— С. 16—25 (РЖМат, 1988, 3А865)

2. *Бишоп Р., Криттенден Р. Д.* Геометрия многообразий.— М.: Мир, 1967.— 335 с. (РЖМат, 1969, 11А513К)

3. *Борисенко А. А., Ямпольский А. Л.* О метрике Сасаки нормального рас-

слоения подмногообразия в римановом пространстве // Мат. сб.— 1987.— *134*, № 2.— С. 158—176 (РЖМат, 1988, 1А795)
4. *Бураго Ю. Д.* О трехмерных открытых римановых пространствах неотрицательной кривизны // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд.— 1976.— *66*.— С. 103—113 (РЖМат, 1977, 7А564)
5. — О гомотопическом типе римановых многообразий с краем при ограничениях на их p-мерные кривизны и p-средние кривизны края // IX Всес. геометр. конф.— Кишинев, сент. 1988 г.: Тез. сообщ.— Кишинев, 1988.— С. 54—55
6. —, *Залгаллер В. А.* Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны // Успехи мат. наук.— 1977.— *32*, № 3.— С. 3—55 (РЖМат, 1977, 10А470)
7. —, *Топоногов В. А.* О трехмерных римановых пространствах ограниченной кривизны // Мат. заметки.— 1973.— *13*, № 6.— С. 881—887 (РЖМат, 1973, 10А608)
8. *Буяло С. В.* Кратчайшие на выпуклых гиперповерхностях риманова пространства // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд.— 1976.— *66*.— С. 114—132 (РЖМат, 1977, 6А571)
9. *Веденяпин Л. И., Мазаев Е. Д., Топоногов В. А.* Экстремальный случай теоремы сравнения углов треугольника // Сиб. мат. ж.— 1985.— *26*, № 1.— С. 206—209 (РЖМат, 1985, 8А824)
10. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 342 с. (РЖМат, 1971, 7А734К)
11. *Кон-Фоссен С. Э.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.— М., 1959.— 303 с. (РЖМат, 1960, 10919К)
12. *Маренич В. Б.* Метрическое строение четырехмерных открытых аналитических многообразий неотрицательной кривизны // Сиб. мат. ж.— 1980.— *21*, № 5.— С. 161—165 (РЖМат, 1981, 2А731)
13. — Метрическое строение открытых многообразий неотрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1981.— *261*, № 4.— С. 801—804 (РЖМат, 1982, 4А688)
14. — Метрическое строение открытых многообразий неотрицательной кривизны // Укр. геометрич. сб.— Харьков, 1983.— № 26.— С. 79—96 (РЖМат, 1983, 12А893)
15. — Строение тензора кривизны открытого многообразия неотрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1983.— *273*, № 5.— С. 1057—1062 (РЖМат, 1984, 5А755)
16. — Метрика неотрицательной секционной кривизны на касательном расслоении к двумерной сфере // Сиб. мат. ж.— 1986.— *27*, № 2.— С. 127—138 (РЖМат, 1986, 8А814)
17. — Топологический феномен пробела для открытых многообразий неотрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1985.— *284*, № 3.— С. 528—531 (РЖМат, 1986, 2А774)
18. — Строение открытых многообразий неотрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1989.— *305*, № 6.— С. 1311—1314
19. —, *Топоногов В. А.* Открытые многообразия неотрицательной кривизны Риччи с быстро растущим объемом // Сиб. мат. ж.— 1985.— *26*, № 4.— С. 191—194 (РЖМат, 1985, 12А820)
20. *Новиков С. П.* Топология // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.— 1986.— *12*.— С. 5—252 (РЖМат, 1987, 7А544)
21. *Свитцер Р. М.* Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии.— М.: Наука, 1985.— 606 с. (РЖМат, 1985, 9А416 К)
22. *Топоногов В. А.* Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу // Успехи мат. наук.— 1959.— *14*, № 1.— С. 87—130 (РЖМат, 1960, 5834)
23. — Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии // Сиб. мат. ж.— 1964.— *5*, № 6.— С. 1358—1369 (РЖМат, 1965, 4А421)

24. *Шарафутдинов В. А.* Полные открытые многообразия неотрицательной кривизны // Сиб. мат. ж.— 1974.— *15,* № 1.— С. 177—191 (РЖМат, 1974, 6А705)
25. — Теорема Погорелова—Клингенберга для многообразий, гомеоморфных R^n // Сиб. мат. ж.— 1977.— *18,* № 4.— С. 915—925 (РЖМат, 1978, 2А658)
26. — О выпуклых множествах в многообразии неотрицательной кривизны // Мат. заметки.— 1979.— *26,* № 1.— С. 129—136 (РЖМат, 1979, 11А625)
27. *Abresch V.* Lower curvature bounds, Toponogov's theorem, and bounded topology. I // Ann. Sci. Éc. norm. supér.— 1985.— *18,* № 4.— С. 651—670 (РЖМат, 1986, 11А810)
28. — Lower curvature bounds, Toponogov's theorem, and bounded topology. II // Ann. Sci. Éc. norm. supér.— 1987.— *20,* № 3.— С. 475—502 (РЖМат, 1988, 6А811).
29. —, *Gromoll D.* On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature. MPI.— 1987.— 38 с.
30. *Anderson M.* Metrics of negative curvature on vector bundles // Proc. Amer. Math. Soc.— 1987.— *99,* № 2.— С. 357—363
31. *Baldin Y. Y., Noronha M. H.* Some complete manifolds with non-negative curvature opetator // Math. Z.— 1987.— *195,* № 3.— С. 383—390 (РЖМат, 1987, 12А752)
32. *Berger M.* An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications // Ill. J. math.— 1962.— *6,* № 4.— С. 700—712 (РЖМат, 1964, 3А339)
33. *Cheeger J.* Finiteness theorems for Riemannian manifolds // Amer. J. Math.— 1970.— *92,* № 1.— С. 61—74 (РЖМат, 1971, 3А460)
34. — Some examples of manifolds of nonnegative curvature // J. Differ. Geom.— 1973.— *8,* № 4.— С. 623—628 (РЖМат, 1974, 11А807)
35. —, *Ebin D.* Comparison theorems in Riemannian geometry.— North. Holl. Publ. Co.— 1975.— № 1342 (РЖМат, 1976, 7А892К)
36. —, *Gromoll D.* The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature // J. Differ. Geom.— 1971.— *6,* № 1.— С. 119—128 (РЖМат, 1972, 6А671)
37. —, — On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math.— 1972.— *96,* № 3.— С. 413—443 (РЖМат, 1973, 4А716)
38. *Elerath D.* An improved Toponogov comparison theorem for nonnegatively curved manifolds // J. Differ. Geom.— 1980.— *15,* № 2.— С. 187—216 (РЖМат, 1982, 3А801)
39. *Eschenburg J.-H., Heintze E.* An elementary proof of the Cheeger — Gromoll splitting theorem // Ann. Glob. Analysis and Geometry.— 1984.— *2,* № 2.— С. 141—151
40. —, *Schroeder V., Strake M.* Curvature at infinity of open nonnegatively curved manifolds.— Preprint.— Univ. Munster, 1987
41. *Galloway G.* A generalization of the Cheeger—Gromoll splitting theorem // Arch. Math.— 1986.— *47,* № 4.— С. 372—375 (РЖМат, 1987, 3А720)
42. *Greene R. E., Shiohama K.* Convex functions on complete noncompact manifolds. Topological structure // Invent. math.— 1981.— *63,* № 1.— С. 129—157 (РЖМат, 1981, 8А755)
43. —, — Convex functions on complete noncompact manifolds; differentiable structure // Ann. Sci. Éc. norm. supèr.— 1981.— *14,* № 4.— С. 357—367 (РЖМат, 1982, 10А558)
44. —, *Wu H.* Gap theorems for noncompact Riemannian manifolds // Duke Math. J.— 1982.— *49,* № 3.— С. 731—756 (РЖМат, 1983, 6А718)
45. *Gromoll D., Meyer W.* On complete open manifolds of positive curvature // Ann. Math.— 1969.— *90,* № 1.— С. 75—90 (РЖМат, 1970, 12А487)
46. *Gromov M.* Curvature, diameter and Betti numbers // Comment. math. helv.— 1981.— *56,* № 2.— С. 179—195 (РЖМат, 1982, 2А686)
47. —, *Lawson H. B.,* Jr. Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I // Ann. 1979.— Providence R. L., 1980.— С. 91—146 (РЖМат, 1980, 12А628)

48. —, — The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature // Ann. Math.— 1980.— *111*, № 3.— С. 423—434 (РЖМат, 1981, 2А608)
49. *Grove K., Petersen P.* Bounding homotopy types by geometry // Ann. Math.— 1988.— *128*.— С. 195—208
50. *Ichida R.* Riemannian manifolds with compact boundary // Yokohama Math. J.— 1981.— *29*.— С. 169—177 (РЖМат, 1982, 11А621)
51. — On Riemannian manifolds of nonnegative Ricci curvature containing compact minimal hypersurfaces // Geom. Geod. and Relat. Top. Proc. Symp.— 1984.— С. 473—485 (РЖМат, 1985, 12А836)
52. *Innami N.* Splitting theorems of Riemannian manifolds // Compos. Math.— 1982.— *47*, № 3.— С. 237—247 (РЖМат, 1983, 5А619)
53. — Convexity in Riemannian manifolds without focal points // Geom. Geod. and Relat. Top. Proc. Symp.— 1984.— С. 311—332 (РЖМат, 1986, 1А881)
54. *Lawson H. B., Yau S. T.* Scalar curvature, non-abelian group actions, and the degree of symmetry of exotic spheres // Comment. math. helv.— 1974.— *49*, № 2.— С. 232—244 (РЖМат, 1975, 2А596)
55. *Maeda M.* A geometric significance of total curvature on complete open surfaces // Geom. Geod. and Rel. Top. Proc. Symp.— 1984.— С. 451—458 (РЖМат, 1986, 1А884)
56. *Nash I. C.* Positive Ricci curvature on fibre bundles // J. Differ. Geom. 1979.— *14*, № 2.— С. 241—254 (РЖМат, 1981, 4А626)
57. *O'Neill B.* The fundamental equations of submersion // Mich. math. J.— 1966.— *13*, № 4.— С. 459—569 (РЖМат, 1967, 10А527)
58. *Rigas A.* Geodesic spheres as generators of the homotopy groups of O, BO // J. Differ. Geom.— 1978.— *13*, № 4.— С. 527—545 (РЖМат, 1980, 10А382)
59. *Sha J. P.* *p*-convex Riemannian manifolds // Invent. math.— 1986.— *83*, № 3.— С. 437—447 (РЖМат, 1986, 9А599)
60. — Handlebodies and *p*-convexity // J. Differ. Geom.— 1987.— *25*, № 3.— С. 353—361 (РЖМат, 1988, 3А774)
61. —, *Yang D. G.* Examples of manifold of positive Ricci curvature // J. Differ. Geom.— 1989.— *29*, № 1.— С. 95—103
62. *Shiohama K.* Busemann functions and total curvature // Invent. math.— 1979.— *53*.— С. 281—297 (РЖМат, 1980, 4А720)
63. — Topology of complete noncompact manifolds // Geom. Geod. and Relat. Top. Proc. Symp.— 1984.— С. 423—450 (РЖМат, 1986, 1А883)
64. — The role of total curvature on complete noncompact Riemannian 2-manifolds // Ill. J. Math.— 1984.— *28*, № 4.— С. 597—620 (РЖМат, 1985, 10А733)
65. *Strake M.* A splitting theorem for open nonnegatively curved manifolds // Manuscr. math.— 1988.— *61*, № 3.— С. 315—325 (РЖМат, 1989, 1А732)
66. *Sugiyama K.* On complete Kähler manifolds with fast curvature decay // Osaka J. Math.— 1985.— *22*.— С. 261—275
67. *Walschap G.* Nonnegatively curved manifolds with souls of codimension II // J. Differ. Geom. —1988.— *27*, № 3.— С. 525—537 (РЖМат, 1989, 2А726)
68. *Wei G.* Examples of complete manifolds of positive Ricci curvature with nilpotent isometry groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1988.— *19*, № 1.— С. 311—313
69. *Wu H.* Function theory on non-compact Kähler manifolds // DMV seminar.— 1983.— *3*.— С. 68—156
70. *Yamaguchi T.* Locally geodesically quasiconvex functions on complete Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— *298*, № 1.— С. 307—330 (РЖМат, 1987, 6А811)
71. — On the structure of locally convex filtrations on complete manifolds // J. Math. Soc. Jap.— 1988.— *40*, № 2.— С. 221—234 (РЖМат, 1988, 11А891)