А. С. Благовещенский, К. К. Лаврентьев, Обратные задачи нахождения граничного условия в теории распространения нестационарных волн. I,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1975, том 51, 78–84

Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН. I.

§ I.

В работе рассматриваются задачи о нахождении неизвестного коэффициента в граничном условии третьего рода, по некоторым данным о поведении функции Грина на границе.

Сформулируем прямую задачу. Ищется функция $U(x,z,t)$, являющаяся решением следующей задачи:

$$\left.\begin{array}{l} U_{tt}=U_{xx}+U_{zz} \\ \left[\dfrac{\partial U}{\partial z}+h(x)U\right]\Big|_{z=0}=\delta(x,t), \quad U\Big|_{t<0}\equiv 0, \ z\geqslant 0, \ -\infty<x<\infty \end{array}\right\}. \tag{1.1}$$

В (1.1) $h(x)$ – непрерывная функция, известно, что решение задачи (1.1) существует и единственно. Обозначим через $\varphi(x,t)$ сужение $U(x,z,t)$ на плоскость $z=0$: $U(x,z,t)\big|_{z=0}=\varphi(x,t)$. Как известно, $\varphi(x,t)\equiv 0$ при $t<|x|$, при $t>|x|$ функция $\varphi(x,t)$ однозначно определяется поведением $h(x)$ на интервале $\left[\frac{x-t}{2};\frac{x+t}{2}\right]$. Рассмотрим область Q_{p^*,q^*} точек (x,t) на плоскости $z=0$, удовлетворяющих неравенствам:

$$0<\frac{x+t}{2}<q^*,\quad 0<\frac{t-x}{2}<p^*,\quad 0<q^*<\infty,\quad 0<p^*\leqslant\infty .$$

Тогда для области Q_{p^*,q^*}:

$$\varphi(x,t)=B_{p^*,q^*}h, \tag{2.1}$$

где B_{p^*,q^*} – некоторый нелинейный оператор, определенный на функциях $h(x)$, заданных на интервале $[-p^*;q^*]$.

Главный интерес для нас будет представлять обратная задача определения функции $h(x)$ по заданной функции $\varphi(x,t)$, т.е. задача обращения оператора B_{p^*,q^*}. Легко видеть, что обратная задача в такой постановке переопределена. Поэтому будут рассмотрены задачи, в которых задается лишь часть информации, заключенной в функции $\varphi(x,t)$. Это означает, что вводится необратимый оператор T, сопоставляющий функции $\varphi(x,t)$ некоторую функцию $\theta(t)$, которую мы и будем считать известной. О функции $h(x)$ мы будем предполагать, что $h(x)$ известна при $x<x_0$, где $0\leqslant x_0<q^*$. Обратная задача заключается в нахождении h при $x>x_0$ из уравнения

$$\theta=TB_{p^*,q^*}h . \tag{3.1}$$

При решении обратной задачи нам придется одновременно искать и функцию

$$\omega(x,t)=2\pi\sqrt{t^2-x^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi(x,t)-\frac{1}{\pi\sqrt{t^2-x^2}}\right]. \quad (4.1)$$

Различные конкретные постановки обратной задачи определяются: I). выбором области Q_{p^*,q^*}, 2) заданием оператора T, 3) классами искомых (h) и заданных (θ) функций. Ниже будут рассмотрены три задачи, которые обозначим цифрами I, П, Ш.

Задача I.

I) Q_{p^*,q^*} - квадрат. $p^*=q^*=\frac{t^*}{2}$

2) Оператор T задается формулой: $T\varphi=\omega|_{x=0}=\theta(t)$

3) $h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, удовлетворяющих требованию $|h(x)|<M$, где M достаточно велико, при $x_0<x<\frac{t^*}{2}$; $h(x)$ предполагается известной и $|h(x)|<M_0$ при $x<x_0$ $(x_0>0)$ Заданная функция $\theta(t)$ непрерывна и $|\theta(t)|<M_0$ при $t<t^*$. $\theta(t)$ задается произвольно при $t>2x_0$, при $t<2x_0$ $\theta(t)$ однозначно определяется по известной $h(x)$ при $x<x_0$.

Задача.П.

I) Q_{p^*,q^*} - квадрат. $p^*=q^*=\frac{t^*}{2}$

2) Оператор T задается формулой: $T\varphi=\omega|_{x=0}=\theta(t)$

3) $h(x)$ ищется в классе непрерывных функций, допускающих при $x\geqslant 0$ представление $h(x)=h(0)+x^{\alpha}h_1(x)$ где $|h_1(x)|<M$ (M достаточно велико) при $x<t^*/2$ и $\alpha>0$. $h_1(x)$ предполагается известной и $|h_1(x)|<M_0$ при $x\leqslant 0$. Заданная функция $\theta(t)$ непрерывна и имеет представление $\theta(t)=t^{\alpha}\theta_1(t)$, где $|\theta(t)|<M_0$ при $t<t^*$.

Задача Ш.

I) Q_{p^*,q^*} - полуполоса. q^* - конечно, а $p^*=\infty$.

Как будет видно из дальнейшего, если носитель $h(x)$ ограничен снизу, $\varphi(x,t)$ имеет при $p=\frac{t-x}{2}\to\infty$ асимптотику вида: $\tilde{\varphi}(p,q)=\frac{\gamma(q)}{p^{1/2}}+O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)$ где $p=\frac{t-x}{2}$, $q=\frac{t+x}{2}$.

2) Оператор T задается формулой: $T\varphi=2\pi q^{1/2}\frac{d}{dq}\left[\gamma(q)-\frac{1}{2\pi q^{\frac{1}{2}}}\right]=\theta(q)$

3) $h(x)$ ищется в классе непрерывных функций удовлетворяющих требованию $|h(x)|<M$, где M достаточно велико, при $x_0<x<q^*$. При $x<x_0$ $h(x)$ предполагается известной, причем $h(x)\equiv 0$ при $x<0$ и $|h(x)|<M_0$ при $x<x_0$. Заданная функция $\theta(q)$ непрерывна и $|\theta(q)|<M_0$ при $q<q^*$. $\theta(q)$ задается произвольно при $q>x_0$ и однозначно определяется при $q<x_0$ по известной $h(x)$ $(x\in(-\infty;x_0])$.

В работе доказаны две теоремы.

Теорема I. Для каждой из задач существует такое q^*, что оператор имеет обратный, определенный на всем множестве заданных функций. В задаче I q^* зависит от M, M_0, x_0, в задаче II – от M, M_0, α, в задаче III – от M, M_0, x_0.

Теорема II. Каждая из трех задач может иметь не больше одного решения для любого q^*.

Задачи, близкие к сформулированным, рассматриваются в статье [2], а по методу исследования эта работа близка к работе [I].

§ 2.

Докажем часть теоремы I, относящуюся к задаче I. Доказательство будет состоять в том, что для h и ω будет выведена нелинейная система вида: $X = AX$, где A оператор сжатия в некотором шаре подходящим образом выбранного банахова пространства, элементами которого являются пары функций $X = \begin{pmatrix} h(x) \\ \omega(x,t) \end{pmatrix}$.

Пусть решение обратной задачи I существует, тогда функция $u(x,z,t)$, являющаяся решением прямой задачи (1.1), имеет следующее представление через $h(x)$ и $\varphi(x,t)$:

$$u(x,z,t) = \frac{1}{\pi(t^2-x^2-z^2)_+^{1/2}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\tau<t} \frac{h(\xi)\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-z^2]_+^{1/2}}, \qquad (1.2)$$

где $\dfrac{1}{[s]_+^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{s^{\alpha}} & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$.

Положив в (1.2) $z = 0$ и введя функцию $\varphi_0(x,t) = \varphi(x,t) - \dfrac{1}{\pi(t^2-x^2)_+^{1/2}}$, получим:

$$\varphi_0(x,t) = -\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\tau<t} \frac{h(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{\frac12}(\tau^2-\xi^2)_+^{\frac12}} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\tau<t} \frac{h(\xi)\varphi_0(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{1/2}}. \qquad (2.2)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.2)

$$-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\tau<t} \frac{h(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{\frac12}(\tau^2-\xi^2)_+^{\frac12}} = \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \Gamma(x,t,\xi)\,h(\xi)\,d\xi,$$

где $\Gamma(x,t,\xi) = -\dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\int \frac{d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}$.

Для функции $\Gamma(x,t,\xi)$ справедливо:

1) $\Gamma(x,t,\xi) \equiv 0$ при $t < |x|$,
2) $\Gamma(x,t,\xi)\Big|_{\xi=\frac{x\pm t}{2}} = -\dfrac{1}{\pi(t^2-x^2)_+^{1/2}}$,
3) $\Gamma(x,t,\xi)\Big|_{t=|x|} = -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{(x-\xi)\cdot\xi}}$,
4) $\Gamma(x,t,\xi)$ и $R(x,t,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma$ – суммируемые функции по ξ при $\xi \in \left[\dfrac{x-t}{2}; \dfrac{x+t}{2}\right]$.

Используя свойство три функции $\Gamma(x,t,\xi)$, нетрудно вывести для $\varphi_0(x,t)$ следующее представление:

$$\varphi_0(x,t)=-\varepsilon(t-|x|)\frac{sgn(x)}{2\pi}\int\limits_0^x\frac{h(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)\xi}}+\varphi_1(x,t), \qquad (3.2)$$

в (3.2) $\varepsilon(x)$ – функция Хевисайда, $\varphi_1(x,t)$ – непрерывная функция. Чтобы получить систему уравнений вида $X=AX$ (иными словами, пару уравнений $h=A_1(h,\omega)$ и $\omega=A_2(h,\omega)$), надо продифференцировать (2.2) по t. Так как второе слагаемое в правой части уравнения (2.2) имеет структуру $\frac{1}{\pi}\int h(\xi)\varphi_0(\xi,t)*[t^2-(x-\xi)^2]_+^{\frac{1}{2}}d\xi$, где свертка производится по t, то с учетом свойств функции $\Gamma(x,t,\xi)$ и представления (3.2) для $\varphi_0(x,t)$, получим:

$$\omega(x,t)=-h\left(\frac{x+t}{2}\right)-h\left(\frac{x-t}{2}\right)+2\pi(t^2-x^2)_+^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}}R(x,t,\xi)h(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{(t+x)_+^{\frac{1}{2}}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}}\frac{h(\xi)d\xi}{(t+x-2\xi)^{1/2}}\int\limits_0^{\xi}\frac{h(\xi_1)d\xi_1}{\sqrt{\xi_1(\xi-\xi_1)}}+\frac{(t-x)_+^{\frac{1}{2}}}{\pi}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{0}\frac{h(\xi)d\xi}{(t-x+2\xi)^{\frac{1}{2}}}\int\limits_{\xi}^{0}\frac{h(\xi_1)d\xi_1}{\sqrt{\xi_1(\xi-\xi_1)}}- \qquad (4.2)$$

$$-\frac{(t^2-x^2)_+^{\frac{1}{2}}}{\pi}\iint\limits_{\tau<t}\frac{h(\xi)\omega(\xi,\tau)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{\frac{1}{2}}(\tau^2-\xi^2)_+^{\frac{1}{2}}}.$$

Воспользовавшись тем, что $h(x)$ известно при $x<x_0$, можно определить $\omega(x,t)$ для $(x,t)\in S_1^{x,t}$ (см.рис.I). Будем считать, что это сделано. Тогда, выделяя в одно слагаемое в уравнении (4.2) все известные функции, имеем:

$$\omega(x,t)=\mathcal{F}(x,t)+2\pi(t^2-x^2)_+^{\frac{1}{2}}\int\limits_{x_0}^{\frac{x+t}{2}}R(x,t,\xi)h(\xi)d\xi-h\left(\frac{x+t}{2}\right)+$$

$$+\frac{(t+x)_+^{\frac{1}{2}}}{\pi}\iint\limits_{max(\xi,\xi_1)>x_0}\frac{h(\xi)\,h(\xi_1)d\xi\,d\xi_1}{(t+x-2\xi)_+^{\frac{1}{2}}(\xi-\xi_1)_+^{\frac{1}{2}}\xi_+^{\frac{1}{2}}}- \qquad (5.2)$$

$$-\frac{(t^2-x^2)_+^{\frac{1}{2}}}{\pi}\iint\limits_{S_2^{x,t}}\frac{h(\xi)\omega(\xi,\tau)d\xi d\tau}{[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2]_+^{\frac{1}{2}}(\tau^2-\xi^2)_+^{\frac{1}{2}}}.$$

В (5.2) $\mathcal{F}(x,t)$ – известная функция, а область $S_2^{x,t}$ указана на рис.I. Положив в (5.2) $x=0$ и выразив $h(x)$, получим:

$$h(t)=-\theta(2t)+\mathcal{F}(0,2t)+4\pi t\int\limits_{x_0}^{t}R(0,2t,\xi)h(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\pi}\iint\limits_{max(\xi,\xi_1)>x_0}\frac{h(\xi_1)h(\xi)d\xi\,d\tau}{[t-\xi]_+^{1/2}(\xi-\xi_1)_+^{1/2}\xi_{1+}^{1/2}}-\frac{2t}{\pi}\iint\limits_{S_2^{0,2t}}\frac{\omega(\xi,\tau)h(\xi)d\xi d\tau}{[(2t-\tau)^2-\xi^2]_+^{\frac{1}{2}}(\tau^2-\xi^2)_+^{\frac{1}{2}}}. \qquad (6.2)$$

Подставляя теперь в (5.2) вместо $h(\frac{x+2t}{2})$ ее выражение из (6.2) и объединяя получившееся после этой подстановки уравнение с уравнением (6.2), получаем необходимую систему уравнений

527 6

$$\left.\begin{array}{l} h=A_1(h,\omega) \\ \omega=A_2(h,\omega) \end{array}\right\}. \qquad (7.2)$$

Введем теперь семейство банаховых пространств C_{t^*,x_0} элементами которых X являются пары непрерывных функций $h(x)$, где $x\in(x_0,\frac{t^*}{2})$ и $\omega(x,t)$, где $(x;t)\in S_2^{o,t^*}$. $\|X\|=$ $=max\{\max_{x\in(x_0 t^*/2)}|h(x)|\ ;\ \max_{(x;t)\in S_2^{o,t^*}}|\omega(x,t)|\}$. Во всех слагаемых в правой части системы (7.2), зависящих от неизвестных функций h и ω, эти функции стоят под знаком интеграла и интегрирование производится по малым областям или малым интервалам при t^*-2x_0 близких к нулю. Поэтому, как можно показать, (7.2) является системой с оператором сжатия в шаре $K_{X^*,M_1}=\{X: |X-X^*|<M_1\}$ пространства C_{t^*,x_0} при t^* достаточно близком к $2x_0$ и

$$X^*=\begin{pmatrix} -\theta(t^*)+\mathcal{F}(0,t^*) \\ \mathcal{F}(x,t)+\theta(x_1+t)-\mathcal{F}(0,x+t) \end{pmatrix}. \qquad (8.2)$$

В 8.2 $(x;t)\in S_2^{o,t^*}$ и $M_1+\|X^*\|<M$ где $\|X^*\|$ легко оценивается через M_0.

Тем самым существует такое $q^*=\frac{t^*}{2}$, зависящее от M, M_0, x_0, что решение обратной задачи существует и единственно в шаре $K_{X^*_1 M_1}$. Нетрудно проверить, что если h получено из системы (7.2), то h – решение обратной задачи I.

Часть теоремы I, относящаяся к задаче II, доказывается аналогично.

§ 3.

Рассмотрим теперь задачу Ш. Положив в (1.2) $z=0$ и, сделав замену $p=\frac{t-x}{2}$, $q=\frac{t+x}{2}$, получим:

$$\tilde{\varphi}(p,q)=\frac{1}{2\pi p^{1/2}q^{1/2}}-\frac{1}{\pi}\iint_{\xi,\tau}\frac{h(\xi)\varphi(\xi,\tau)}{[2p-(\tau-\xi)]_+^{1/2}[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}}. \qquad (1.3)$$

Пусть $p\to\infty$. Из (1.3) следует, что

$$\tilde{\varphi}(p,q)=\frac{1}{2\pi q^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\pi\sqrt{2}p^{\frac{1}{2}}}\iint_{\xi,\tau}\frac{h(\xi)\varphi(\xi,\tau)}{[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}}\left[1-\frac{\tau-\xi}{4p}+\ldots\right]d\xi d\tau$$

и для $\tilde{\varphi}(p,q)$ имеет место представление, указанное при формулировке задачи Ш, где

$$\gamma(q)=\frac{1}{2\pi q^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\iint_{\xi,\tau}\frac{h(\xi)\varphi(\xi,\tau)}{[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}}. \qquad (2.3)$$

Введем функции $\gamma_0(q)=-[\gamma(q)-\frac{1}{2\pi q^{1/2}}]$ и $\varphi_0(x,t)=\varphi(x,t)-\frac{1}{\pi(t^2-x^2)_+^{\frac{1}{2}}}$. Тогда

$$\gamma_0(q)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\iint\limits_{\xi,\tau}\frac{h(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\iint\limits_{\xi,\tau}\frac{h(\xi)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau}{[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}}. \tag{3.3}$$

Дифференцируя (3.3) по q и выражая $h(q)$, получим:

$$h(q)=+\theta(q)+\frac{q^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_0^q h(\xi)d\xi\int_0^1\frac{\sqrt{\ell}\,d\ell}{\sqrt{1-\ell}\,[\ell(q-\xi)+\xi]^{3/2}}+$$
$$+\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^q\frac{h(\xi)d\xi}{(q-\xi)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\xi}\frac{h(\xi_1)d\xi_1}{\sqrt{\xi-\xi_1}}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}q^{\frac{1}{2}}\iint\limits_{\xi,\tau}\frac{\omega(x,t)h(\xi)\,d\xi\,d\tau}{[2q-(\tau+\xi)]_+^{1/2}(\tau^2-\xi^2)_+^{1/2}} \tag{4.3}$$

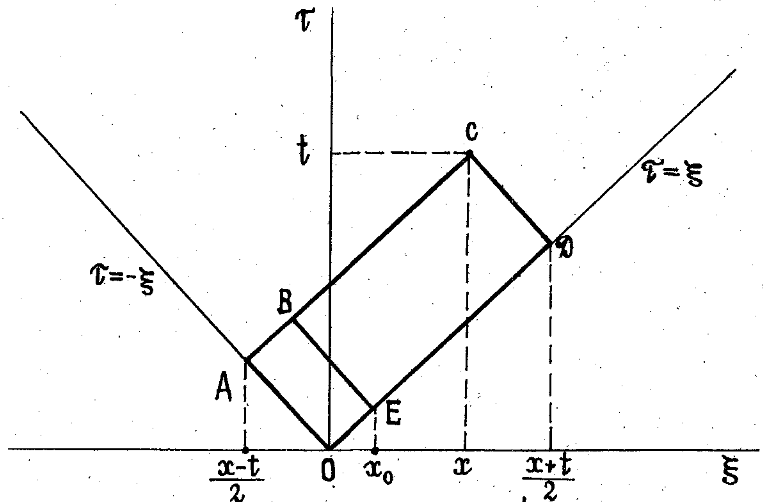
Для ω по-прежнему остается верным уравнение (5.2). Нетрудно показать, что система уравнений (4.3) и (5.2) является, аналогично (7.2), системой с оператором сжатия, если q^* достаточно близко к x_0. Теорема II является непосредственным следствием теоремы I. Действительно, если в какой-нибудь из трех задач существует два решения h_1 и h_2 при $x>x_0$, то пусть x_1 есть точная нижняя граница точек, для которых $h_1\equiv h_2$ $(x_1>x_0)$. Поставим задачу I или III о нахождении $h(x)$ при $x>x_1$. Из теоремы I следует, что $h_1\equiv h_2$ при x достаточно близких к x_1, что противоречит определению x_1.

Замечания.

I) В задаче III условие $h(x)\equiv 0$ при $x<0$ можно заменить требованием ограниченности снизу носителя $h(x)$.

2) Если известен скачок φ_0 при $t=x$, то (3.2) дает для нахождения $\frac{h(x)}{\sqrt{x}}$ интегральное уравнение Абеля, которое, как известно, решается в явном виде.

3) В § 2 при доказательстве того, что A – оператор сжатия, мы не приводили необходимых оценок. Приведем одну из них. Правая часть второго из уравнений (7.2), т.е. уравнения (6.2), содержит член $4\pi t\int_{x_0}^{t}R(0,2t,\xi)h(\xi)d\xi$. Нетрудно видеть, что $R(0,2t,\xi)>0$ и $|\mathcal{R}h|<4\pi t\int_{x_0}^{t}R(0,2t,\xi)d\xi\cdot\max\limits_{\xi\in(x_0;\frac{t^*}{2})}|h(\xi)|\leqslant r(x_0,t)\max\limits_{\xi\in(x_0;\frac{t^*}{2})}|h(\xi)|$ для $r(x_0,t)$ верна оценка $r(x_0,t)\leqslant\frac{t-2x_0}{t}$, а при $x_0=0$ $r(0,t)=1$. Отсюда ясно, что при $x_0>0$ норма оператора $\mathcal{R}$ может быть сделана малой за счет выбора t^*. При $x_0=0$ норма этого оператора равна I при сколь угодно малом t^*, поэтому оператор A не будет оператором сжатия ни при каких t^*.



$ABEO - S_1^{x,t}$; $BC\mathcal{D}E - S_2^{x,t}$

Литература

1. А.С.Благовещенский. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн. – В кн. Проблемы математической физики, Вып.I. Л., 1966. с.34–38.
2. К.К.Лаврентьев. Обратная задача нахождения граничного условия в теории распространения нестационарных волн.II. Наст.сб. с. 129–133.