А. В. Резцов, О погрешностях параллелепипедальных кубатурных формул на классах дифференцируемых функций, *Тр. МИАН*, 1992, том 198, 153–159

Труды Математического института РАН
1992, том 198

УДК 517.5

А. В. РЕЗЦОВ

О ПОГРЕШНОСТЯХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Рассматриваются классы F_p^r ($r \in \mathrm{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) дифференцируемых функций m ($m \in \mathrm{N}$) переменных, задаваемые ограничениями на $\mathcal{L}_p$-норму r-го дифференциала. Функции $f \in F_p^r$ периодические, а соответствующие m-мерные торы произвольные невырожденные. Изучаются погрешности на этих классах F_p^r параллелепипедальных кубатурных формул (таковыми называются точные на константах кубатурные формулы с равными весами и узлами, лежащими на m-мерной решетке, согласованной с периодичностью функций из F_p^r).

Случай $m=1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (при этом F_p^r есть классы Соболева $\widetilde{W}^r\mathcal{L}_p$) изучали многие авторы. См. обзор А. А. Женсыкбаева [1] и монографию С. М. Никольского [2]. Из результатов В. Ф. Бабенко следует, что в случае $m=2$, $p=\infty$, $r=1$ оптимальными для классов F_∞^1 являются параллелепипедальные кубатурные формулы со специальной сеткой узлов (мы называем ниже эти формулы треугольными) или близкие к ним (см. [2; § Д. 4]).

Случай $p=\infty$, $m \geqslant 2$, $r \in \mathrm{N}$ ($r \geqslant 2$) изучался автором [3—5]. Основным результатом [3—5] является утверждение, что при $m=2$, $r=2$, 3 и $r \geqslant 7$ треугольные параллелепипедальные кубатурные формулы лучше квадратных параллелепипедальных кубатурных формул (т. е. таких, у которых узлы лежат на квадратной решетке в R^2 — точное определение приводится ниже).

В настоящей работе доказано, что при $m=2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \geqslant 7$ треугольные параллелепипедальные кубатурные формулы лучше квадратных параллелепипедальных кубатурных формул.

1. Классы функций и кубатурные формулы

Для произвольного базиса $A=\{a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}\}$ пространства R^m ($a^{(j)}$ — базисный вектор ($j=\overline{1, m}$)) множество

$$\Gamma(A)=\{x=z_1 \cdot a^{(1)}+\ldots+z_m \cdot a^{(m)} : z_j \in \mathrm{Z}\,(j=\overline{1, m})\}$$

называется *m-мерной решеткой*. *Фундаментальным параллелепипедом* решетки $\Gamma(A)$ называется

$$D(A)=\{x=t_1\cdot a^{(1)}+\ldots+t_m\cdot a^{(m)}:0\leqslant t_j<1\ (j=\overline{1,\ m})\}.$$

Группа всех сдвигов (параллельных переносов) пространства $\mathbf{R}^m$, переводящих $\Gamma(A)$ в себя, обозначается $\mathcal{T}(A)$. Группе $\mathcal{T}(A)$ принадлежат, в частности, сдвиги $T_j\ (j=\overline{1,\ m})$ такие, что для любого $x\in\mathbf{R}^m$, $T_jx=x+a^{(j)}$.

Функция $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ называется *функцией на торе* $\mathbf{T}^m(A)$, если для любого $T\in\mathcal{T}(A)$ и любого $x\in\mathbf{R}^m$

$$f(Tx)=f(x).$$

Обозначим через $d^S(f;\ x,\ h)$ $(S=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ обычный S-й дифференциал функции f в точке x (если он существует), где $h\in\mathbf{R}^m$ — вектор приращения аргумента функции.

Нормой дифференциала $d^S(f;\ x,\ h)$ в точке x (если этот дифференциал существует) называется величина

$$d_*^S(f;\ x)=\sup\{|d^S(f;\ x,\ h)|/|h|^S:h\in\mathbf{R}^m\setminus 0\},$$

где $|h|$ — длина вектора h.

Мы говорим, что функция $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ *принадлежит классу* $MF_p^r=MF_p^r(A)$ $(M>0,\ r\in\mathbf{N},\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) f являтся функцией на торе $\mathbf{T}^m(A)$;

2) существует дифференциал $d^{r-1}(f;\ x,\ h)$, являющийся абсолютно непрерывной функцией по x вдоль любой прямой, лежащей в $\mathbf{R}^m$;

3) почти всюду по x существует дифференциал $d^r(f;\ x,\ h)$, его норма $d_*^r(f;\ x)$ как функция от x принадлежит $\mathcal{L}_p(D(A))$ и удовлетворяет неравенству

$$\|d_*^r(f;\cdot)\|_{\mathcal{L}_p(D(A))}\leqslant M.$$

Класс $1F_p^r(A)=1F_p^r$ обозначается F_p^r.

Решетка $\Gamma(B)$ называется *кратной* решетке $\Gamma(A)$, если любой вектор базиса A есть целочисленная линейная комбинация векторов $b^{(1)},\ \ldots,\ b^{(m)}$ из базиса B.

Параллелепипедальной кубатурной формулой (определяемой кратной решетке $\Gamma(A)$ решеткой $\Gamma(B)$) называется следующий функционал:

$$L_Nf=L_{N,B}f=\frac{\operatorname{mes}D(A)}{N}\Sigma_{x^*\in D(A)\cap\Gamma(B)}f(x^*),$$

где N (число узлов кубатурной формулы) есть число точек в $D(A)\cap\Gamma(B)$, равное числу векторов вида

$$z_1\cdot b^{(1)}+\ldots+z_m\cdot b^{(m)},\quad z_j\in\mathbf{Z}\ (j=\overline{1,\ m}),$$

принадлежащих фундаментальному параллелепипеду $D(A)$.

Ясно, что для любой решетки $\Gamma(A)$ существует бесконечное множество кратных решеток $\Gamma(B)$, а поэтому и бесконечное множество параллелепипедальных кубатурных формул (см, также [4; п. 1.3]).

2. Погрешности параллелепипедальных кубатурных формул на классах функций

Величина

$$E(L_N,\ F_p^r(A)) = \sup\left\{\left|\int\limits_{D(A)}\!\!\ldots\!\int f(x)\,dx - L_N f\right| : f\in MF_p^r(A)\right\}$$

называется *погрешностью кубатурной формулы* L_N на классе $MF_p^r(A)$.

Пусть $G(B)$ — группа всех преобразований пространства $\mathbf{R}^m$, отображающих $\Gamma(B)$ в себя. Для решетки $\Gamma(B)$, кратной решетке $\Gamma(A)$, обозначим через $MF_p^r(A\,|\,B)$ множество всех таких функций $f^*\in MF_p^r(A)$, что f^* есть функция на торе $\mathbf{T}^m(B)$; для любых $x\in\mathbf{R}^m$ и $g\in G(B)$ $f^*(gx)=f^*(x)$; для любого $x\in D(A)\cap\Gamma(B)$ $f^*(x^*)=0$.

Легко видеть (так как $MF_p^r(A\,|\,B)\subset MF_p^r(A)$), что погрешности параллелепипедальной кубатурной формулы $L_{N,B}$ на классах $MF_p^r(A)$ и $MF_p^r(A\,|\,B)$ удовлетворяет неравенству

$$E(L_{N,B},\ MF_p^r(A\,|\,B))\leqslant E(L_{N,B},\ MF_p^r(A)).$$

Для любых $r,\ m\in\mathbf{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и решеток $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ таких, что $\Gamma(B)$ кратна $\Gamma(A)$, верна следующая

Теорема 1.

$$E(L_{N,B},\ MF_p^r(A\,|\,B)) = E(L_{N,B},\ MF_p^r(A)).$$

В [4; § 3] теорема 1 доказана для $p=\infty$. Для $1\leqslant p<\infty$ доказательство проводится дословно, как для $p=\infty$. Нами приводится

Схема доказательства теоремы 1. Обозначим через $\mathcal{T}(B)$ группу всех сдвигов (параллельных переносов), переводящих $\Gamma(B)$ в себя. В предложении 3.1 [4] доказано, что $\mathcal{T}(B)$ есть нормальная подгруппа группы $G(B)$. Поэтому можно рассматривать фактор-группу $G(B)/\mathcal{T}(B)$, элементы которой мы обозначаем через $[g]$.

Фактор-группа $\mathcal{T}(B)/\mathcal{T}(A)$ конечна, и ее порядок $|\mathcal{T}(B)/\mathcal{T}(A)|=N$ — числу узлов соответствующей параллелепипедальной кубатурной формулы $L_{N,B}$. Для произвольного $x^*\in D(A)\cap\Gamma(B)$ обозначим через $T_{\langle x^*\rangle}$ сдвиг из $\mathcal{T}(B)$ такой, что для любого $x\in\mathbf{R}^m$

$$T_{\langle x^*\rangle}x = x + x^*.$$

Ясно, что для различных $x^*\in D(A)\cap\Gamma(B)$ сдвиги $T_{\langle x^*\rangle}$ принадлежат различным смежным классам $[T_*]\in\mathcal{T}(B)/\mathcal{T}(A)$.

Для любого $[g]\in G(B)/\mathcal{T}(B)$ и произвольной $f\in MF_p^r(A)$ *$[g]$-симметризацией функции f* называется следующая функция:

$$f_{[g]}(x) = \frac{1}{N}\Sigma_{x^*\in D(A)\cap\Gamma(B)} f(T_{\langle x^*\rangle}gx),$$

где g — произвольный представитель смежного класса $[g]$.

В предложении 3.3 [4] доказано, что определение $[g]$-симметризации корректно, т. е. не зависит от выбора $g\in[g]$.

Для любой $f\in MF_p^r(A)$ *$G(B)$-симметризацией функции f* называется следующая функция:

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{|G(B)/\mathcal{T}(B)|}\sum_{[g]\in G(B)/\mathcal{T}(B)} f_{[g]}(x),$$

где $|G(B)/\mathcal{T}(B)|$ — порядок конечной группы $|G(B)/\mathcal{T}(B)|$.

Конечность фактор-группы $G(B)/\mathcal{T}(B)$ доказана в предложении 3. 4 [4].

Согласно [4; п. 3. 3], $G(B)$-симметризация произвольной функции $f\in MF_p^r(A)$ обладает следующими свойствами:

а) для любого $x^*\in D(A)\cap\Gamma(B)$ $\tilde{f}(x^*)=f(0)$;

б) $\tilde{f}\in MF_p^r(A)$;

в) $\tilde{f}$ — функция на торе $\mathrm{T}^m(B)$; для любых $x\in\mathbf{R}^m$ и $g\in G(B)$ $\tilde{f}(gx)=\tilde{f}(x)$;

г) $\int\limits_{D(A)}\cdots\int\tilde{f}(x)\,dx=\int\limits_{D(A)}\cdots\int f(x)\,dx$;

д) $L_{N,B}\tilde{f}=L_{N,B}f$.

Формула $L_{N,B}$ точна на константах, поэтому для функции $f^*(x)=\tilde{f}(x)-f(0)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{D(A)}\cdots\int\tilde{f}(x)\,dx-L_{N,B}\tilde{f}=\int\limits_{D(A)}\cdots\int f^*(x)\,dx-L_{N,B}f^*=\int\limits_{D(A)}\cdots\int f^*(x)\,dx$$

и сохраняются свойства а) — г).

Теорема 1 доказана полностью.

Следствие 1. *Для кубатурной формулы $\tilde{L}_B$ с теми же узлами, что и у параллелепипедальной кубатурной формулы $L_{N,B}$, и произвольными весами погрешность на классе $MF_p^r(A)$*

$$E(\tilde{L}_B,\ MF_p^r(A))\geqslant E(L_{N,B},\ MF_p^r(A)).$$

Для доказательства следствия 1 достаточно рассматривать функции $f^{**}(x)=f^*(x)+C$, $f^*\in MF_p^r(A\,|\,B)$, $C\in\mathbf{R}$.

Следствие 2.

$$E(L_{N,B},\ MF_p^r(A))=\sup\left\{\int\limits_{D(A)}\cdots\int f^*(x)\,dx:\ f^*\in MF_p^r(A\,|\,B)\right\}.$$

Следствие 2 очевидно, так как для любой функции $f^*\in MF_p^r(A\,|\,B)$ $L_{N,B}f^*=0$.

Если для данного тора $\mathrm{T}^2(A_\square)$ $(m=2)$ существует параллелепипедальная кубатурная формула $L_{N',B_\square}$ такая, что $|b_\square^{(1)}|=|b_\square^{(2)}|$ и $b_\square^{(1)}\perp b_\square^{(2)}$, то такая формула называется квадратной и обозначается через $L_{N',B_\square}^\square$.

Если для данного тора $\mathrm{T}^2(A_\Delta)$ существует параллелепидальная кубатурная формула L_{N'',B_Δ} такая, что $|b_\Delta^{(1)}|=|b_\Delta^{(2)}|$ и угол $\widehat{b_\Delta^{(1)},\ b_\Delta^{(2)}}=\pi/3$, то такая формула называется треугольной и обозначается через L_{N'',B_Δ}^Δ.

Ясно (см. [4]), что выражения для погрешностей кубатурных формул $L_{N',B_\square}^\square$ и L_{N'',B_Δ}^Δ на классах $M'F_p^r(A_\square)$ и $M''F_p^r(A_\Delta)$ соответственно имеют вид

$$E\left(L_{N',B_\square}^\square,\ M'F_p^r(A_\square)\right)=c_\square\frac{M'}{(\operatorname{mes}D(A_\square))^{1/p}}\,\frac{(\operatorname{mes}D(A_\square))^{r/2+1}}{(N')^{r/2}};$$

$$E\left(L^{\Delta}_{N'', B_\Delta}, M''F^r_p(A_\Delta)\right) = c_\Delta \frac{M''}{(\operatorname{mes} D(A_\Delta))^{1/p}} \frac{(\operatorname{mes} D(A_\Delta))^{r/2+1}}{(N'')^{r/2}}.$$

Здесь $c_\square = c_\square(r)_p$, $c_\Delta = c_\Delta(r)_p$ зависят только от r, p.

3. Основная теорема

Теорема 2. *Для любого* $r \in \mathrm{N}$, $r \geqslant 2$

$$c_\Delta(r) \leqslant c_\square(r) \frac{(3^{-r/4} + 3^{r/4})}{2^{r/2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{r/2+1}}\right).$$

Следствие 3. *Для любого* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $r \geqslant 7$ *треугольные параллелепипедальные кубатурные формулы лучше квадратных параллелепипедальных кубатурных формул.*

Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $L^\square_{N, B}$*—квадратная параллелепипедальная кубатурная формула; решетка* $\Gamma(B)$ *кратна решетке* $\Gamma(A)$. *Тогда для величины*

$$H = \sup\{f((b^{(1)} + b^{(2)})/2) : f \in MF^r_p(A \mid B)\}$$

выполняется неравенство.

$$H \leqslant 2E\left(L^\square_{N, B}, MF^r_p(A \mid B)\right)/(\operatorname{mes} D(A)).$$

Доказательство леммы 1. Для произвольной $f \in MF^r_p(A \mid B)$ строим функцию $g(x) = f((b^{(1)} + b^{(2)})/2) - f(x - (b^{(1)} + b^{(2)})/2)$. Легко видеть, что $g \in MF^r_p(A \mid B)$ и выполнено равенство

$$\int\limits_{D(A)} \cdots \int f(x)\,dx + \int\limits_{D(A)} \cdots \int g(x)\,dx = (\operatorname{mes} D(A))\, f((b^{(1)} + b^{(2)})/2).$$

Переходом к точным верхним граням по $f \in MF^r_p(A \mid B)$ в левой и правой частях равенства получаем утверждение леммы 2 (см. следствие 2).

Лемма 2. *Пусть* $L^\square_{N, B}$ — *квадратная параллелепипедальная кубатурная формула; решетка* $\Gamma(B)$ *кратна решетке* $\Gamma(A)$; $[MF^r_p(A \mid B)]$ — *множество всех таких* $f \in MF^r_p(A \mid B)$, *что значения функции* f *в точках* $b^{(1)}/2$; $b^{(2)}/2$; $(b^{(1)} + b^{(2)})/2$; $b^{(1)} + b^{(2)}/2$; $b^{(1)}/2 + b^{(2)}$ *равны между собой. Тогда величина*

$$H^* = \sup\{f((b^{(1)} + b^{(2)})/2 : f \in [MF^r_p(A \mid B)]\}$$

удовлетворяет неравенству

$$H^* \leqslant \frac{H}{2^{r/2-1}} \leqslant \left(E\left(L^\square_{N, B}, MF^r_p(A \mid B)\right)/(\operatorname{mes} D(A))\right) \frac{1}{2^{r/2-2}}.$$

Доказательство леммы 2. Пусть $\Gamma(B^*)$ — квадратная решетка с базисом $B^* = \{b^{(1)}_* = (b^{(1)} + b^{(2)})/2,\ b^{(2)}_* = (b^{(2)} - b^{(1)})/2\}$. Ясно, что $\Gamma(B^*)$ кратна решетке $\Gamma(B)$, а соответствующая квадратная параллелепипедальная кубатурная формула $L^\square_{N^*, B^*}$ имеет $N^* = 2N$ узлов. Обозначим через f^* $G(B^*)$-симметризацию функции

$$^1/_2 (f(x) + f(x - b^{(1)}_*)) - {}^1/_2 f(b^{(1)}_*).$$

При этом $f^* \in MF^r_p(A\,|\,B)$, поэтому $f^*((b^{(1)}_* + b^{(2)}_*)/2)$, равное $(f((b^{(1)} + b^{(2)})/2))/2$, удовлетворяет неравенству (см. лемму 1)

$$f^*((b^{(1)}_* + b^{(2)}_*)/2) \leqslant 2E\left(L^{\square}_{2N,\,B^*},\ MF^r_p(A)\right)/(\operatorname{mes} D(A)).$$

Переходом слева к точной верхней грани по f^* (а следовательно, и по $f \in [MF^r_p(A\,|\,B)]$) получаем утверждение леммы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in M''F^r_p(A_\Delta\,|\,B_\Delta)$, а $\underline{f}$ — растяжение функции f в $\sqrt{3}$ раз вдоль вектора $b^{(2)} - b^{(1)}$. При таком растяжении треугольная решетка $\Gamma(B_\Delta)$ переходит в квадратную решетку $\Gamma(B_\square)$, где

$$B_\square = \left\{b^{(1)}_\square = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,b^{(1)}_\Delta + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,b^{(2)}_\Delta,\ b^{(2)}_\square = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,b^{(1)}_\Delta + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,b^{(2)}_\Delta\right\}.$$

Обозначим через $f_\square$ $G(B_\square)$-симметризацию функции $\underline{f}$. Ясно, что $f_\square \in M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)$, где

$$M' = M''((3^{-r/2} + 1)\,3^{1/2p}/2),$$

а $\operatorname{mes} D(A_\square) = (\operatorname{mes} D(A_\Delta))\sqrt{3}$. По свойству в) $G(B_\Delta)$-симметризации значения функции f в точках $b^{(1)}_\Delta/2$; $b^{(2)}_\Delta/2$; $(b^{(1)}_\Delta + b^{(2)}_\Delta)/2$; $b^{(1)}_\Delta + b^{(2)}_\Delta/2$; $b^{(1)}_\Delta/2 + b^{(2)}_\Delta$ равны между собой и при этом равны значениям функции $f_\square$ в точках $b^{(1)}_\square/2$; $b^{(2)}_\square/2$; $(b^{(1)}_\square + b^{(2)}_\square)/2$; $b^{(1)}_\square + b^{(2)}_\square/2$; $b^{(1)}_\square/2 + b^{(2)}_\square$. Следовательно, $f_\square \in [M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)]$, откуда и из равенства

$$\sqrt{3}\int\limits_{D(A_\Delta)}\!\!\cdots\!\int f(x)\,dx = \int\limits_{D(A_\square)}\!\!\cdots\!\int \underline{f}(x)\,dx = \int\limits_{D(A_\square)}\!\!\cdots\!\int f_\square(x)\,dx$$

получаем неравенство

$$\sqrt{3}\,E\left(L^{\Delta}_{N'',\,B_\Delta},\ M''F^r_p(A_\Delta\,|\,B_\Delta)\right) \leqslant \sup\left\{\int\limits_{D(A)}\!\!\cdots\!\int f_\square(x)\,dx : f_\square \in [M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)]\right\}.$$

Для любой $f_\square \in [M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)]$ построим функцию

$$\tfrac{1}{4}(f_\square(x) + f_\square(x - b^{(1)}_\square/2) + f_\square(x - b^{(2)}_\square/2) + f_\square(x - (b^{(1)}_\square + b^{(2)}_\square)/2)) -$$
$$- \tfrac{3}{4}(f_\square(b^{(1)}_\square/2)$$

и обозначим через $f^*_\square$ ее $G(\underline{B})$-симметризацию, где $\underline{B} = \{b^{(1)}_\square/2,\ b^{(2)}_\square/2\}$. Решетка $\Gamma(\underline{B})$ квадратна, кратна решетке $\Gamma(A_\square)$, а кубатурная формула $L^{\square}_{\underline{N},\,\underline{B}}$ имеет $\underline{N} = 4N'' = 4N'$ узлов. Так как $f^*_\square \in M'F^r_p(A_\square\,|\,\underline{B})$, а

$$\int\limits_{D(A_\square)}\!\!\cdots\!\int f^*_\square(x)\,dx = \int\limits_{D(A_\square)}\!\!\cdots\!\int f_\square(x)\,dx - \tfrac{3}{4}\,f_\square(b^{(1)}_\square/2)\,(\operatorname{mes} D(A_\square)),$$

то переходом к точной верхней грани по $f_\square \in [M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)]$ получаем (с учетом леммы 2)

$$\sup\left\{\int\limits_{D(A_\square)}\!\!\cdots\!\int f_\square(x)\,dx : f_\square \in [M'F^r_p(A_\square\,|\,B_\square)]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant E\left(L^{\square}_{\underline{N},\,\underline{B}},\ M'F^r_p(A_\square\,|\,\underline{B})\right) + \tfrac{3}{4}\,H^*(\operatorname{mes} D(A_\square)).$$

В итоге получаем, что

$$\sqrt{3}\,c_{\Delta}\,\frac{M''}{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{1/p}}\,\frac{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{r/2+1}}{(N'')^{r/2}}\leqslant c_{\Box}M''(3^{-r/2}+1)\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{1/p}}\times$$

$$\times\frac{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{r/2+1}}{(N'')^{r/2}\cdot 2^{r}}\cdot 3^{r/4+1/2}+\frac{3}{4}(\operatorname{mes} D(A_{\Box}))\frac{1}{(\operatorname{mes} D(A_{\Box}))}\,\frac{1}{2^{r/2-2}}c_{\Box}\frac{M''}{2}(3^{-r/2}+1)\times$$

$$\times\frac{1}{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{1/p}}\,\frac{(\operatorname{mes} D(A_{\Delta}))^{r/2+1}}{(N'')^{r/2}}\,3^{r/4+1/2}.$$

Поэтому

$$c_{\Delta}\leqslant c_{\Box}(3^{-r/2}+1)\cdot 3^{r/4}\left(\frac{1}{2^{r+1}}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{2^{r/2-1}}\right)=c_{\Box}(3^{-r/4}+3^{r/4})\,\frac{1}{2^{r/2+1}}\left(\frac{1}{2^{r/2}}+3\right).$$

Теорема 2 полностью доказана.

Следствие 3 доказывается проверкой того факта, что при $r\geqslant 7$ величина $(3^{-r/4}+3^{r/4})(3/2+1/2^{r/2+1})/2^{r/2}$ меньше единицы.

Автор благодарит С. Б. Стечкина за постановку задачи изучения классов MF_p^r и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // УМН. 1981. Т. 36, вып. 4. С. 107—159.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. 3-е изд. / С доб. Н. П. Корнейчука. М.: Наука, 1979.
3. *Резцов А. В.* Оптимальные кубатурные формулы на классах дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 4. С. 121—124.
4. *Резцов А. В.* Оптимальные кубатурные формулы на классах дифференцируемых функций: М., 1989. Деп. в ВИНИТИ 27.06.89, № 4227—В—89.
5. *Резцов А. В.* О параллелепипедальных кубатурных формулах и совершенных сплайнах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 79—87.