



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

R. F. Shamoyan, BMO-type characterizations and the diagonal mapping and boundedness of integral operators in some spaces of analytic functions, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2007, Volume 9, Number 2, 40–53

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.200.94.150

October 13, 2024, 16:04:39



УДК 517.98

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТИПА ВМО, ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И
ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р. Ф. Шамоян

Распространены (в различных направлениях) некоторые известные ранее характеристики аналитических классов Бесова и неравенства для рациональных функций, дополнены утверждения о диагональном отображении новой теоремой, обобщены классы $F_s^{p,q}$ теоремы о действии операторов типа Чезаро.

Ключевые слова: интегральные операторы Чезаро, голоморфные пространства Лизоркина — Трибеля, классы Харди.

Основная цель настоящей заметки распространить результаты о характеристиках типа ВМО классов Бесова и Блоха, полученные в [1, 2], дополнить утверждения об оценках рациональных функций и известные результаты о диагональном отображении из [3, 8], а также обобщить на голоморфные пространства Лизоркина — Трибеля недавно полученные утверждения об ограниченности операторов типа Чезаро из [4].

Для формулировки теорем, установленных нами, введем стандартные обозначения. Всюду ниже \mathbb{D} — круг на комплексной плоскости \mathbb{C} , $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, T — его граница, $T = \{z : |z| = 1\}$. $H^p(\mathbb{D})$ — класс Харди [5], $H_t^p(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|\tilde{D}^t f\|_{H^p} < \infty\}$, где $H(\mathbb{D})$ — класс всех голоморфных в D функций, $t \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $(\tilde{D}^t f)(z) = \sum_{k \geq 0} (k+1)^t a_k z^k$, $t \in \mathbb{R}$, $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$. Легко видеть $(\tilde{D} f)(z) = (zf(z))'$. Всюду ниже B_p^α — аналитические пространства Бесова [11]:

$$B_p^\alpha = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{B_p^\alpha}^p = \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{D}^t f(z) \right|^p (1 - |z|)^{(t-\alpha)p-1} dm_2(z) < \infty \right\},$$

где $\alpha, t, p \in \mathbb{R}$, $t > \alpha$, $0 < p < \infty$.

Теорема 1. Пусть $t + 1 < p < \infty$, $(s - \alpha)p = 1 + \beta + \gamma$, $t < 1$, $s \geq \alpha + 1$, $\beta, \gamma > 0$, причем $t = \beta$ или $t = \gamma$. Тогда следующие условия равносильны:

1) $f \in B_p^\alpha$;

2) $J = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{(\tilde{D}^{s-1} f)(z) - (\tilde{D}^{s-1} f)(w)}{z-w} \right|^p (1 - |z|)^{\beta-1} (1 - |w|)^{\gamma-1} dm_2(z) dm_2(w) < \infty$.

$\Leftarrow 2) \Rightarrow 1)$: Основная идея — привлечь диагональное отображение. Действительно, импликация $2) \Rightarrow 1)$ — непосредственное следствие теоремы о диагональном отображении, доказанной в [8]. Функция G , где

$$G(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

— аналитическая функция в бидиске в $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ [8], а теорема о диагональном отображении утверждает [8, 14], что $\text{Diag } A_\alpha^p(\mathbb{D}^n) = A_{\alpha n + 2n - 2}^p(\mathbb{D})$, где $\text{Diag } f = f(z, \dots, z)$, $\alpha > 1$, $0 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, а A_α^p ($A_\alpha^p = B_p^\beta$, $\alpha = -\beta p - 1$, $\beta < 0$) — классы Бергмана. Для доказательства обратной импликации нам понадобятся несложные операции с формулой проекции Бергмана.

Следующее равенство выводится непосредственно из формулы проекции Бергмана [8]:

$$\begin{aligned} |F(z, w)| &= \left| \frac{\tilde{D}^{s-1} f(z) - \tilde{D}^{s-1} f(w)}{z - w} \right| = \\ &= C(V) \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde{D}^{V+1} \tilde{D}^{s-1} f(\tilde{w}) (1 - |\tilde{w}|)^V \overline{\tilde{w}}}{(1 - \overline{\tilde{w}}z) (1 - \overline{\tilde{w}}w)} dm_2(\tilde{w}) \right| \\ &\left(\left(\tilde{D}^S f \right) (z) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(k + s + 1)}{\Gamma(k + s)} a_k z^k, \quad f = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Для достаточно большого t и V , близкого к -1 , $V > -1$, имеем:

$$\left| \tilde{D}_z^{t+1} \tilde{D}_w^{t+1} F(z, w) \right|^p = C(V) \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde{D}^{V+1} \tilde{D}^{s-1} f(\tilde{w}) (1 - |\tilde{w}|)^V \overline{\tilde{w}}}{(1 - \overline{\tilde{w}}z)^{t+2} (1 - \overline{\tilde{w}}w)^{t+2}} dm_2(\tilde{w}) \right|^p \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{D}_z^{t+1} \tilde{D}_w^{t+1} F(z, w) \right|^p (1 - |z|)^{(1+t)p + \beta - 1} \times \\ &\quad \times (1 - |w|)^{(1+t)p + \gamma - 1} dm_2(z) dm_2(w) \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left(\left| \tilde{D}^{V+s} f(\tilde{w}) \right|^p (1 - |z|)^{Vp} (1 - |w|)^{p(t+1) + \gamma - 1} (1 - |z|)^{\beta - 1 + p(t+1) - \varepsilon p} \right) / \\ &\quad \left(\left| 1 - \overline{\tilde{w}}z \right|^{tp + 2 - \varepsilon p} \left| 1 - \overline{\tilde{w}}w \right|^{(t+2)p} \right) dm_2(\tilde{w}) dm_2(z) dm_2(w) \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{D}^{V+s} f(\tilde{w}) \right|^p (1 - |\tilde{w}|)^{(s-\alpha)p - 1 + Vp} dm_2(\tilde{w}), \end{aligned} \quad (3)$$

в силу известных оценок

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)| (1 - |w|)^V dm_2(w)}{|1 - \overline{w}z|^\alpha |1 - \overline{w}z_1|^{2+\beta}} \right)^p \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|^p (1 - |w|)^{Vp} (1 - |z_1|)^{-\varepsilon p} dm_2(w)}{|1 - \overline{w}z|^{p\alpha} |1 - \overline{w}z_1|^{-\varepsilon p + 2 + \beta p}}, \quad p > 1, \alpha, \beta > 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|)^u dm_2(w)}{|1 - \overline{w}z|^\gamma} \leq \frac{C}{(1 - |z|)^{\gamma - u - 2}}, \quad (5)$$

где $u > -1$, $\gamma > u + 2$, $z, z_1 \in \mathbb{D}$, $\varepsilon > V$,

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)| (1 - |w|)^\alpha dm_2(w) \right)^p \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1 - |w|)^{\alpha p + 2p - 2} dm_2(w), \quad p \leq 1, \quad (6)$$

приведенных, например, в [7, 8, 17, 19].

Остается применить известную теорему Харди — Литтлвуда о действии производной в пространствах Бергмана, точнее ее вариант для дробной производной, легко выводимый из классической теоремы Харди — Литтлвуда [5, с. 81] слева и справа в (3):

$$J \leq cJ_1 \leq c_1 \|f\|_{B_\alpha^p}^p.$$

Меняя в (4) z и z_1 , мы восстановим симметрию в индексах. \triangleright

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 распространяет в двух направлениях утверждение, установленное в [2, теорема 3]. Рассуждение, приведенное в [2] — доказательство характеристики типа ВМО (инвариантных относительно преобразования Мебиуса) классов $B_p^{\frac{1}{p}}$, $p > 2$ в части необходимости и в части достаточности существенно использует свойства этого преобразования. Наши рассуждения, на наш взгляд, существенно проще.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приложения различных характеристик типа ВМО классов Бесоя известны [9, 10, 22].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\alpha = 1/p$, $p > 2$, $s = 1$, $\beta = \gamma = p/2 - 1$, то мы получаем в точности теорему, установленную в работе [2].

Подход, основанный на диагональном отображении, позволяет доказывать различные утверждения подобного рода. Следующая теорема распространяет результат из [1], где получен частный случай теоремы 2 при $\beta = 1$, $\alpha = 1$.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $t, V \geq 0$, $t + V = \alpha$, β — любое действительное число,

$$A_{\alpha, \beta}^{\infty, \infty} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{r \in (0, 1)} M_\infty \left(\tilde{D}^\beta f, r \right) (1 - r)^\alpha < \infty \right\}.$$

Тогда $f \in A_{\alpha, \beta}^{\infty, \infty}$ если и только, если

$$S = \sup_r \sup_{|w|=r, |z|=R} \left| \frac{(\tilde{D}^{\beta-1} f)(w) - (\tilde{D}^{\beta-1} f)(z)}{z - w} \right| (1 - R)^t (1 - r)^V < \infty. \quad (7)$$

\triangleleft Достаточность условия (7) тривиальна (при этом надо учесть, что

$$(Df)(z) = (zf(z))' = zf'(z) + f(z).$$

Для доказательства необходимости мы снова воспользуемся равенством (1).

Имеем

$$\begin{aligned}
J &= \sup_{|z|} \sup_{|w|} \left((1 - |z|)^{t_1+t} (1 - |w|)^{t_2+V} \right) \left| \tilde{D}_w^{t_1} \tilde{D}_z^{t_2} \left(\frac{\tilde{D}^{\beta-1} f(z) - \tilde{D}^{\beta-1} f(w)}{z - w} \right) \right| \leq \\
&\leq c(V) \sup_{|z|, |w|} \left| \int_{\mathbb{D}} \frac{\tilde{D}^{\tilde{V}+\beta} f(\tilde{w}) (1 - |\tilde{w}|)^{\tilde{V}} \bar{\tilde{w}}}{(1 - \bar{\tilde{w}}z)^{t_2+1} (1 - \bar{\tilde{w}}w)^{t_1+1}} dm_2(\tilde{w}) \right| (1 - |z|)^{t_1+t} (1 - |w|)^{V+t_2} \leq \\
&\leq \left(\sup_{|z|, |w|, |\tilde{w}| < 1} M_\infty \left(\tilde{D}^{\tilde{V}+\beta} f, |\tilde{w}| \right) (1 - |\tilde{w}|)^{\tilde{V}+\alpha} \right) \times \\
&\times \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |\tilde{w}|)^{-\alpha} (1 - |z|)^{t_1+t} (1 - |w|)^{V+t_2}}{|1 - \bar{\tilde{w}}z|^{t_2+1} |1 - \bar{\tilde{w}}w|^{t_1+1}} dm_2(\tilde{w}) = S
\end{aligned} \tag{8}$$

($t + V = \alpha$, \tilde{V} — достаточно большое число). Учитывая оценку (8) и оценку последнего интеграла [7], получим

$$S \leq \frac{(1 - |z|)^t (1 - |w|)^V}{|1 - \bar{z}w|^t |1 - \bar{z}w|^V} \leq \text{const},$$

$0 < t_2 + \alpha < 1$, $0 < t_1 + \alpha < 1$, $t_1 + t_2 + \alpha > 0$ (мы на последнем шаге использовали теорему Харди — Литтлвуда о действии производной [5, с. 87] справа и слева в (8)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогичные утверждения можно вывести и для производных (обычных) $f^{(n)}(z)$. Но доказательства этих предложений технически несколько сложнее.

Подобный подход можно использовать и для классов функций с «нестандартной» квазинормой. Здесь снова (по крайней мере) половина критерия будет получена, если будет установлена надлежащая теорема о диагональном отображении. Ниже мы покажем это на примере пространств

$$D^V T_{\alpha, \beta}^p = \left\{ f \in D^V : f \in T_{\alpha, \beta}^p \right\},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > -1$

$$T_{\alpha, \beta}^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{\rho \in (0, 1)} (1 - \rho)^\alpha \left(\int_{\mathbb{D}} |f(\rho R\xi)|^p (1 - R)^\beta dm_2(R\xi) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [8]. Пусть $H(\mathbb{D}^n)$ — пространство всех голоморфных в полидиске \mathbb{D}^n функций, $\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n), |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$, $X \subset H(\mathbb{D}^n)$ — подпространство $H(\mathbb{D}^n)$. Скажем, что след класса X на диагонали поликруга совпадает с Y , $Y \subset H(\mathbb{D})$, Y — подпространство $H(\mathbb{D})$, если для любой функции $f \in X$ $f(z, \dots, z) \in Y$ и для любой функции $g \in Y$ существует функция $G \in X$, такая, что $G(z, \dots, z) = g(z)$. При этом будем использовать обозначение $\text{Diag } X = Y$. Задача о диагональном отображении в $H^p(\mathbb{D}^n)$ рассматривалась многими авторами [8, 14].

Незначительно модифицируя доказательство из [8] (рассуждения следует применять к функциям $f_\rho, g_\rho, \rho \in (0, 1)$), нетрудно установить следующий результат.

Предложение С. Пусть $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$. Тогда

$$\text{Diag } A_{\alpha}^{p,\infty} = T_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{\rho \in (0,1)} (1-\rho)^\alpha \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{\mathbb{D}} |f(\rho R\xi)|^p (1-R)^\beta R dR dm(\xi) \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad \beta = n-2, \quad n > 1. \\ A_{\alpha}^{p,\infty} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) : \sup_{r \in (0,1)} M_p(f,r) (1-r)^\alpha < \infty \right\},$$

$M_p(f,r) = M_p(f,r,\dots,r)$, $0 < p < \infty$, $\alpha \geq 0$.

Из предложения С следует оценка ($|w| = |z| = r$)

$$\sup_{\rho \in (0,1)} (1-\rho)^\alpha \left(\int_{\mathbb{D}} |\tilde{D}^\beta f(\rho R\xi)|^p R dR dm(\xi) \right)^{1/p} \leq \\ \leq c \sup_r \left(\int_{T^2} \left| \frac{(\tilde{D}^{\beta-1}f)(z) - (\tilde{D}^{\beta-1}f)(w)}{z-w} \right|^p dm(\xi) dm(\varphi) \right)^{1/p} (1-r)^\alpha.$$

Обратная оценка выводится как и выше из (1)–(3) путем несложных преобразований. Пусть $p \leq 1$, $t_1, t_2 > 0$, t_1, t_2 — достаточно большие положительные числа. Тогда из (1) и (6) имеем

$$(1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} \int_{T^2} \left| \frac{\tilde{D}^{\beta-1}f(\rho\xi) - \tilde{D}^{\beta-1}f(\rho\varphi)}{\rho\varphi - \rho\xi} \right|^p dm(\xi) dm(\varphi) \leq \\ \leq c(V) \int_{T^2} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|\tilde{D}^{V+\beta}f(\rho\tilde{w})| (1-|\tilde{w}|)^V |\tilde{w}| dm_2(\tilde{w})}{|1-\tilde{w}\rho\varphi|^{t_1+1} |1-\tilde{w}\rho\xi|^{t_2+1}} \right)^p (1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} dm(\xi) dm(\varphi) \leq M.$$

Применив дважды теорему Харди — Литтлвуда [5, с. 87], получим

$$M \leq c(V) \int_{\mathbb{D}} \frac{|\tilde{D}^{V+\beta}f(\rho\tilde{w})|^p (1-|\tilde{w}|)^{Vp+2p-2} dm_2(\tilde{w})}{(1-|\tilde{w}\rho|)^{(t_1+1)p-1} (1-|\tilde{w}\rho|)^{(t_2+1)p-1}} (1-\rho)^{p\alpha+(t_1+t_2)p} \leq \\ \leq c \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{D}^{\beta+V}f(\rho R\xi) \right|^p (1-R)^{Vp} R dR dm(\xi) (1-\rho)^{(t_1+t_2)p} (1-\rho)^{p\alpha} \leq c \|f\|_{D^\beta A_{\alpha,0}^p}^p.$$

При этом, чтобы «избавиться» от t_1, t_2 слева необходимо потребовать $\beta > \frac{2}{p} + \alpha - 1$ [22].

Случай $p > 1$ рассматривается аналогично с привлечением оценки (4) вместо (6).

Итак, нами установлена

Теорема 3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > \frac{2}{p\alpha-1}$, $0 < p < \infty$. Тогда $f \in \tilde{D}^\beta T_{\alpha,0}^p$ если и только, если

$$\sup_{r \in (0,1)} \left(\int_{T^2} \left| \frac{\tilde{D}^{\beta-1}f(r\xi) - \tilde{D}^{\beta-1}f(r\varphi)}{r\xi - r\varphi} \right|^p dm(\xi) dm(\varphi) \right)^{1/p} (1-r)^\alpha < \infty.$$

Заметим, что справедливо и обратное. Опираясь на утверждение о характеристиках классов голоморфных функций через разности $\frac{(\tilde{D}^t f)(z) - (\tilde{D}^t f)(w)}{z-w}$, можно полностью описывать следы тех или иных функциональных классов в бидиске на диагонали (z, z) .

Действительно, функция $F(z, w) = \frac{(\tilde{D}^{-1} f)(z) - (\tilde{D}^{-1} f)(w)}{z-w}$ дает искомое продолжение. Имеем $F(z, z) = (\tilde{D}^{-1} f)'(z) = f(z)$, где $(\tilde{D}^{-1} f)(z) = \int_0^z f(w) dw$ и следующие неравенства следуют непосредственно из теорем 1 и 2:

$$\sup_{|z|<1, |w|<1} |F(z, w)| (1-|z|)^V (1-|w|)^t \leq c \|f\|_{A_{0,\alpha}^{\infty,\infty}}, \quad \alpha \geq 0, \quad t+V = \alpha.$$

$$\int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |F(z, w)|^p (1-|z|)^{\beta-1} (1-|w|)^{\gamma-1} dm_2(z) dm_2(w) \leq c \|f\|_{B_p^\alpha},$$

где $p > 1 + \gamma$, $\beta < 1$, $\alpha \leq -1$, $\beta, \gamma > 0$, $(-\alpha p) = 1 + \beta + \gamma$.

Обратное к последнему неравенству при любом $n \in \mathbb{N}$ получено в [8]. А неравенство

$$\sup_{0 < r < 1} \sup_{|z|=r} (|f(z, z)| (1-|z|)^{V+t}) \leq c_1 \sup_{|z|<1, |w|<1} (|f(z, w)| (1-|z|)^V (1-|w|)^t),$$

где $V, t \geq 0$, очевидно.

Предположим далее, что всюду ниже $R(z)$ — рациональная функция степени n , $n = 1, 2, \dots$, полюса которой лежат вне диска $\overline{\mathbb{D}}$, B_l — класс Блоха,

$$B_l = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{B_l} = \sup_{|z|<1} |f'(z)| (1-|z|) < \infty \right\}.$$

Мы установим, что имеет место оценка

$$\sup_{\rho} \left(\int_T |\tilde{D}^{\alpha+1} R(\rho\xi)|^{1/\alpha} dm(\xi) \right)^{\alpha} (1-\rho)^{\alpha} \leq n^{\alpha} \|\tilde{D}R\|_{B_l} \quad (9)$$

для всех α , $0 < \alpha < \infty$.

Отметим, что при $\alpha \geq 1$ эта оценка установлена Пекарским [3]. Нам понадобится в дальнейшем следующая векторнозначная максимальная теорема.

Теорема А [6]. Пусть X — квазинормированное пространство. Тогда

$$\int_T \sup_{z \in \Gamma(\xi)} \|f(z)\|_X dm(\xi) \leq c(X) \int_T \|f(\xi)\|_X dm(\xi), \quad \Gamma(\xi) = \{z : |1 - \bar{\xi}z| < (1-|z|)\}.$$

А. Пекарский в [3] для $\alpha \leq 1$ вывел следующие два неравенства:

$$\|R\|_{H_\alpha^{1/\alpha}} \leq c_1(\alpha) n^\alpha \|R\|_{B_l}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (10)$$

$$\|R\|_{D_\alpha A_{1/\alpha-1}^{1/\alpha}} \leq c_2(\alpha) n^\alpha \|R\|_{B_l}, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad (11)$$

$$\|R\|_{H_\alpha^{1/\alpha}}^\alpha = \sup_{r < 1} \int_T |\tilde{D}^\alpha f(r\xi)|^{1/\alpha} dm(\xi);$$

$$\|R\|_{D^\alpha A_{1/\alpha-1}^\alpha}^\alpha = \int_{\mathbb{D}} \left| \tilde{D}^{\alpha+1} f(r\xi) \right|^{1/\alpha} (1-r)^{1/\alpha-1} dr d\xi.$$

◁ Докажем сначала, что (9) при $\alpha < 1$ выводится из теоремы А и (10) при $\alpha = 1$. Заметим, что при $\alpha < 1$

$$\tilde{D}^2 \tilde{D}^{\alpha-1} R(\tilde{\rho}\xi) = (\alpha) \int_0^1 \int_0^1 \tilde{D}^2 \tilde{D}^{\alpha-1} R_r(\tilde{\rho}\rho\xi) \rho^\alpha (1-\rho)^{-\alpha} d\rho dr, \quad (12)$$

где $\left(\tilde{D}^\alpha f \right) (z) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} a_k z^k$, $\alpha > -1$, $\tilde{D}^{-1}(\tilde{D}^1 f) = f$.

Пусть $A = \int_0^1 \left| \tilde{D}^3 R(r\rho\tilde{\rho}\xi) \right| dr$. Тогда $A \leq \min(X, Y)$, где $X = \max_\rho \int_0^1 \left| \tilde{D}^3 R(r\rho\tilde{\rho}\xi) \right| dr$, $Y = \left\| \tilde{D}R \right\|_{Bl} (1-\rho)^{-1}$. Следовательно, оценивая, интегрируя по T и используя теорему А, имеем

$$\int_T \left| \tilde{D}^{\alpha+1} R(\tilde{\rho}\xi) \right|^{1/\alpha} dm(\xi) \leq c \left(\|R\|_{Bl}^{(1-\alpha)1/\alpha} \right) \int_T \left(\int_0^1 \left| \tilde{D}^3 R(r\rho\tilde{\rho}\xi) \right| dr \right) dm(\xi). \quad (13)$$

Значит, $\sup_{\tilde{\rho} \in (0,1)} \left(\int_T \left| \tilde{D}^{\alpha+1} R(\tilde{\rho}\xi) \right|^{1/\alpha} dm(\xi) \right)^\alpha (1-\tilde{\rho})^\alpha \leq cn^\alpha \left\| \tilde{D}R \right\|_{Bl}$. Мы учли, что $\int_T \int_0^1 \left| \tilde{D}^3 R(r\rho\tilde{\rho}\xi) \right| d\xi dr \leq c \int_T \left| \tilde{D}R(\tilde{\rho}\xi) \right| dm(\xi) (1-\tilde{\rho})^{-1}$ и (10) при $\alpha = 1$.

Отметим, что для любой аналитической функции f неравенство

$$\|f\|_{Bl} \leq c \sup_\rho M_{1/\alpha}(\tilde{D}^{\alpha+1} f, \rho) (1-\rho)^\alpha, \quad \alpha \leq 1$$

(т. е. «обратное» к (9)) также справедливо и следует из известных теорем Харди — Литтлвуда о росте средних $M_p(f, r)$ [5, с. 84]. Подобная «обратная» оценка для рациональных функций была установлена Е. Дынькиным в [18]:

$$\|R\|_{H^\sigma} \leq n^{\frac{1+\alpha}{p}} \|R\|_{A_\alpha^p}, \quad 1 < 2 + \alpha < p, \quad \sigma = \frac{p}{2 + \alpha}.$$

Оценка $\|f\|_{A_\alpha^p} \leq \|f\|_{H^\sigma}$ — известная теорема Харди — Литтлвуда [5, с. 87], где как и выше

$$A_{\alpha p-1}^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha p-1} dm_2(z) < \infty \right\}, \quad \alpha > 0, p > 0.$$

Следующее утверждение связано с интегральным оператором Tg , где $(T_g f)(w) = \int_0^w f(z)g'(z) dz$ (частный случай этого оператора — так называемое преобразование Чезаро), которому посвящено большое количество работ в последние годы [4, 12, 13]. Наиболее общие результаты — критерии для ограниченности операторов Tg — действующих в классах Харди и Бергмана получены недавно [4, 12].

Теорема В [4, 12]. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Тогда

- 1) оператор Tg действует из H^p в H^p в том и только том случае, когда $g \in \text{ВМОА}$;
- 2) оператор Tg действует из A_α^p в A_α^p в том и только том случае, когда $g \in \text{Вл}$, где ВМОА , Вл — известные классы: $\text{ВМОА} = \text{ВМО} \cap H^2$, Вл — класс Блоха [2].

Пусть, далее, $0 < p, q < \infty$, $t > s$, $s \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$F_s^{p,q} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 |\tilde{D}^t f(R\xi)|^q (1-R)^{(t-s)q-1} dR \right)^{p/q} dm(\xi) < \infty \right\}$$

— голоморфные классы Лизоркина — Трибеля [19]. Очевидно $F_s^{p,q} = A_\alpha^p$ при $p = q$, $s < 0$, $\alpha = -s$ [19, 28]. $F_0^{p,2} = H^p$ [5], $0 < p < \infty$.

Ниже мы сформулируем и докажем обобщение второй части теоремы В.

Теорема 4. Пусть $s < 0$, $\frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1$, $0 < p < \infty$. Оператор Tg действует из $F_s^{p,q}$ в $F_s^{p,q}$ тогда и только тогда, когда $g \in \text{Вл}$.

Замечание 5. Случай $s = -\frac{1}{q}$, $p = q$ содержится в теореме В.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Отметим сначала, что справедливы следующие неравенства:

$$\|Tgf\|_{F_s^{p,q}} \leq \|g\|_{\text{Вл}} \times \|f\|_{F_s^{p,q}} \leq \|g\|_{F_s^{\infty,q}} \times \|f\|_{F_s^{p,q}}, \quad s < 0, p, q \in (0, \infty), \quad (14)$$

$$\|Tgf\|_{F_s^{p,q}} \leq \|g\|_{H^{(1/p-1/p_1)^{-1}}} \|f\|_{F_s^{p_1,q}}, \quad s < 0, p_1 > p, p_1, p \in (0, \infty), \quad (15)$$

где

$$F_s^{\infty,q} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_w \int_{\mathbb{D}} \frac{|\tilde{D}^\alpha f(z)|^q (1-|z|)^{(\alpha-s)q-1} dm_2(z)}{|1-\bar{z}w|^{n+1}} (1-|w|)^n < \infty \right\},$$

$\alpha > s$, $0 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $(Tgf)'(w) = f(w)g'(w)$. Поэтому первое неравенство в (14) — следствие теоремы Харди — Литтлвуда [5, с. 84], второе — следует из представления Бергмана [19]. Неравенство (15) — простое следствие теоремы о сильной факторизации $F_s^{p,q}$ Вербицкого — Кона [20].

Легко вывести также оценку

$$\|Tgf\|_{F_s^{p,q}} \leq c \sup_{|z|<1} \left(|\tilde{D}g(z)| (1-|z|)^{-1/p+1/p_1+1} \right) \|f\|_{F_s^{p,q}}, \quad s > 0, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} > 0. \quad (16)$$

Оценки (14)–(16) при $q = 2$, $s = 0$ получены в [4].

Покажем теперь справедливость неравенства обратного к (14). Нам понадобится следующая лемма.

Лемма А. Пусть $t > -1$. Тогда существуют положительные числа α и β такие, что верна оценка

$$\tilde{I} = \int_T \left(\int_0^1 \frac{(1-|w|)^t d|w|}{|1-w\bar{z}_2|^{\alpha q} |1-w\bar{z}_1|^{\beta q}} \right)^{p/q} dm(\xi) \leq \frac{c(p, q, t, \alpha, \beta)}{|1-z_1\bar{z}_2|^{(\alpha+\beta)p-(t+1)p/q-1}},$$

где $z_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, 2$.

◁ Нам понадобится следующее неравенство [7]:

$$\int_T \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{\xi}z|^s |1 - \xi\bar{w}|^{q-s}} \leq \frac{c(q, s)}{|1 - z\bar{w}|^{q-1}}, \quad 0 < s < 1, \quad 1 < q < 1 + s. \quad (17)$$

Имеем следующую оценку внутреннего интеграла ($t > -1$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1 - |w|)^t d|w|}{|1 - |w|e^{i\varphi}z_1|^{\alpha q} |1 - |w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} &= \int_0^{R_0} \frac{(1 - |w|)^t}{|1 - |w|e^{i\varphi}z_1|^{\alpha q} |1 - |w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} d|w| + \\ &+ \int_{R_0}^1 \frac{(1 - |w|)^t}{|1 - |w|e^{i\varphi}z_1|^{\alpha q} |1 - |w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} d|w|, \quad R_0 = \max(|z_1|, |z_2|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^1 \frac{(1 - |w|)^t}{|1 - |w|e^{i\varphi}z_1|^{\alpha q} |1 - |w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} d|w| &\leq \\ &\leq \frac{(1 - R_0)^{t/2+1/2} (1 - R_0)^{t/2+1/2}}{|1 - z_1e^{i\varphi}|^{\alpha q} |1 - \bar{z}_2e^{i\varphi}|^{\beta q}} \leq \frac{c}{|1 - \bar{z}_1e^{i\varphi}|^{\alpha q - \frac{t+1}{2}} |1 - \bar{z}_2e^{i\varphi}|^{\beta q - \frac{t+1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} \frac{(1 - |w|)^t}{|1 - |w|e^{i\varphi}z_1|^{\alpha q} |1 - |w|e^{i\varphi}\bar{z}_2|^{\beta q}} d|w| &\leq \int_0^{R_0} \frac{(1 - R|z|)^{t/2+1/2} (1 - R)^{-1/2+t/2} dR}{|1 - Re^{i\varphi}\bar{z}_1|^{\alpha q} |1 - Re^{i\varphi}z_2|^{\beta q}} \leq \\ &\leq \frac{c}{|1 - z_1e^{i\varphi}|^{\alpha q - t/2 - 1/2} |1 - z_2e^{i\varphi}|^{\beta q - t/2 - 1/2}}. \end{aligned}$$

Учитывая (17), получим $\tilde{I}^{1/p} = \frac{c}{|1 - z_1\bar{z}_2|^{(\alpha+\beta) - \frac{t+1}{q} - \frac{1}{p}}}$ при $\tilde{s} > \frac{t+1}{2q}$, где $\tilde{s} = \alpha$ или β , $\beta + \alpha > \frac{1+t}{q} + \frac{1}{p}$, $\alpha, \beta > 1$, $\alpha < \frac{1}{p} + \frac{1+t}{2q}$, $\beta < \frac{1}{p} + \frac{1+t}{2q}$. ▷

Используя неравенство [28] $|f(z)|(1 - |z|)^{-s + \frac{1}{p}} \leq c \|f\|_{F_s^{p,q}}$, $s < 0$, выводим оценки

$$|(Tgf)'(w)| = |g'(w)| |f_{w,w_1}(w)| \leq \frac{\|Tgf\|_{F_s^{p,q}}}{(1 - |w|)^{-s + \frac{1}{p} + 1}} \leq \frac{c \|f\|_{F_s^{p,q}}}{(1 - |w|)^{-s + \frac{1}{p} + 1}}, \quad (18)$$

где $f_{w,w_1}(z) = \frac{1}{(1 - \bar{w}z)^{r+1} (1 - \bar{w}_1z)^{V+1}}$, $w \neq w_1$, $w, w_1 \in \mathbb{D}$, $r, V > 0$.

Следовательно, учитывая лемму А при $\alpha = r+1$, $\beta = V+1$, $t = -sq - 1$ и неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|)^\alpha}{|1 - \bar{w}z|^\beta} dm_2(z) \leq \frac{c}{(1 - |w|)^{\beta - \alpha - 2}}, \quad \beta > \alpha + 2, \quad \alpha > -1.$$

Выводим из (18)

$$\min((l, m, n > 0), (1 + \max(r, V))) < \frac{1}{p} - \frac{s}{2}, \quad r + V + 2 > \frac{1}{p} - s,$$

$$\min(r, V) > \max\left(-\frac{s}{2} - 1, 0\right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \frac{|g'(w)|^2 (1-|w|)^l}{|1-\bar{w}w_1|^m} dm_2(w) (1-|w_1|)^n \leq \\ & \leq C \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{p+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right)}}{|1-\bar{w}w_1|^m |1-\bar{w}w_1|^{2\left(r+1+s-\frac{1}{p}\right)}} dm_2(w) (1-|w_1|)^n \leq \text{const} \end{aligned}$$

при $m+2\left(r+1+s-\frac{1}{p}\right) > l+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right)+2 \Leftrightarrow m > l$ и при $n = m-l, l+2\left(r+s-\frac{1}{p}\right) > -1$.

Итак, $g \in Q_{l,n}$.

$$\|g\|_{Q_{l,n}} = \sup_{w_1} \int_{\mathbb{D}} \frac{|g'(w)|^2 (1-|w|)^l}{|1-\bar{w}w_1|^{n+l}} (1-|w_1|)^n dm_2(w) < \infty.$$

Напомним, что [21] $Q_{l,n} = Bl$ при $l = n > 1$, при $Q_{l,n} = BMOA$ $l = n = 1$, $Q_{l,n} = Q_p$ при $0 < p = l = n < 1$. Пространства $Q_{l,n}$ интенсивно изучаются в последние годы [21]. Проведем анализ параметров в вышеприведенных неравенствах.

Пусть $r + s - \frac{1}{p} \geq 0$. Тогда, учитывая последнее неравенство и условия теоремы 4, имеем $\frac{1}{p} - \frac{s}{2} > r + 1 \geq \frac{1}{p} - s + 1 \Rightarrow s > 2$, что противоречит предположениям теоремы 4 ($s < 0$). Следовательно, имеет место неравенство $r + s - \frac{1}{p} \leq 0$.

Из (18), (19) выводим ограничения на p, s, n, r :

$$\frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1, \quad s < 0, \quad (l+2-m) < 2 < \left(\frac{-1-l}{r+s-1/p}\right), \quad r \leq \frac{1}{p} - \frac{s}{2} - 1.$$

Сопоставляя полученные выше ограничения на параметры, получаем такие условия:

$$\max\left(-\frac{s}{2} - 1, 0\right) < r < \frac{1}{p} - s \Rightarrow \frac{1}{p} \geq \left(s, \frac{s}{2} - 1\right), \quad \frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1.$$

Окончательно выводим

$$l > -1 + 2\left(\frac{1}{p} - r - s\right), \quad s < 0, \quad \frac{1}{p} > \frac{s}{2} + 1 + r.$$

Заметим, что если $l \leq 1$, то $r + s - \frac{1}{p} > -1$. Откуда $-1 - s + \frac{1}{p} \leq r < \frac{1}{p} - \frac{s}{2} - 1$. Противоречие. Поэтому $l > 1$. Учтем, что [21] $\|g\|_{Bl} \leq \|g\|_{Q_{l,l}}$, $l > 1$ [27]. \triangleright

Заметим, что совершенно аналогично при $s < 0$ и некоторых ограничениях на p и q можно установить, что оператор Tg действует из пространства $B_s^{p,q}$ в $B_s^{p,q}$ в том и только том случае, когда $g \in Bl$, где [15, 16]

$$B_s^{p,q} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_0^1 M_p^q(\tilde{D}^k f, r) (1-r)^{(k-s)q-1} dr < \infty \right\}, \quad k - \forall, \quad k > s.$$

Отметим также, что анализ проведенного доказательства показывает, что стандартное наращивание переменных [7] и, незначительные модификации по ходу дела,

можно получить обобщение приведенных утверждений об операторе Tg в полидиске \mathbb{D}^n , к примеру оценка в лемме В «перейдет» в неравенство

$$\int_{T^n} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^n \frac{(1 - |w_k|)^t d|w|}{|1 - w_k \bar{z}_k|^{\alpha q} |1 - \bar{z}_1^k w_k|^{\beta q}} \right)^{p/q} dm_n(\xi) \leq \frac{c(p, q, t, \alpha, \beta)}{\prod_{k=1}^n |1 - z_1^k(\bar{z}_2)_k|^{(\alpha+\beta)p - (t+1)1/q - 1}},$$

где $z_1 \in \mathbb{D}^n$, $z_2 \in \mathbb{D}^n$, а параметры α, β, p, q, t удовлетворяют тем же условиям. Учитывая оценку [15]

$$\int_T \left(\int_0^1 |f(z)|^q (1 - |z|)^{-q(t + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}) - 1} d|z| \right)^{p_1/q} dm(\xi) \leq c \|f\|_{F_t^{p,q}}, \quad \max(-1, t) < \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p},$$

$p < p_1$ и рассуждения, проведенные выше, нетрудно установить также следующее обобщение основного результата из [4].

Теорема 5. Оператор Tg действует из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$, $p < p_1$, $0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \leq 1$, $t < \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}$ если и только если $\sup_z |g'(z)| (1 - |z|)^{-1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}} < \infty$.

Условие $g \equiv 0$ необходимо и достаточно для действия оператора Tg из $F_t^{p,q}$ в $F_t^{p_1,q}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} > 1$.

Отметим, что при $q = 2$, $t = 0$ эти утверждения получены в [4].

Основное утверждение последней части заметки — теорема о действии известных операторов Теплица [7, 22] $T_{\bar{\varphi}}$, $\varphi \in H^\infty$ и о наличии K -свойства в пространствах типа $BMOA$ и $MOA_{\omega, \alpha, p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X — подпространство $H^1(\mathbb{D}^2)$. Скажем, что X обладает K -свойством, если $T_{\bar{\varphi}}X \subset X$ для всех $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$.

При $n = 1$ термин введен в [26]. Наличие K -свойства в одномерном случае обеспечивает возможность деления на внутреннюю функцию, т. е. наличие у аналитического пространства так называемого f -свойства [26].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подпространство $X \subset H^1(\mathbb{D})$ обладает f -свойством, если для любой внутренней функции I и для любой функции $h \in X$ верно $h/I \in X$ при условии, что $h/I \in H^1$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in (0, 1)$, $\omega(z, z') > 0$, $\omega(z, z') = \prod_{i=1}^2 \omega_i(z_i, z'_i)$. Введем пространства $BMOA_{\omega, \alpha, p}$ (типа $BMOA$),

$$BMOA_{\omega, \alpha, p} = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^2) : \sup_{z' \in \mathbb{D}^2} \int_{\mathbb{D}^2} |\tilde{D}^\alpha f(z)|^p \omega(z, z') dm_4(z) < \infty \right\}, \quad z' = (z'_1, z'_2).$$

Наличие или отсутствие f -свойства в различных подклассах $H^1(\mathbb{D})$ устанавливалось многими авторами (см., например, [23]).

K -свойство (а следовательно, возможность деления на внутреннюю функцию) в классах (типа $BMOA$) Q_p , $p < 1$, $Q_p \subset H^1$, которым уделялось много внимания в последние годы (см., например, [24, 27]), было установлено недавно в [23].

В [23] задача решалась посредством псевдоаналитической характеристики классов Q_p . Ниже мы предложим более простой подход, позволяющий получать информацию о

наличии K -свойства в общих пространствах $BMOA_{\omega, \alpha, p}$, в бидиске при $\alpha = 0$. Мы также предъявим две шкалы пространств типа $BMOA$ (см. следствие 1 и 3) в единичном круге, обладающих f -свойством. Результаты, полученные нами в круге, дополняют известные ранее утверждения о наличии или отсутствии f -свойства в тех или иных шкалах пространств аналитических функций. Утверждение теоремы 6 — новое и для $n = 1$.

Пусть ниже $D^t x = \{f : D^t f \in X\}$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что $\tilde{D}BMOA_{\omega_p, 0, 2} = Q_p$, $0 < p < \infty$, где

$$\omega_p(z, z') = \prod_{k=1}^2 \frac{(1 - |z_k|)^p (1 - |z'_k|)^p}{|1 - \bar{z}_k z'_k|^{2p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

Отметим важную работу [27], где также были рассмотрены классы существенно более общие, чем Q_p пространства.

Всюду ниже весовая функция $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ удовлетворяет условию S_α при $\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} \sup_{z'} \sup_{V_0} \in \mathbb{D} (1 - |V_0|^2)^{-(2+\alpha)} \left(\int_{S_{V_0}} \omega_j(\tilde{z}) (1 - |\tilde{z}|)^\alpha dm_2(\tilde{z}) \right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int_{S_{V_0}} (\omega_j(\tilde{z}))^{-q/p} (1 - |\tilde{z}|)^\alpha dm_2(\tilde{z}) \right)^{1/q} < \infty \quad (S_\alpha), \end{aligned} \tag{20}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\tilde{z} = (z, z')$, $w(\tilde{z}) = w(z, z')$, $j = 1, 2$, $(1 - |\tilde{z}|) = (1 - |z|)(1 - |z'|)$.

Теорема 6. Пусть имеет место включение $BMOA_{\omega, 0, p} \subset H^1(\mathbb{D}^2)$. Тогда пространство $BMOA_{\omega, 0, p}$ обладает K -свойством.

◁ Доказательство теоремы опирается на следующий критерий, установленный в [25].

Пусть $\alpha > -1$, $1 < p < \infty$, $\omega(z) \geq 0$. Тогда оператор

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) (1 - |w|)^\alpha}{(1 - \bar{w}z)^{\alpha+2}} dm_2(w)$$

(проекция Бергмана) действует из $L^p_{\alpha, V}$ в себя: $L^p_{\alpha, V} = L^p(D, V(z)(1 - |z|)^\alpha dm_2(z))$ в том и только в том случае, когда

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{-(2+\alpha)} \left(\int_{S_w} V(z) (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_w} (V(z))^{-\frac{q}{p}} (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \tag{21}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $S_z = \{w \in \mathbb{D} : |w| > |z|, |\arg z - \arg w| < 2\pi(1 - |z|)\}$ — коробка Карлесона.

Условие (21), приведенное выше, напоминает условие A_p Макенхаупта и разница в количестве «берущихся коробок», S_z — коробка, «встречающаяся» с границей \mathbb{D} . Условие (20) можно получить обычной итерацией, т. е. применением по каждой переменной в отдельности критерия (21).

Действительно, пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > -1$, z'_1, z'_2 фиксированы. Тогда при $V \in S_\alpha$, $V = V_1 \cdot V_2$

$$\int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}^2} \frac{\tilde{f}(w_1, w_2) (1 - |w_1|)^{\alpha_1} (1 - |w_2|)^{\alpha_2} dm_4(w)}{(1 - \bar{w}_1 z_1)^{\alpha_1+2} (1 - \bar{w}_2 z_2)^{\alpha_2+2}} \right|^p \times \\ \times (1 - |z_1|)^\alpha V_1(z_1, z'_1) (1 - |z_2|)^\alpha V_2(z_2, z'_2) dm_4(z) \leq \\ \leq \int_{\mathbb{D}^2} |\tilde{f}(w_1, w_2)|^p V_1(w_1, w'_1) V_2(w_2, w'_2) (1 - |w_1|)^\alpha (1 - |w_2|)^\alpha dm_4(w_1, w_2).$$

Далее, легко видеть, что

$$|(T_{\tilde{h}} f)(z)| = c \left| \int_{\mathbb{D}^2} \frac{\overline{h(w)} f(w)}{(1 - \bar{w} z)^2} dm_4(w) \right|, \text{ где } f(z) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} a_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

Остается воспользоваться критерием при $\alpha = 0$ по каждой переменной и перейти к супремуму сначала справа по w_1, w_2 , затем слева в полученном неравенстве. \triangleright

Следствие 1. Пространство $\tilde{D}^k H^1 \cap \text{BMOA}_{\omega, 0, p}(\mathbb{D})$ при $k \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$, обладает f -свойством.

Следствие 2. Класс $\tilde{D}^{-1} Q_p(\mathbb{D}^2) \cap H^1$, $p < 1$ обладает K -свойством, $\tilde{D}^{-1} Q_p(\mathbb{D}) \cap H^1$ обладает f -свойством при $p < 1$.

Следствие 3. Если $\text{BMOA}_{\omega, 0, p}(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$, то $\text{BMOA}_{\omega, 0, p}$ обладает f -свойством.

Нетрудно показать, что вес ω_p удовлетворяет условию (20). Утверждения следствия 2 установлены. Оставшиеся утверждения следуют из замечаний, приведенных выше и из факта, что $\tilde{D}^k H^1$, $k \in \mathbb{N}$, обладает f -свойством (см., например, [22]).

Литература

1. Holland F., Walsh D. Criteria for membership of Bloch spaces and its subspace BMOA // Math. Ann.—1986.—V. 273.—P. 317–335.
2. Stroethoff K. The Bloch spaces and Besov spaces of analytic functions // Bull Austr. Math. Soc.—1996.—V. 54.—P. 211–219.
3. Пекарский А. А. Новое доказательство неравенства Семмеса для производных рациональных функций // Мат. заметки.—2002.—Т. 2.—С. 230–236.
4. Aleman A., Cima J. An integral operator on H^p and Hardy's inequality // J. D'Analyse Math.—2001.—V. 85.—P. 157–175.
5. Duren P. L. Theory of H^p spaces.—N-J; London: Acad. press, 1970.
6. Alexandrov A. B. Essays on non Locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math.—1981.—V. 864.—P. 1–90.
7. Шамоян Р. Ф. Обобщенное преобразование Харди и операторы Теплица в пространствах типа BMOA // Укр. мат. журн.—2001.—Т. 9, № 53.—С. 1206–1271.
8. Djrbashian, Shamoian F. Topics in the theory of A_α^p spaces // Teubner Texte zur Math.—1988.—V. 105.—P. 199.
9. Voe B. Interpolating sequences for Besov spaces // J. of Func. Anal.—2001.—V. 192.—P. 319–341.
10. Wu Z. The Predual and second Predual of ω_α // J. of Func. Anal.—1993.—V. 116.—P. 314–334.
11. Шамоян Р. Ф. О характеристиках типа BMO одного класса голоморфных в круге функций // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 3.—С. 539–560.
12. Aleman A., Siskakis A. G. Integration operators on Bergman spaces // Indiana Un. M. J.—1997.—V. 46, № 2.—P. 337–356.
13. Aleman A., Siskakis A. G. An integral operator on H^p // Complex Variables.—1995.—V. 28, № 11.—P. 149–158.

14. Шамоян Ф. А., Ярославцева О. В. Непрерывные проекторы, двойственность диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой // Зап. сем. ПОМИ.—1998.—Т. 225.—Р. 184–197.
15. Трибель Х. Теория функциональных пространств.—М.: Мир, 1983.—344 с.
16. Ortega J., Fabrega J. Corona type decomposition in some Besov spaces // Math. Scand.—1996.—V. 78, № 1.—Р. 93–111.
17. Nakazi T. Canad Nath Bull.—1996.—V. 39, № 2.—Р. 219–226.
18. Dynkin E. Rational Function in Bergman spaces, Complex analysis, operators and related topics // Oper. Adv. Appl.—2000.—V. 113.—Р. 77–94.
19. Ortega J. M., Fabrega J. Holomorphic Triebel-Lizorkin spaces // J. of Func. Anal.—1998.—V. 151.—Р. 177–212.
20. Cohn W., Verbitski I. Factorization on tent spaces and Hankel operators // J. of Func. Anal.—2000.—V. 175.—Р. 308–329.
21. Wu Z., Xie C. Q_p spaces and Morrey spaces // J. of Func. Anal.—2003.—V. 164.—Р. 1–15.
22. Шамоян Р. Ф. О действии операторов свертки и Теплица в пространствах типа ВМОА // Мат. заметки.—2003.—Т. 73, № 5.—С. 759–772.
23. Dyakonov K., Girela D. On Q_p spaces and pseudoanalytic extension // Ann. Acad. Sci. Fenn.—2000.—V. 25.—Р. 477–487.
24. Essen M., Xiao Some results on Q_p spaces $0 < p < 1$ // J. Reine. Angew. Math.—1997.—V. 485.—Р. 173–195.
25. Bonami A., Bekolle D. Inegalities a poids pour le noyau de Bergman C. R. // Acad. Sci. Paris Ser. A.—1978.—V. 286, № 18.
26. Khavin V. On the factorization of analytic functions smooth up to the boundary // Зап. Научн. Сем. ЛОМИ 22.—1971.—Р. 202–205.
27. Essen M., Wulan H. On analytic and meromorphic function and spaces of Q_p type // J. Math.—2002.—V. 46, № 4.—Р. 1233–1258.
28. Шамоян Р. Ф. О пространствах голоморфных в поликруге функций типа Лизоркина — Трибеля // Известия НАН Арм.—2002.—Т. 37, № 3.—С. 57–78.

Статья поступила 27 октября 2006 г.

ШАМОЯН РОМИ ФАЙЗОВЕВИЧ, к. ф.-м. н.
Брянский государственный университет
Брянск, 241050, РОССИЯ
E-mail: rshamoyan@mail.ru