И. В. Скрыпник, Усреднение квазилинейных параболических задач в областях с мелкозернистой границей, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 2, 350–363

https://www.mathnet.ru/de8571

ФЕВРАЛЬ 1995 г., ТОМ 31, № 2

УДК 517.95

И. В. СКРЫПНИК

УСРЕДНЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе построена усредненная задача для последовательности квазилинейных параболических задач с граничным условием Дирихле в областях с мелкозернистой границей. Усреднение основано на асимптотическом разложении решений задач в перфорированных областях и поточечных оценках решений модельных нелинейных параболических уравнений.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n\geqslant 3$, и предположим, что при каждом натуральном s определено конечное число непересекающихся замкнутых множеств $F_i^{(s)}, i=1, \dots, I(s)$, содержащихся в Ω. В цилиндрической области $Q_T^{(s)}=\Omega^{(s)}\times[0, T], \Omega^{(s)}=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{I(S)} F_i^{(s)}$ рассматривается квазилинейная параболическая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dx_j}a_j\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)=a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad (x, t)\in Q_T^{(s)}, \qquad (1)$$

$$u(x, t)=f(x, t), \quad (x, t)\in\partial\Omega^{(s)}\times[0, T], \qquad (2)$$

$$u(x, 0)=f_0(x), \quad x\in\Omega^{(s)}, \qquad (3)$$

с известными функциями $f(x, t)$, $f_0(x)$, определенными соответственно в $Q_T=\bar{\Omega}\times[0, T]$, $\bar{\Omega}$.

При формулируемых далее условиях просто доказывается существование решения $u_s(x, t)$ задачи (1)—(3). Используя доказанную нами ранее сходимость последовательности $u_s(x, t)$ к предельной функции, в работе строится для этой функции новая граничная задача (усредненная задача) в цилиндре Q_T.

Усреднение эллиптических задач в областях с мелкозернистой границей изучалось для линейных уравнений в работах В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова [1] и для нелинейных уравнений в [2, 3].

1. Формулировка предположений и основного результата. Для простоты изложения ограничимся наиболее простыми условиями роста коэффициентов $a_j(x, t, u, p)$ по переменным u, p. Будем предполагать, что функции $a_j(x, t, u, p)$, $j=0, 1, \dots, n$, определены при $x\in R^n$, $t\in R^1$, $u\in R^1$, $p\in R^n$ и удовлетворяют условиям:

A_1) функции $a_j(x, t, u, p)$ непрерывны по u, p при почти всех $(x, t)\in R^n\times R^1$, измеримы по x, t при любых $(u, p)\in R^1\times R^n$, $a_j(x, t, 0, 0)\equiv 0$ при $(x, t)\in R^n\times R^1$, $j=0, 1, \dots, n$;

A_2) существуют положительные постоянные ν, μ такие, что при $(x, t)\in R^n\times R^1$, $u, v\in R^1$, $p, q\in R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}[a_j(x, t, u, p)-a_j(x, t, u, q)](p_j-q_j)\geqslant\nu|p-q|^2,$$

$$|a_j(x,t,u,p)-a_j(x,t,v,q)|\leqslant\mu[|u-v|+|p-q|],\ j=1,\dots,n,$$
$$|a_0(x,t,u,p)|\leqslant\mu[|u|+|p|]+\varphi(x,t), \tag{4}$$
где $\varphi(x,t)\in L_2(Q_T)$.

Так же, как в работе [4], будем считать для простоты, что $f_0(x)\equiv 0$, в дальнейшем начальное условие (3) заменим условием
$$u(x,0)=0,\ x\in\Omega^{(s)}. \tag{5}$$

Будем предполагать выполненным следующее условие:

F) функция $f(x,t)$ определена при $x\in\bar{\Omega}$, $t\in R^1$, ограничена, равна нулю при $t<0$ и принадлежит в цилиндре $Q=\Omega\times R^1$ пространству $W_2^{1,1/2}(Q)$.

Используемые здесь и далее обозначения функциональных пространств понимаются согласно [5].

Обозначим
$$N=\operatorname{ess\,sup}\{|f(x,t)|:(x,t)\in Q\}+\|f(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}. \tag{6}$$

Просто проверяется, что условия A_1), A_2), F) обеспечивают разрешимость задачи (1), (2), (5) в пространстве $V_2(Q_T^{(s)})$ при любом $T<\infty$. Более того, решение $u_s(x,t)$ этой задачи принадлежит пространству $W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$ и существует не зависящая от s постоянная M такая, что при всех s справедливы оценки
$$\operatorname{ess\,sup}\{|u_s(x,t)|:(x,t)\in Q_T^{(s)}\}\leqslant M, \tag{7}$$
$$\|u_s(x,t)\|_{V_2(Q_T^{(s)})}\leqslant M,\ \ \|u_s(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})}\leqslant M. \tag{8}$$
Доопределим функции $u_s(x,t)$ на Q, полагая их равными $f(x,t)$ вне $Q^{(s)}$. Переходя, если понадобится, к подпоследовательности, будем считать, что $u_s(x,t)$ при $s\to\infty$ слабо сходятся к $u_0(x,t)$ в $W_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})$.

Из [4] следует, что для произвольной функции $\psi(x,t)\in \mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)})\cap$ $\cap W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$, произвольной функции $\eta(t)\in C^1(R^1)$ с носителем в интервале $(-T,T)$ справедливо интегральное тождество
$$J_s[\psi]\equiv\sqrt{-1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_s\eta)](x,\alpha)\overline{[F\psi](x,\alpha)}dxd\alpha+$$
$$+\iint\limits_{Q_T^{(s)}}\Big\{u_s(x,t)\psi(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\Big(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\Big)\eta(t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}+$$
$$+a_0\Big(x,t,u_s,\frac{\partial u_s}{\partial x}\Big)\eta(t)\psi(x,t)\Big\}dxdt=0. \tag{9}$$

Здесь $F(u_s\eta)$, $F\psi$ — преобразования Фурье функций $u_s\eta$, ψ по переменной t, черта над $[F\psi](x,\alpha)$ обозначает комплексное сопряжение, при этом полагаем $u_s(x,t)\equiv 0$ при $t<0$. Кроме того, можно показать, что $u_s(x,t)\eta(t)\in W_2^{1,1/2}(Q^{(s)})$.

Сформулируем предположения относительно множеств $F_i^{(s)}$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и определим точку $x_i^{(s)}$ условием $F_i^{(s)}\subset\overline{B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})}$. Здесь и далее $B(x_0,\rho)$ — шар радиуса ρ с центром в x_0. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B(x_i^{(s)},d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup\limits_{j\neq i}B(x_j^{(s)},d_j^{(s)})\cup\partial\Omega$.

Предположим выполнение условий:

B_1) справедливо равенство $\lim\limits_{s\to\infty}r^{(s)}=0$, где $r^{(s)}=\max\{r_i^{(s)}:i=1,\ \dots$ $\dots,I(s)\}$;

B_2) существует положительная постоянная C_0 такая, что при $i=1,\dots$ $\dots,I(s)$, $s=1,2,\dots$, выполнены оценки

$$d_i^{(s)} \leqslant C_0 r_i^{(s)}, \quad \sum_{i=1}^{I(s)} [d_i^{(s)}]^{2(n-2)} [r_i^{(s)}]^{-n} \leqslant C_0.$$

В дальнейшем полагаем $T > 1/2$, $T' = T - 1/2$. Построение усредненной задачи осуществим в цилиндре $Q_{T'}$, что не ограничивает общности результата в силу произвольности T.

Из [4] следует

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия A_1), A_2), F), B_1), B_2), $u_s(x, t)$ — решение задачи (1), (2), (5), и пусть последовательность $u_s(x, t)$ слабо сходится в $W_2^{1,1/2}(Q_T)$ к $u_0(x, t)$. Тогда при произвольных $p \in (1, 2)$, $h_0 \in (0, 1/4)$ справедливо равенство*

$$\lim_{s \to \infty} \Big\{ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \int_\Omega |u_s(x, t) - u_0(x, t)|^2 dx + \iint_{Q_{T'}} \left| \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right|^p dx dt + \operatorname*{ess\,sup}_{0 < h < h_0} \iint_{Q_{T'}} \left| \frac{u_s(x, t+h) - u_0(x, t+h) - u_s(x, t) + u_0(x, t)}{\sqrt{h}} \right|^p dx dt \Big\} = 0. \tag{10}$$

Для построения усредненной задачи понадобится еще дополнительное условие. Для его формулировки проведем вспомогательные построения.

Обозначим $\lambda_s = [-\ln r^{(s)}]^{-1}$, $s = 1, 2, \dots$, и определим $\rho_i^{(s)}$ при $s = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, I(s)$ равенствами $\rho_i^{(s)} = 2d_i^{(s)}$, если $i \in I'(s) = \{i = 1, \dots, I(s) : d_i^{(s)} \geqslant [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-1}\}$; $\rho_i^{(s)} = [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-2}$, если $i \in I''(s) = \{i = 1, \dots, I(s) : d_i^{(s)} < [r_i^{(s)}]^{n/(n-2)} \lambda_s^{-1}\}$. Можем считать в дальнейшем s настолько большим, что $\rho_i^{(s)} < r_i^{(s)}/4$ при $i \in I''(s)$; $d_i^{(s)} \leqslant 1/2$, $\lambda_s < 1/16$.

Легко проверяется (см. [4]), что

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{i \in I'(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} = 0, \quad \lim_{s \to \infty} \sum_{i \in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^n = 0, \quad \sum_{i=1}^{I(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2} \leqslant C' \tag{11}$$

с постоянной C', зависящей лишь от C_0 и $\operatorname{mes} \Omega$.

Для заданной пары значений (i, s) таких, что $s = 1, 2, \dots$, $i \in I''(s)$, разделим отрезок $[0, T']$ на $K(i, s)$ отрезков равной длины точками $t_{i,0}^{(s)} = 0$, $t_{i,1}^{(s)}, \dots, t_{i,K(i,s)}^{(s)} = T'$ так, чтобы $(1/2)[\rho_i^{(s)}]^2 \leqslant t_{i,k}^{(s)} - t_{i,k-1}^{(s)} \leqslant [\rho_i^{(s)}]^2$.

Определим для $s = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, I(s)$ и $q \in R^1$ функцию $v_i^{(s)}(x, t, q)$ как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \text{ для } (x, t) \in G_i^{(s)} \times [-T, T], \tag{12}$$

$$v(x, t) = q\omega(|x - x_i^{(s)}|)\omega(-t/T) \text{ для } (x, t) \in \partial G_i^{(s)} \times [-T, T], \tag{13}$$

$$v(x, -T) = 0, \quad x \in G_i^{(s)}, \tag{14}$$

где $G_i^{(s)} = B(x_i^{(s)}, 1) \setminus F_i^{(s)}$, $\omega(r)$ — фиксированная функция класса $C^\infty(R^1)$, равная единице для $r \leqslant 1/2$, нулю при $r \geqslant 1$ и такая, что $0 \leqslant \omega(r) \leqslant 1$. Продолжим функцию $v_i^{(s)}(x, t, q)$ на $R^n \times R^1$, полагая ее равной нулю вне $B(x_i^{(s)}, 1) \times [-T, T]$ и $q\omega(-t/T)$ при $(x, t) \in F_i^{(s)} \times [-T, T]$.

Будем предполагать выполнение следующего условия:

C) существует непрерывная функция $c(x, t, q)$ такая, что для произвольного шара $B \subset Q_T$ имеет место равенство

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{(i,k) \in I_s(B)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{q} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, t, q)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, t, q)}{\partial x_j} dx dt =$$

$$= \iint\limits_B c(x,t,q)\,dxdt,\quad Q_{i,k}^{(s)} = B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}] \tag{15}$$

и предел в (15) равномерен относительно q на каждом ограниченном интервале, $I_s(B)$ — множество пар (i,k), для которых $i \in I''(s)$, $k=1, \ldots$ $\ldots, K(i,s)$ и $(x_i^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}) \in B$.

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1 и условие С). Тогда функция $u_0(x,t)$ является решением задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$

$$= a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + c(x,t,f-u) = 0,\quad (x,t) \in Q_{T'}, \tag{16}$$

$$u(x,t) = f(x,t),\quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T'], \tag{17}$$

$$u(x,0) = 0,\quad x \in \Omega, \tag{18}$$

где $c(x,t,q)$ — функция, определенная в условии С).

2. Оценки вспомогательных функций. При построении усредненной граничной задачи основную роль играют поточечные и интегральные оценки функции $v_i^{(s)}(x,t,q)$, определенной выше как решение задачи (12)—(14).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A_1), A_2). Тогда существует постоянная K_1, зависящая только от n, ν, μ, T, такая, что при $(x,t) \in$ $\in Q_{i,T}^{(s)} = G_i^{(s)} \times [-T,T]$, $q_1, q_2 \in R^1$ справедлива оценка*

$$|v_i^{(s)}(x,t,q_1) - v_i^{(s)}(x,t,q_2)| \leqslant |q_1 - q_2| \min\{K_1 (d_i^{(s)}/|x - x_i^{(s)}|)^{n-2}, 1\}. \tag{19}$$

При $q_2 = 0$ оценка (19) доказана в [4]. Для оценки функции $\delta_i^{(s)}(x,t,q_1,q_2) = v_i^{(s)}(x,t,q_1) - v_i^{(s)}(x,t,q_2)$ достаточно заметить, что она является решением задачи вида (12)—(14) при тех же условиях относительно коэффициентов уравнения.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия A_1), A_2). Пусть h, ρ — произвольные положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $2d_i^{(s)} \leqslant \rho \leqslant 1$, $h \leqslant 1$ и $\zeta(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\zeta(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $t_0 \in [0,T]'$, $|d\zeta(t)/dt| \leqslant L/h$. Тогда с некоторыми зависящими лишь от n, ν, μ, T, L постоянными K_2, K_3 справедливы оценки*

$$\| [v_i^{(s)}(x,t,q_1) - v_i^{(s)}(x,t,q_2)]\, \omega(|x - x_i^{(s)}|/\rho)\, \zeta(t) \|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant K_2 |q_1 - q_2|^2 [d_i^{(s)}]^{n-2} (h + \rho d_i^{(s)}),$$

$$\int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{G_i^{(s)}} \omega^2\left(\frac{|x - x_i^{(s)}|}{\rho}\right) \zeta^2(t) \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{q_1} a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_1)}{\partial x}\right) \times\right.$$

$$\times \frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_1)}{\partial x_j} - \frac{1}{q_2} a_j\left(x,t,0,\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_2)}{\partial x}\right) \left.\frac{\partial v_i^{(s)}(x,t,q_2)}{\partial x_j} \right\} \times$$

$$\times dxdt \leqslant K_3 |q_1 - q_2|\, [d_i^{(s)}]^{n-2} (h + \rho d_i^{(s)}), \tag{20}$$

где $\omega(r)$ — функция, зафиксированная при постановке задачи (12)—(14), q_1, q_2 — произвольные вещественные числа.

Доказательство первого неравенства при $q_2 = 0$ полностью аналогично доказательству теоремы 4 в [4]. При $q_2 \neq 0$ достаточно воспользоваться замечанием относительно $\delta_i^{(s)}(x,t,q_1,q_2)$, связанным с доказательством теоремы 3. Второе неравенство в (20) следует из (19) и первого неравенства (20) после соответствующей подстановки в интегральное тождество.

Определим функцию $\omega_1(r)$ при $r\in R^1$ равенством $\omega_1(r)=\omega(r/2)[1-\omega(4r)]$, где $\omega(r)$ — та же функция, что и в (13).

Теорема 5. *Предположим, что выполнены условия A_1), A_2), и пусть h, ρ — произвольные положительные числа такие, что $4d_i^{(s)}\leqslant\rho$, $8\rho^2\leqslant h\leqslant 1/2$. Тогда с некоторой зависящей лишь от n, ν, μ, T, L постоянной K_4 справедлива оценка*

$$\|v_i^{(s)}(x,t,q)\omega_1(|x-x_i^{(s)}|/\rho)\zeta(t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leqslant$$
$$\leqslant K_4|q|^2h(d_i^{(s)}/\rho)^{n-2}[d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{21}$$

где $\zeta(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4.

Доказательство теоремы 5 см. в работе [4].

3. Обобщение асимптотического разложения. Предложим аналог асимптотического разложения работы [4], связанный с гладкой аппроксимацией предельной функции $u_0(x,t)$ и использованный далее при выводе усредненной задачи.

Пусть $u_m^{(0)}(x,t)$ — последовательность функций из $C^\infty(\bar{Q})$ такая, что

$$\begin{gathered} u_m^{(0)}(x,t)\equiv 0 \text{ при } t<0, \ |u_m^{(0)}(x,t)|\leqslant M \text{ при } (x,t)\in\bar{Q}, \\ \delta_m=\|u_m^{(0)}(x,t)-u_0(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\to 0 \text{ при } m\to\infty. \end{gathered} \tag{22}$$

Для заданной пары значений (i,s) таких, что $i\in I''(s)$, $s=1,2,\ldots$, в соответствии с введенным в предыдущем пункте разбиением отрезка $[0,T']$ точками $t_{i,k}^{(s)}$, $k=1,\ldots,K(i,s)$, определим при $t\in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $k=1,\ldots,K(i,s)$, $\bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)$, $l=0,1,\ldots$ $\ldots, K(i,s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носители функций $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $\bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)$ содержатся соответственно в интервалах $(t_{i,k-1}^{(s)}+\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,k}^{(s)}-\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$, $(t_{i,l}^{(s)}-2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2,\ t_{i,l}^{(s)}+2\lambda_s[\rho_i^{(s)}]^2)$; значения этих функций принадлежат сегменту $[0,1]$;

2) при $t\in[0,T']$ выполнено тождество

$$\sum_{k=1}^{K(i,s)} g_{i,k}^{(s)}(t)+\sum_{l=0}^{K(i,s)}\bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)\equiv 1; \tag{23}$$

3) при всех $i\in I''(s)$, $s=1,2,\ldots,k=1,\ldots,K(i,s)$, $l=0,1,\ldots,K(i,s)$, $t\in R^1$ справедливы неравенства

$$|dg_{i,k}^{(s)}(t)/dt|\leqslant 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2},\quad |d\bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)/dt|\leqslant 2\lambda_s^{-1}[\rho_i^{(s)}]^{-2}.$$

Для пары значений (i,s) таких, что $i\in I'(s)$, $s=1,2,\ldots$, разделим отрезок $[0,T']$ на $R(i,s)$ отрезков равной длины точками $\tilde{t}_{i,r}^{(s)}$, $r=0,1,\ldots,R(i,s)$, так, чтобы $\tilde{t}_{i,0}^{(s)}=0$, $\tilde{t}_{i,R(i,s)}^{(s)}=T'$, $[d_i^{(s)}]^2/2\leqslant\tilde{t}_{i,r}^{(s)}-\tilde{t}_{i,r-1}\leqslant[d_i^{(s)}]^2$. Определим при $t\in R^1$ бесконечно дифференцируемые функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$, $r=0,1,\ldots,R(i,s)$, удовлетворяющие условиям:

1) носитель функции $\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)$ содержится в интервале $(\tilde{t}_{i,r}^{(s)}-[d_i^{(s)}]^2,\ \tilde{t}_{i,r}^{(s)}+[d_i^{(s)}]^2)$, значения этой функции принадлежат отрезку $[0,1]$;

2) при $t\in[0,T']$ выполняется тождество $\sum_{r=0}^{R(i,s)}\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\equiv 1$;

3) при $i\in I'(s)$, $s=1,2,\ldots,r=0,1,\ldots,R(i,s)$, $t\in R^1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{d\tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)}{dt}\right|\leqslant 2[d_i^{(s)}]^{-2}.$$

Определим еще срезывающие функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, $i=1,\ldots,I(s)$, $\psi_i^{(s)}(x)$, $i\in I''(s)$, $s=1,2,\ldots$, равенствами $\varphi_i^{(s)}(x)=\omega(|x-x_i^{(s)}|/(2\rho_i^{(s)}))$, $\psi_i^{(s)}(x)=\omega(|x-x_i^{(s)}|/(2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}))$, где $\omega(r)$ — такая же функция, что и в (12).

Обозначим через $Q_{i,k}^{(s)}$, $\bar{Q}_{i,l}^{(s)}$, $\tilde{Q}_{i,r}^{(s)}$ соответственно цилиндры $B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)})$, $B(x_i^{(s)}, 2\sqrt{\lambda_s}\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,l}^{(s)} - 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2, t_{i,l}^{(s)} + 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2]$, $B(x_i^{(s)}, 2d_i^{(s)}) \times [\tilde{t}_{i,r}^{(s)} - 2(d_i^{(s)})^2, \tilde{t}_{i,r}^{(s)} + 2(d_i^{(s)})^2]$. И пусть для произвольного цилиндра Q' и интегрируемой функции $g(x, t)$

$$M[g, Q'] = \frac{1}{\operatorname{mes} Q'} \iint_{Q'} g(x, t)\, dx\, dt$$

— среднее значение $g(x, t)$ по Q'.

Определим $u_{ikm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, Q_{i,k}^{(s)}]$, $\bar{u}_{ilm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, \bar{Q}_{i,l}^{(s)}]$, $\tilde{u}_{irm}^{(s)} = M[u_m^{(0)}, \tilde{Q}_{i,r}^{(s)}]$, $f_{ik}^{(s)} = M[f, Q_{i,k}^{(s)}]$, $\bar{f}_{il}^{(s)} = M[f, \bar{Q}_{i,l}^{(s)}]$, $\tilde{f}_{ir}^{(s)} = M[f, \tilde{Q}_{i,r}^{(s)}]$, где $\{u_m^{(0)}(x, t)\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (22), $f(x, t)$ — функция из граничного условия (2).

Введенные обозначения позволяют определить следующий аналог асимптотического разложения:

$$u_s(x, t) = u_m^{(0)}(x, t) + r_{sm}(x, t) + \sum_{j=1}^{5} r_{sm}^{(j)}(x, t) + w_{sm}(x, t), \tag{24}$$

где

$$r_{sm}(x, t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x, t, f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)})\, g_{i,k}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(1)}(x, t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} v_i^{(s)}(x, t, \tilde{f}_{ir}^{(s)} - \tilde{u}_{irm}^{(s)})\, \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(2)}(x, t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} v_i^{(s)}(x, t, \bar{f}_{il}^{(s)} - \bar{u}_{ilm}^{(s)})\, \bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)\, \psi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(3)}(x, t) = \sum_{i \in I'(s)} \sum_{r=0}^{R(i,s)} \{[\tilde{u}_{irm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x, t)] + [f(x, t) - \tilde{f}_{ir}^{(s)}]\}\, \tilde{g}_{i,r}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(4)}(x, t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \{[u_{ikm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x, t)] + [f(x, t) - f_{ik}^{(s)}]\}\, g_{i,k}^{(s)}(t)\, \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_{sm}^{(5)}(x, t) = \sum_{i \in I''(s)} \sum_{l=0}^{K(i,s)} \{[\bar{u}_{ilm}^{(s)} - u_m^{(0)}(x, t)] + [f(x, t) - \bar{f}_{il}^{(s)}]\}\, \bar{g}_{i,l}^{(s)}(t)\, \psi_i^{(s)}(x).$$

Здесь $v_i^{(s)}(x, t, q)$ — определенное выше решение задачи (12)—(14); $w_{sm}(x, t)$ — остаточный член разложения, определенного равенством (24).

Изучение поведения членов разложения (24) проводится аналогично работе [4], а отличия, вызванные заменой $u_0(x, t)$ на $u_m^{(0)}(x, t)$, возникают только при оценке $w_{sm}(x, t)$.

В дальнейшем через $\gamma_s^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, обозначаем числовые последовательности, стремящиеся к нулю при $s \to \infty$, через C_j, $j = 1, 2, \ldots$, — постоянные, зависящие лишь от n, ν, μ, T, N, M, C_0, $\operatorname{mes}\Omega$.

Лемма 1. *Предположим выполнение условий A_1), A_2), B_2), B_2), F). Тогда при $m = 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$ имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{5} \{ \| r_{sm}^{(j)}(x, t) \|_{V_2(Q_T)} + \| r_{sm}^{(j)}(x, t) \|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \} \leqslant \gamma_s^{(1)}, \tag{25}$$

$$\| r_{sm}(x, t) \|_{V_2(Q_T)} + \| r_{sm}(x, t) \|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant C_1, \tag{26}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in R^1} \int_{\Omega} |r_{sm}(x, t)|^2 dx + \iint_{Q} \left| \frac{\partial r_{sm}(x, t)}{\partial x} \right|^p dx\, dt + \tag{27}$$

$$+\operatorname*{ess\,sup}_{h>0}\iint\limits_{Q}\left|\frac{r_{sm}(x,t+h)-r_{sm}(x,t)}{\sqrt{h}}\right|^{p}dxdt\leqslant\gamma_s^{(2)}$$

для $p\in(1,2)$.

Доказательство аналогично доказательству лемм 3, 4, 6 в [4].

Далее, $\eta(t)$ — произвольная функция из $C^1(R^1)$ такая, что

$$0\leqslant\eta(t)\leqslant1,\ |d\eta(t)/dt|\leqslant2 \text{ при } t\in R^1,\qquad(28)$$

$$\eta(t)\equiv0 \text{ при } t\notin[-T,T'].$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* A_1), A_2), B_1), B_2), F). *Тогда для определенного равенством (24) остаточного члена разложения справедлива оценка*

$$\|w_{sm}(x,t)\eta(t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leqslant C_2\{\gamma_s^{(3)}+\delta_m^{1/2}\},\qquad(29)$$

где $\eta(t)$ *— функция из* $C^1(R^1)$, *удовлетворяющая условиям (28).*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 в [4]. Отметим только, что в доказательстве леммы 9 из [4] нужно полагать $\psi_s(x,t)\equiv\psi_s^{(1)}(x,t)$.

4. Разложение, соответствующее пробной функции. Пусть $h(x,t)$ — произвольная функция класса $C_0^\infty(Q)$ и определим при $s=1,2,\ldots$, $m=1,2,\ldots$

$$h_{sm}(x,t)=h(x,t)-\rho_{sm}^{(1)}(x,t)-\rho_{sm}^{(2)}(x,t)-\sum_{j=1}^{5}\rho_s^{(3,j)}(x,t),\qquad(30)$$

где

$$\rho_{sm}^{(1)}(x,t)=\sum_{(i,k)\in J'_{sm}}v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)})\,\frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}}\,g_{i,k}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_{sm}^{(2)}(x,t)=\sum_{(i,k)\in J''_{sm}}v_i^{(s)}(x,t,1)\,h_{ik}^{(s)}g_{i,k}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,1)}(x,t)=\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)}v_i^{(s)}(x,t,1)\,\tilde h_{ir}^{(s)}\tilde g_{i,r}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,2)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{l=0}^{K(i,s)}v_i^{(s)}(x,t,1)\,\bar h_{il}^{(s)}\bar g_{i,l}^{(s)}(t)\,\psi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,3)}(x,t)=\sum_{i\in I'(s)}\sum_{r=0}^{R(i,s)}[h(x,t)-\tilde h_{ir}^{(s)}]\,\tilde g_{i,r}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,4)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{k=1}^{K(i,s)}[h(x,t)-h_{ik}^{(s)}]\,g_{i,k}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_s^{(3,5)}(x,t)=\sum_{i\in I''(s)}\sum_{l=0}^{K(i,s)}[h(x,t)-\bar h_{il}^{(s)}]\,\bar g_{il}^{(s)}(t)\,\psi_i^{(s)}(x).$$

Здесь используются введенные выше обозначения для множеств индексов, функций и средних значений. Кроме того, $h_{ik}^{(s)}=M[h,Q_{i,k}^{(s)}]$, $\bar h_{il}^{(s)}=M[h,\bar Q_{i,l}^{(s)}]$, $\tilde h_{ir}^{(s)}=M[h,\tilde Q_{i,r}^{(s)}]$ и $J'_{sm}=\{(i,k):i\in I''(s),k=1,\ldots,K(i,s):|f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}|\geqslant d_i^{(s)}\}$, $J''_{sm}=\{(i,k):i\in I''(s),\ k=1,\ldots,K(i,s):|f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)}|<d_i^{(s)}\}$.

Далее, как и в предыдущем пункте, через C_j, $\gamma_s^{(j)}$ обозначим соответственно постоянные, зависящие лишь от известных параметров, и последовательности, стремящиеся к нулю при $s\to\infty$.

Лемма 2. *При выполнении условий* A_1), A_2), B_1), B_2) *справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{2} \|\rho_{sm}^{(j)}(x, t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant C_3 \|h\|_{C(Q)}. \tag{31}$$

Доказательство. Из теоремы 4 имеем

$$\|v_i^{(s)}(x, t, q) g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant C_4 |q|^2 [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2} \tag{32}$$

при произвольном $q \in R^1$. Отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{2} \|\rho_{sm}^{(j)}(x, t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant C_5 \|h\|^2_{C(Q)} \sum_{i \in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-2}$$

и неравенство (31) следует из (11).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия A_1), A_2), B_1), B_2). Тогда для любого $p \in (1, 2)$ при $j=1, 2$ имеют место оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in R^1} \int_\Omega |\rho_{sm}^{(j)}(x, t)|^2 dx \leqslant \gamma_s^{(4)} \|h\|^2_{C(Q)},$$

$$\iint_Q \left| \frac{\partial \rho_{sm}^{(j)}(x, t)}{\partial x} \right|^p dx dt + \operatorname*{ess\,sup}_{\tau > 0} \iint_Q \left| \frac{\rho_{sm}^{(j)}(x, t+\tau) - \rho_{sm}^{(j)}(x, t)}{\sqrt{\tau}} \right|^p dx dt \leqslant [\gamma_s^{(4)}]^{2-p} \|h\|^p_{C(Q)}. \tag{33}$$

Доказательство. Оценим вначале второй интеграл в (33). Из определения функций $\varphi_i^{(s)}(x)$ и неравенства Гёльдера имеем

$$\iint_Q \left| \frac{\partial \rho_{sm}^{(j)}(x, t)}{\partial x} \right|^p dx dt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \Big\{ \sum_{i \in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^n \Big\}^{1-p/2} \left\{ \iint_Q \left| \frac{\partial \rho_{sm}^{(j)}(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx dt \right\}^{p/2},$$

далее нужно воспользоваться (11) и (31). Аналогично оценивается третий интеграл в (33).

Для получения первой оценки в (33) воспользуемся неравенством

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in R^1} \int_\Omega |v_i^{(s)}(x, t, q) g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x)|^2 dx \leqslant C_7 |q|^2 [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2}, \tag{34}$$

следующим из оценки (19). Имеем, например, при $j=2$

$$\int_\Omega |\rho_{sm}^{(2)}(x, t)|^2 dx \leqslant C_8 \|h\|^2_{C(Q)} \sum_{i \in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \int_\Omega |v_i^{(s)}(x, t, 1) g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \|h\|^2_{C(Q)} \sum_{i \in I''(s)} [\rho_i^{(s)}]^2 [d_i^{(s)}]^{n-2},$$

далее правая часть стремится к нулю в силу (11). При получении последнего неравенства воспользовались тем, что при каждом $t_0 \in R^1$ и $i \in I''(s)$ среди чисел $g_{i,1}^{(s)}(t_0), \ldots, g_{i,K(i,s)}^{(s)}(t_0)$ — не более одного отличного от нуля. Таким же точно образом доказывается первая оценка в (33) при $j=1$.

Лемма 4. *При выполнении условий A_1), A_2), B_1), B_2) имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{5} \|\rho_s^{(3,j)}(x, t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)} \leqslant \gamma_s^{(5)} \|h\|_{C(Q)}. \tag{35}$$

Для доказательства достаточно заметить, что при $j=1, \ldots, 5$ представления функций $\rho_s^{(3,j)}(x, t)$ аналогичны представлениям функций $r_{sm}^{(j)}(x, t)$ из разложения (24). Так что доказательство (35) полностью совпадает с доказательством (25).

5. Вывод предельного уравнения. Из лемм 2—4, разложения (36), определения вспомогательных функций $v_i^{(s)}(x, t, q)$ и срезывающих функций $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $\varphi_i^{(s)}(x)$ непосредственно следует

$$h_{sm}(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1/2}(Q_T^{(s)}) \cap W_2^{1,1/2}(Q), \quad s, m=1, 2, \dots, \tag{36}$$

что делает возможным подстановку этой функции вместо $\psi(x, t)$ в интегральное тождество (9). После такой подстановки получаем

$$J_s[h]-J_s[\rho_{sm}^{(1)}]-J_s[\rho_{sm}^{(2)}]-\sum_{j=1}^{5} J_s[\rho_s^{(3,j)}]=0, \tag{37}$$

где $J_s[\psi]$ понимается в соответствии с равенством (9).

Из теоремы 1 следует возможность предельного перехода при $s\to\infty$ в $J_s[h]$, так что имеем

$$J_s[h]=\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega}\alpha[F(u_0\eta)](x, \alpha)\overline{[Fh](x, \alpha)}dxd\alpha+$$
$$+\iint_{Q_T}\left\{u_0(x, t)h(x, t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial h(x, t)}{\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+a_0\left(x, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\eta(t)h(x, t)\right\}dxdt+\gamma_s^{(6)}\|h\|_{C^1(Q)}. \tag{38}$$

Будем считать далее, что $|d\eta(t)/dt|\leqslant 2$ при $t\in R^1$.

Так же просто можно совершить предельный переход в $J_s[\rho_s^{(3,j)}]$, $j=1, \dots, 5$. Используя теорему 1 и лемму 4, получаем

$$\sum_{j=1}^{5}|J_s[\rho_s^{(3,j)}]|\leqslant\gamma_s^{(7)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{39}$$

Рассмотрим

$$J_s[\rho_{sm}^{(1)}]=J_{sm}^{(1)}+J_{sm}^{(2)}+J_{sm}^{(3)}, \tag{40}$$
$$J_{sm}^{(1)}=\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_s\eta)](x, \alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x, \alpha)}dxd\alpha,$$
$$J_{sm}^{(2)}=\iint_{Q_T^{(s)}}\left\{u_s(x, t)\frac{d\eta(t)}{dt}-a_0\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\right\}\rho_{sm}^{(1)}(x, t)dxdt,$$
$$J_{sm}^{(3)}=-\iint_{Q_T^{(s)}}\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial\rho_{sm}^{(1)}(x, t)}{\partial x_j}dxdt.$$

Из теоремы 1 и леммы 3 следует оценка

$$|J_{sm}^{(2)}|\leqslant\gamma_s^{(8)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{41}$$

Оценим далее $J_{sm}^{(1)}$, используя разложение (24):

$$J_{sm}^{(1)}=\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(u_m^{(0)}\eta)](x, \alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x, \alpha)}dxd\alpha+$$
$$+\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}}\alpha[F(r_{sm}\eta)](x, \alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x, \alpha)}dxd\alpha+$$
$$+\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega^{(s)}}\alpha\Big[F\Big(\sum_{j=1}^{5}r_{sm}^{(j)}+w_{sm}\Big)\eta\Big](x, \alpha)\overline{[F\rho_{sm}^{(1)}](x, \alpha)}dxd\alpha. \tag{42}$$

Для первого слагаемого правой части (42), обозначаемого далее через $J_{sm}^{(1,1)}$, используя (22), (31), (33), имеем оценку

$$|J_{sm}^{(1,1)}| \leqslant C_{10}\{\delta_m + \tau_{sm}\} \|h\|_{C(Q)}, \tag{43}$$

где τ_{sm} — ограниченная последовательность такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_{sm} = 0$ при каждом m.

Для третьего слагаемого правой части (42), обозначаемого через $J_{sm}^{(1,3)}$, оценка

$$|J_{sm}^{(1,3)}| \leqslant \gamma_s^{(9)} \|h\|_{C(Q)} \tag{44}$$

следует из (25), (29), (31).

Далее оценим второе слагаемое в правой части (42). Вводя усреднение по t и используя равенство Парсеваля, имеем

$$J_{sm}^{(1,2)} = \lim_{\tau\to 0} \left\{ \sqrt{-1} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \alpha [F[r_{sm}]_{(\tau)}\eta](x, \alpha) \overline{[F[\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)}](x, \alpha)} dx d\alpha \right\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} \frac{\partial}{\partial t} \{ [r_{sm}]_{(\tau)} \eta(t) \} [\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)} dx dt; \tag{45}$$

здесь $[\rho_{sm}^{(1)}]_{(\tau)} = \dfrac{1}{\tau} \int\limits_t^{t+\tau} \rho_{sm}^{(1)}(x, \theta) d\theta$ и аналогично понимается $[r_{sm}]_{(\tau)}$.

Продолжая равенство (45), получим из (24), (30)

$$J_{sm}^{(1,2)} = \frac{1}{2} \sum_{(i,k)\in J'_{sm}} \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \int\limits_{R^1} \int\limits_{\Omega^{(s)}} [v_i^{(s)}(x, t, f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)})]^2 \times$$

$$\times [g_{i,k}^{(s)}(t) \varphi_i^{(s)}(x)]^2 \frac{d\eta(t)}{dt} dx dt.$$

Оценивая далее на основании неравенства (19), имеем в силу (11)

$$|J_{sm}^{(1,2)}| \leqslant C_{11} \sum_{i\in I''(s)} [d_i^{(s)}]^{n-1} \rho_i^{(s)} \|h\|_{C(Q)} \leqslant \gamma_s^{(10)} \|h\|_{C(Q)}.$$

Тем самым получаем оценку

$$|J_{sm}^{(1)}| \leqslant C_{12}\{\delta_m + \gamma_s^{(11)} + \tau_{sm}\} \|h\|_{C(Q)}. \tag{46}$$

Займемся сейчас изучением поведения $J_{sm}^{(3)}$, представляя $J_{sm}^{(3)}$ в виде

$$J_{sm}^{(3)} = J_{sm}^{(3,1)} + J_{sm}^{(3,2)} + J_{sm}^{(3,3)} + J_{sm}^{(3,4)}, \tag{47}$$

$$J_{sm}^{(3,1)} = -\iint\limits_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial (u_0 + r_{sm})}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial \rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j} dx dt,$$

$$J_{sm}^{(3,2)} = -\iint\limits_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial (u_0 + r_{sm})}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial \rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j} dx dt,$$

$$J_{sm}^{(3,3)} = -\iint\limits_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x, t, u_s, \frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right) - a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right)\right] \frac{\partial \rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j} dx dt,$$

$$J_{sm}^{(3,4)} = -\iint\limits_{Q_T^{(s)}} \eta(t) \sum_{j=1}^n a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_{sm}^{(1)}}{\partial x_j} dx dt.$$

Используя условие A_2), неравенства (25), (29), (31), получаем оценку

$$|J_{sm}^{(3,1)}| \leqslant C_{13}\{\delta_m + \gamma_s^{(12)}\}\|h\|_{C(Q)}. \tag{48}$$

Из представления для $\rho_{sm}^{(1)}(x, t)$ и второго равенства в (11) следует

$$|J_{sm}^{(3,2)}| + |J_{sm}^{(3,3)}| \leqslant \gamma_s^{(13)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{49}$$

Преобразуем последнее слагаемое в правой части (47), подставляя значения $r_{sm}(x, t)$, $\rho_{sm}^{(1)}(x, t)$:

$$J_{sm}^{(3,4)} = J_{sm}^{(3,5)} + J_{sm}^{(3,6)} + J_{sm}^{(3,7)}, \tag{50}$$

$$J_{sm}^{(3,5)} = -\sum_{i\in I''(s)} \sum_{k=1}^{K(i,s)} \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j} \eta(t)\,dx\,dt,$$

$$J_{sm}^{(3,6)} = \sum_{(i,k)\in J'_{sm}} \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} \left\{a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial}{\partial x}\,[v_{ikm}^{(s)} g_{i,k}^{(s)} \varphi_i^{(s)}]\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\,[v_{ikm}^{(s)} g_{i,k}^{(s)} \varphi_i^{(s)}]\right\} \eta(t)\,dx\,dt,$$

$$J_{sm}^{(3,7)} = \sum_{(i,k)\in J''_{sm}} \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \iint_{Q_{ik}^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j} \eta(t)\,dx\,dt.$$

Здесь, как и в (15), $Q_{i,k}^{(s)} = B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}]$, $v_{ikm}^{(s)} = v_i^{(s)}(x, t, f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)})$. Вспоминая определение функций $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $\varphi_i^{(s)}(x)$ и используя оценки (19)—(21), получим

$$|J_{sm}^{(3,6)}| \leqslant \sum_{(i,k)\in J'_{sm}} \frac{|h_{ik}^{(s)}|}{|f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}|} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \left|\frac{\partial}{\partial x}\,[v_{ikm}^{(s)} \varphi_i^{(s)}]\right|^2 \{\chi_{ik}^{(s,1)}(x, t) +$$

$$+ \chi_{ik}^{(s,2)}(x, t)\}\,dx\,dt \leqslant C_{14} \sum_{(i,k)\in J'_{sm}} [d_i^{(s)}]^{n-2} \{\lambda_s [\rho_i^{(s)}]^2 + d_i^{(s)} \rho_i^{(s)} +$$

$$+ [\rho_i^{(s)}]^2 \left[\frac{d_i^{(s)}}{\rho_i^{(s)}}\right]^{n-2}\right\} \|h\|_{C(Q)} \leqslant C_{15} \|h\|_{C(Q)} \sum_{i\in I''(s)} \{\lambda_s + \lambda_s^{n-2}\} [d_i^{(s)}]^{n-2}.$$

Здесь $\chi_{ik}^{(s,1)}(x, t)$, $\chi_{ik}^{(s,2)}(x, t)$ — соответственно характеристические функции множеств $B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \times \{[t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k-1}^{(s)} + 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2] \cup [t_{i,k}^{(s)} - 2\lambda_s(\rho_i^{(s)})^2, t_{i,k}^{(s)}]\}$, $\{B(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}) \setminus B(x_i^{(s)}, \rho_i^{(s)})\} \times [t_{i,k-1}^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}]$. Из неравенства (11) и определения λ_s следует оценка

$$|J_{sm}^{(3,6)}| \leqslant \gamma_s^{(14)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{51}$$

Таким же образом оценивается $J_{sm}^{(3,7)}$:

$$|J_{sm}^{(3,7)}| \leqslant \gamma_s^{(15)}\|h\|_{C(Q)}. \tag{52}$$

Достаточно воспользоваться неравенством (20) и определением множества индексов J''_{sm}.

Осталось установить поведение $J_{sm}^{(3,5)}$ при $s, m \to \infty$. Для этого понадобятся дополнительные построения. Зафиксируем число m и определим $d = d(m) > 0$ так, чтобы колебание каждой из функций $u_m^{(0)}(x, t)$, $f(x, t)$, $h(x, t)$, $\eta(t)$ не превосходило $1/m$ на любом множестве $E \subset Q_T$, диаметр которого меньше $2d$. Представим $\bar{Q}_T$ в виде объединения непересекающихся подмножеств E_l, $l = 1, 2, \ldots, L(m)$, с кусочно-гладкими границами так, чтобы диаметр каждого из множеств E_l был меньше d. Выберем $s_1 = s_1(m)$ так, чтобы при $s \geqslant s_1$ для $i \in I''(s)$, $k = 1, \ldots, K(i, s)$ диаметр множества $Q_{i,k}^{(s)}$ был меньше d.

Обозначим через $I_s(E_l)$ множество пар (i, k) таких, что $i \in I''(s)$, $k=1, \dots, K(i, s)$ и $(x_i^{(s)}, t_{i,k}^{(s)}) \in E_l$. Определим средние значения

$$u_{lm}^{(0)} = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} u_m^{(0)}(x, t)\, dxdt,$$

$$f_l = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} f(x, t)\, dxdt, \quad h_l = \frac{1}{\operatorname{mes} E_l} \iint_{E_l} h(x, t)\, dxdt. \tag{53}$$

Представим $J_{sm}^{(3,5)}$ в следующем виде:

$$J_{sm}^{(3,5)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \frac{h_l \eta(\theta_l^{(s)})}{f_l - u_{lm}^{(0)}} \times$$

$$\times \sum_{(i,k) \in I_s(E_l)} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j}\, dxdt + R_{sm}^{(1)},$$

где $v_{ilm}^{(s)} = v_i^{(s)}(x, t, f_l - u_{lm}^{(0)})$ и

$$R_{sm}^{(1)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \sum_{(i,k) \in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{h_{ik}^{(s)}}{f_{ik}^{(s)} - u_{ikm}^{(s)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \eta(t) a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_{ikm}^{(s)}}{\partial x_j}\, dxdt - \frac{h_l}{f_l - u_{lm}^{(0)}} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} \eta(t) a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j}\, dxdt \right\},$$

где $\theta_l^{(s)}$ — некоторая точка из интервала $[0, T]$.

Используя неравенства (20), (21), получим при $s \geqslant s_1$ оценку

$$|R_{sm}^{(1)}| \leqslant C_{16}\{1/m + \gamma_s^{(16)}\} \|h\|_{C(Q)}. \tag{54}$$

Выберем, далее, по зафиксированному разбиению $\{E_l\}$ цилиндра Q_T число $s_2 = s_2(m)$ так, чтобы для $|q| \leqslant M$ при $s \geqslant s_2$, $l=1, \dots, L(m)$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{(i,k) \in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, t, q)}{\partial x}\right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, t, q)}{\partial x_j}\, dxdt - \right.$$

$$\left. - \iint_{E_l} c(x, t, q)\, dxdt \right| < \frac{1}{mL(m)} \tag{55}$$

(это можно обеспечить в силу предполагаемого сейчас условия C)).

Представим $J_{sm}^{(3,5)}$ в виде

$$J_{sm}^{(3,5)} = -\iint_{Q_T} c(x, t, f(x, t) - u_0(x, t)) \eta(t) h(x, t)\, dxdt +$$

$$+ R_{sm}^{(1)} + R_m^{(2)} + R_{sm}^{(3)} + R_{sm}^{(4)}, \tag{56}$$

$$R_m^{(2)} = -\iint_{Q_T} [c(x, t, f(x, t) - u_m^{(0)}(x, t)) - c(x, t, f(x, t) -$$

$$- u_0(x, t))] \eta(t) h(x, t)\, dxdt,$$

$$R_{sm}^{(3)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \left\{ \frac{h_l \eta(\theta_l^{(s)})}{f_l - u_{lm}^{(0)}} \sum_{(i,k) \in I_s(E_l)} \sum_{j=1}^{n} \iint_{Q_{i,k}^{(s)}} a_j\left(x, t, 0, \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial v_{ilm}^{(s)}}{\partial x_j} dxdt - h_l \eta(\theta_l^{(s)}) \iint_{E_l} c(x, t, f_l - u_{lm}^{(0)})\, dxdt \right\},$$

$$R_{sm}^{(4)} = -\sum_{l=1}^{L(m)} \{h_l \eta(\theta_l^{(s)}) \iint_{E_l} c(x, t, f_l - u_{lm}^{(0)})\, dxdt -$$

$$-\iint_{E_l} c(x,t,f(x,t)-u_m^{(0)}(x,t))\eta(t)h(x,t)\,dxdt\Big\}.$$

Из (55) следует оценка

$$|R_{sm}^{(3)}|\leqslant(1/m)C_{17}\|h\|_{C(Q)} \text{ при } s>s_2(m). \tag{57}$$

Из непрерывности функции $c(x,t,q)$ получаем

$$|R_m^{(2)}|+|R_{sm}^{(4)}|\leqslant\nu_m\|h\|_{C(Q)}, \tag{58}$$

где $\nu_m\to0$ при $m\to\infty$.

Окончательно из (40), (41), (46)—(52), (56)—(58) имеем

$$|J_s[\rho_{sm}^{(1)}]+\iint_{Q_T} c(x,t,f(x,t)-u_0(x,t))\eta(t)h(x,t)\,dxdt|\leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\{\gamma_s^{(17)}+1/m+\nu_m+\delta_m+\tau_{sm}\}\|h\|_{C(Q)}. \tag{59}$$

Для оценки $J_s[\rho_{sm}^{(2)}]$ достаточно провести рассуждения, подобные тем, которые велись при оценке $J_s[\rho_{sm}^{(1)}]$. Так, нужно записать представления вида (40), (42), (47), заменяя $\rho_{sm}^{(1)}(x,t)$ на $\rho_{sm}^{(2)}(x,t)$. Эта замена не изменяет получение оценок возникающих интегралов, аналогичных $J_{sm}^{(2)}$, $J_{sm}^{(1,1)}$, $J_{sm}^{(1,3)}$, $J_{sm}^{(3,1)}$, $J_{sm}^{(3,2)}$, $J_{sm}^{(3,3)}$. Что же касается оценки выражений типа $J_{sm}^{(1,2)}$, $J_{sm}^{(3,4)}$, то достаточно заметить, что соответствующие интегралы сохраняют свое значение при замене $r_{sm}(x,t)$ на

$$r''_{sm}(x,t)=\sum_{(i,k)\in J''_{sm}} v_i^{(s)}(x,t,f_{ik}^{(s)}-u_{ikm}^{(s)})\,g_{i,k}^{(s)}(t)\,\varphi_i^{(s)}(x).$$

Например,

$$\iint_{Q_T^{(s)}}\eta(t)\sum_{j=1}^n a_j\Big(x,t,0,\frac{\partial r_{sm}}{\partial x}\Big)\frac{\partial\rho_{sm}^{(2)}}{\partial x_j}\,dxdt=$$

$$=\iint_{Q_T^{(s)}}\eta(t)\sum_{j=1}^n a_j\Big(x,t,0,\frac{\partial r''_{sm}}{\partial x}\Big)\frac{\partial\rho_{sm}^{(2)}}{\partial x_j}\,dxdt, \tag{60}$$

что следует из представлений $r_{sm}(x,t)$, $\rho_{sm}^{(2)}(x,t)$ и свойств функций $g_{i,k}^{(s)}(t)$, $\varphi_i^{(s)}(x)$.

Наконец, получим оценку

$$\|r''_{sm}(x,t)\|_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leqslant\gamma_s^{(18)}. \tag{61}$$

В самом деле, из неравенства (32) и определения множества J''_{sm} имеем

$$\|r''_{sm}(x,t)\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q)}\leqslant C_{19}\sum_{(i,k)\in J''_{sm}}[\rho_i^{(s)}]^2[d_i^{(s)}]^n\leqslant C_{20}\sum_{i\in I''(s)}[d_i^{(s)}]^n,$$

далее неравенство (61) следует из (11).

Из (60), (61) и леммы 2 получаем, что левая часть (60) оценивается через $\gamma_s^{(19)}\|h\|_{C(Q)}$. Подобным же образом оценивается интеграл, получаемый из второго интеграла правой части (42) заменой $\rho_{sm}^{(1)}$ на $\rho_{sm}^{(2)}$.

Окончательно указанные рассуждения приводят к оценке

$$|J_s[\rho_{sm}^{(2)}]|\leqslant C_{21}\{\gamma_s^{(19)}+\delta_m+\tau_{sm}^{(1)}\}\|h\|_{C(Q)}, \tag{62}$$

где $\tau_{sm}^{(1)}$ обладает такими же свойствами, как τ_{sm} в (43).

Используя равенства (37), (38), оценки (39), (59), (62), имеем

$$|\sqrt{-1}\int_{R^1}\int_{\Omega}\alpha[F(u_0\eta)](x,\alpha)\overline{[Fh](x,\alpha)}\,dxd\alpha+$$

$$+\iint_{Q_T}\left\{u_0(x,t)h(x,t)\frac{d\eta(t)}{dt}-\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x,t,u_0,\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\eta(t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x_j}+\right.$$

$$+[a_0(x,t,u_0,\partial u_0/\partial x)+c(x,t,f-u_0)]\eta(t)h(x,t)dxdt|\leqslant$$

$$\leqslant C_{22}\{\gamma_s^{(20)}+1/m+\delta_m+\tau_{sm}+\tau_{sm}^{(1)}+\nu_m\}\|h\|_{C(Q)}. \qquad (63)$$

Правая часть (63) может быть сколь угодно малой, если вначале сделать достаточно малым значение $1/m+\delta_m+\nu_m$ за счет выбора m, а затем при фиксированном m обеспечить малость $\gamma_s^{(20)}+\tau_{sm}+\tau_{sm}^{(1)}$ путем выбора s. Так как левая часть (63) от s, m не зависит, то получаем, что левая часть равна нулю, т. е. $u_0(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству, соответствующему задаче (16)—(18), что и завершает доказательство теоремы 2.

Литература

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, 1974.
2. Skrypnik I. V. Nonlinear elliptic boundary value problems. Leipzig, 1986.
3. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М., 1990.
4. Скрыпник И. В. // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 11. С. 1542—1566.
5. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
6. Скрыпник И. В. Нелинейные граничные задачи. 1991. Вып. 3. С. 72—86.

Институт прикладной математики и механики Национальной АН Украины

Поступила в редакцию 10 октября 1994 г.