М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом,
Алгебра и анализ, 1998, том 10, выпуск 4, 1–36

https://www.mathnet.ru/aa1018

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 4

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ДВУМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА С РАЗРЫВНЫМ ВЕКТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина

Рассматривается двумерный периодический гамильтониан M с магнитным потенциалом $\mathbf{A}$ и электрическим потенциалом V. Пусть Ω — ячейка решетки периодов и $\mathbf{A} \in L_r(\Omega)$, $r > 2$, $V \in L_\rho(\Omega)$, $\rho > 1$. Доказывается, что спектр M абсолютно непрерывен. Ранее аналогичный результат был получен авторами для непрерывного $\mathbf{A}$ и $V \in L_2(\Omega)$.

§0. Введение

Работа продолжает исследование авторов [БС], где магнитный потенциал предполагался непрерывным. Изложение ведется независимо от [БС]. В существенном мы следуем тому же плану, что и в [БС], но аналитические вопросы сейчас требуют значительно большего внимания.

Речь идет о **двумерном** магнитном гамильтониане

$$M = (i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Предполагается, что магнитный (векторный) потенциал $\mathbf{A}$ и электрический потенциал V — периодические с одинаковой решеткой периодов. Оператор M реализуется как самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Спектр M имеет *зонную*

Ключевые слова: периодический гамильтониан, магнитный потенциал, абсолютно непрерывный спектр.

Первый из авторов пользовался поддержкой гранта INTAS, проект 950414. Второй автор поддержан РФФИ, проект 98-01-01091а.

структуру. Задача состоит в том, чтобы *исключить наличие зон, вырождающихся в точку*. (Наличие вырожденных зон равносильно существованию у M бесконечно кратного собственного значения). *В отсутствие вырожденных зон спектр оператора M абсолютно непрерывен.* В [БС] авторы доказали отсутствие вырожденных зон при условии непрерывности $\mathbf{A}$ и при $V \in L_2(\Omega)$. При этом использовался содержательный подход Л. Томаса [T], реализованный им для периодического оператора Шредингера $-\Delta + V(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Требуемые схемой Томаса аналитические оценки для магнитного оператора получаются труднее. В [БС] в основу был положен двумерный оператор Паули с $\mathbf{A} \in C^1(\mathbb{R}^2)$; затем проводилась аппроксимация векторного потенциала. Недавно А. Соболев доказал (см. [So]) *отсутствие вырожденных зон для магнитного оператора вида* (0.1) *в любой размерности*. Его тонкая и непростая аналитическая конструкция — во многом иная, чем в [БС]. Она, однако, тоже опирается на схему Томаса. В [So] предполагается, что $\mathbf{A} \in C^{2d+3}(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 3$.

Здесь мы значительно уточняем результаты статьи [БС] для оператора (0.1) при $d = 2$. Цель — сделать допустимыми *разрывные потенциалы* $\mathbf{A}$. Пусть Ω — ячейка решетки периодов. Предполагается, что

$$\mathbf{A} \in L_r(\Omega), \quad r > 2; \qquad V \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 1. \tag{0.2}$$

При этих условиях (они, по-видимому, минимальны в L_p-шкале) *мы доказываем отсутствие вырожденных зон.* Это основной результат настоящей работы.

Схема Томаса требует вывода подходящих оценок для вспомогательного операторного семейства, зависящего от векторного параметра (квазиимпульса). Операторы семейства действуют в $L_2(\Omega)$ и определены на периодических функциях. Квазиимпульс считается комплексным. Оценки проводятся при большой мнимой части одной из координат квазиимпульса. Точная постановка задачи сформулирована в §1 и 2. Более подробно схема Томаса описана, например, в [БС]. Как и в [БС], мы начинаем с оценок для оператора Паули при $\mathbf{A} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, но теперь значительно их уточняем. Эти оценки получены в §3.

При условиях (0.2) оператор (0.1) приходится определять через соответствующую квадратичную форму. Однако при $r = 4$, $\rho = 2$ (и при условиях калибровки — см. (1.14)) оператор M самосопряжен на классе Соболева $H^2(\mathbb{R}^2)$. В этом случае наши построения значительно упрощаются; доказательство основного результата для $r = 4$, $\rho = 2$ выделено и изложено в §4. В последнем §6 рассмотрен общий случай условий (0.2). Предварительно в §5 подготовлен необходимый теоретико-операторный материал.

Ниже через c, C (обычно с индексами) обозначаются оценочные постоянные, через ω — оценочные функции. Интегралы без указания области интегрирования распространены по $\mathbb{R}^2$. Далее, $iD = \nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2) = (\partial_1, \partial_2)$. Через $\|\cdot\|_p$ обозначается норма в $L_p(\Omega)$. Классы Соболева обозначаются через $H^s(\mathbb{R}^2)$, $H^s(\Omega)$, $s = 1, 2$. Через $\widetilde{H}^s(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^s(\Omega)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Для замкнутого оператора M в гильбертовом пространстве $\rho(M)$ есть его резольвентное множество.

При ссылках на пункты из других параграфов применяется двойная нумерация.

§1. Определение магнитного гамильтониана. Формулировка основного результата

1. Периодический магнитный оператор. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ образуют базис решетки периодов в $\mathbb{R}^2$ и пусть

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2,\ 0 \leqslant t_j < 1,\ j = 1, 2\} \tag{1.1}$$

— элементарная ячейка решетки. Фиксируем ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы было $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1|$. Векторный (магнитный) потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2,$$

и электрический потенциал $V(\mathbf{x})$ вещественны и периодичны:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{a}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

$$V(\mathbf{x} + \mathbf{a}_j) = V(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что при некоторых r, ρ

$$\mathbf{A} \in L_r(\Omega), \quad r > 2, \tag{1.4}$$

$$V \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 1. \tag{1.5}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$m[u,u] = \int (|(D-\mathbf{A})u|^2 + V|u|^2)d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{1.6}$$

которую можно записать также в виде

$$m[u,u] = \int |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + w[u,u], \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{1.7}$$

$$w[u,u] = \int (-\mathbf{A}u\overline{Du} - Du\mathbf{A}\bar{u} + (|\mathbf{A}|^2 + V)|u|^2)d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.8}$$

Хорошо известна (и легко проверяется) оценка

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega |f(\mathbf{x})||u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_p \Big(\varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + c\varepsilon^{-(p'-1)} \int_\Omega |u|^2 d\mathbf{x}\Big), \\ u \in H^1(\Omega), \ p > 1, \ 0 < \varepsilon < 1, \ c = c(\Omega, p), \ p^{-1} + (p')^{-1} = 1. \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

Если функция f — периодическая, то сложением по ячейкам решетки получается оценка вида (1.9) уже с интегрированием по $\mathbb{R}^2$. Отсюда в силу (1.4), (1.5) следует, что форма (1.8) сильно подчинена форме

$$m_0[u,u] = \int |\nabla u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{1.10}$$

т.е. справедлива оценка

$$|w[u,u]| \leqslant \varepsilon m_0[u,u] + C(\varepsilon) \int |u|^2 d\mathbf{x}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \ u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.11}$$

Из (1.11) видно, что при условиях (1.4), (1.5) *форма* (1.7) *с областью определения*

$$\mathfrak{d}[m] = \mathfrak{d}[m_0] = H^1(\mathbb{R}^2) \tag{1.12}$$

полуограничена снизу и замкнута в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Форме (1.7), (1.12) отвечает (единственный) *самосопряженный в* $L_2(\mathbb{R}^2)$ *оператор*

$$M = M(\mathbf{A}, V), \tag{1.13}$$

который по определению есть *магнитный гамильтониан с потенциалами* **A** *и* V.

2. Калибровка. *Не уменьшая общности, можно подчинить векторный потенциал* $\mathbf{A}$ *условиям калибровки*

$$\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 = 0, \tag{1.14}$$

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{A} d\mathbf{x} = 0. \tag{1.15}$$

При этом условие (1.14) понимается в смысле теории распределений. Чтобы удовлетворить условиям (1.14), (1.15), не нарушая условия (1.4), надо несколько уточнить обычные формальные соображения. Положим в (1.6) $u = v\exp(i\Phi)$. Тогда форма (1.6) перейдет в форму того же вида, но с другим векторным потенциалом:

$$\int (|(D - \mathbf{A}')v|^2 + V|v|^2)d\mathbf{x}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{1.16}$$

где $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\Phi$. Новый векторный потенциал $\mathbf{A}'$ удовлетворяет (1.14), коль скоро Φ есть (слабое) *периодическое* решение уравнения

$$-\Delta\Phi = -\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Такое решение легко найти в виде ряда Фурье, причем в силу известной теоремы Марцинкевича (см. [М]) из (1.4) следует, что $\nabla\Phi \in L_r(\Omega)$. Таким образом, потенциал $\mathbf{A}'$ также удовлетворяет условию (1.4). Ясно, что операторы, отвечающие формам (1.6), (1.16), унитарно эквивалентны:

$$M' := M(\mathbf{A}', V) = \exp(-i\Phi)M(\mathbf{A}, V)\exp(i\Phi).$$

Спектральные свойства M и M' одинаковы, а потому с самого начала можно считать выполненным условие (1.14).

Аналогично можно добиться выполнения условия (1.15), если положить в (1.6) $u = v\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{A}$ перейдет в $\mathbf{A} - \mathbf{k}_0$, и достаточно положить $\mathbf{k}_0 = \int_\Omega \mathbf{A} d\mathbf{x}$.

Условие (1.14) позволяет записать форму (1.8) в виде

$$w[u,u] = \int (-2Du\mathbf{A}\bar{u} + (|\mathbf{A}|^2 + V)|u|^2)d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{1.17}$$

3. Формально выражению (1.17) отвечает дифференциальный оператор

$$W = -2\mathbf{A}D + |\mathbf{A}|^2 + V. \tag{1.18}$$

С другой стороны, форме (1.10) отвечает самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор

$$M_0 = -\Delta, \quad \operatorname{Dom} M_0 = H^2(\mathbb{R}^2). \tag{1.19}$$

Таким образом, $M(\mathbf{A}, V) = M_0 + W$, причем сумма понимается в смысле форм. Однако, если (1.4), (1.5) выполнены при $r = 4$, $\rho = 2$, сумму можно понимать в точном операторном смысле. Действительно, если

$$\mathbf{A} \in L_4(\Omega), \qquad V \in L_2(\Omega), \tag{1.20}$$

то, как нетрудно убедиться,

$$\int |Wu|^2 dx \leqslant \varepsilon \int |\Delta u|^2 dx + C(\varepsilon) \int |u|^2 dx, \quad 0 < \varepsilon < 1, \ u \in H^2(\mathbb{R}^2). \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что при условиях (1.20) оператор $M(\mathbf{A}, V)$ определяется равенством

$$M(\mathbf{A}, V)u = M_0 u + Wu, \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Dom} M(\mathbf{A}, V). \tag{1.22}$$

4. Основной результат работы составляет

Теорема 1.1. *Пусть потенциалы* $\mathbf{A}$, V *удовлетворяют условиям* (1.2)–(1.5), *а также условиям* (1.14), (1.15). *Пусть оператор* (1.13) *порожден формой* m, *определяемой равенствами* (1.7), (1.17). *Тогда этот оператор абсолютно непрерывен.*

При условиях (1.20) оператор M может быть определен прямо, как сумма операторов. Мы выделим соответствующий частный случай теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть потенциалы* $\mathbf{A}$, V *удовлетворяют условиям* (1.2), (1.3), (1.14), (1.15) *и* (1.20). *Пусть оператор* $M(\mathbf{A}, V)$ *определен равенствами* (1.18), (1.19), (1.22). *Тогда этот оператор абсолютно непрерывен.*

§2. Разложение в прямой интеграл. Схема Л. Томаса

1. Прямой интеграл. Ниже через $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ обозначается базис двойственной решетки в $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{b}_j \mathbf{a}_l = 2\pi\delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2.$$

Отметим, что вектор $\mathbf{b}_2$ параллелен $\mathbf{e}_2$. Элементарную ячейку двойственной решетки обозначим через $\widetilde{\Omega}$:

$$\widetilde{\Omega} := \{\mathbf{k} = \tau_1 \mathbf{b}_1 + \tau_2 \mathbf{b}_2 : 0 \leqslant \tau_j < 1, \ j = 1, 2\}. \tag{2.1}$$

Ячейка (2.1) двойственна к (1.1).

В $L_2(\Omega)$ для каждого $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{k}$ — *квазиимпульс*) рассмотрим квадратичную форму

$$m(\mathbf{k})[u, u] = \int_\Omega (|(D + \mathbf{k} - \mathbf{A})u|^2 + V|u|^2) d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Область определения формы $m(\mathbf{k})$ не зависит от $\mathbf{k}$:

$$\mathfrak{d}[m(\mathbf{k})] = \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.3}$$

При условиях (1.4), (1.5) форма (2.2) полуограничена снизу и замкнута, что легко усмотреть из (1.9). Через

$$M(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}, \mathbf{A}, V) \tag{2.4}$$

обозначим самосопряженный в $L_2(\Omega)$ оператор, порожденный формой (2.2). Поскольку вложение $\widetilde{H}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ компактно, *резольвента оператора* $M(\mathbf{k})$ *компактна*.

При условиях (1.20) операторы (2.4) можно прямо задать на одной и той же области определения. Именно положим

$$M_0(\mathbf{k}) = (D + \mathbf{k})^2, \quad \operatorname{Dom} M_0(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^2(\Omega), \tag{2.5}$$

$$W(\mathbf{k}) = -2\mathbf{A}(D + \mathbf{k}) + |\mathbf{A}|^2 + V, \quad \operatorname{Dom} W(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^2(\Omega). \tag{2.6}$$

Тогда (ср. соотношения (1.18), (1.19), (1.22))

$$M(\mathbf{k},\mathbf{A},V) = M_0(\mathbf{k}) + W(\mathbf{k}), \quad \operatorname{Dom} M(\mathbf{k},\mathbf{A},V) = \widetilde{H}^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Обоснование (2.7) сводится к аналогу оценки (1.21), но на классе $\widetilde{H}^2(\Omega)$ и с интегрированием по Ω.

Разложение периодических операторов в прямой интеграл строится с помощью *преобразования Гельфанда* $\mathcal{U}$. Именно пусть

$$\mathcal{H} := \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega) d\mathbf{k}. \tag{2.8}$$

Отображение $\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{H}$ первоначально определяется на функциях класса Шварца $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ формулой:

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\operatorname{mes}\widetilde{\Omega})^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} e^{-i\mathbf{k}(n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2)} f(\mathbf{x}+n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2).$$

Затем оно продолжается по непрерывности до *унитарного* отображения $L_2(\mathbb{R}^2)$ на $\mathcal{H}$. При этом оказывается, что для

$$f \in H^1(\mathbb{R}^2), \tag{2.9}$$

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{2.10}$$

$$m[f,f] = \int_{\widetilde{\Omega}} m(\mathbf{k})[(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot), \mathcal{U}f(\mathbf{k},\cdot)] d\mathbf{k}. \tag{2.11}$$

Обратно если для $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет место (2.10) и конечен интеграл (2.11), то выполнено (2.9). Соотношения (2.10), (2.11) показывают, что действие оператора (1.13) в прямом интеграле (2.8) сводится к умножению на оператор-функцию (2.4):

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot) \in \operatorname{Dom} M(\mathbf{k}), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega} \quad \text{для } f \in \operatorname{Dom} M, \tag{2.12}$$

$$(\mathcal{U}Mf)(\mathbf{k},\cdot) = M(\mathbf{k})(\mathcal{U}f)(\mathbf{k},\cdot), \quad \text{п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{2.13}$$

Соотношения (2.12), (2.13) кратко можно записать в виде

$$\mathcal{U}M(\mathbf{A},V)\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \oplus M(\mathbf{k},\mathbf{A},V)d\mathbf{k}. \tag{2.14}$$

При условии (1.20), в соответствии с (1.22) и (2.7), $\operatorname{Dom} M = H^2(\mathbb{R}^2)$ и операторы в слоях интеграла (2.14) имеют общую область определения $\widetilde{H}^2(\Omega)$.

2. Комплексификация. Схема Томаса связана с распространением форм $m(\mathbf{k})$ и операторов $M(\mathbf{k})$ на комплексные значения $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ квазиимпульса. При таком (аналитическом) продолжении возникают *секториальные формы* и *m-секториальные операторы*. Эти объекты систематически исследованы Т. Като, на книгу [K] которого мы будем опираться.

Запишем форму (2.2) в виде

$$m(\mathbf{k})[u,u] = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + w_0(\mathbf{k})[u,u], \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.15}$$

$$w_0(\mathbf{k})[u,u] := \int\limits_{\Omega} (-2Du(\mathbf{A}-\mathbf{k})\bar{u} + ((\mathbf{A}-\mathbf{k})^2 + V)|u|^2)d\mathbf{x}, \tag{2.16}$$

и отметим, что из (1.9) следует оценка

$$|w_0(\mathbf{k})[u,u]| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + C(\varepsilon,\mathbf{k},\mathbf{A},V) \int\limits_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x}, \quad u \in \widetilde{H}^1(\Omega), \ 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.17}$$

Формула (2.16) позволяет аналитически продолжить $w_0(\mathbf{k})$ на любые $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Одновременно (2.15) дает продолжение для $m(\mathbf{k})$. При этом оценка (2.17) сохраняет силу для всех $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Отсюда следует (см. [K, теорема VI.3.9]), что *форма $m(\mathbf{k})$ замкнута и секториальна* для $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Такая форма порождает (см. [K, теоремы VI.2.1, 2.5, 2.7]) m-секториальный оператор, который мы попрежнему будем обозначать через $M(\mathbf{k},\mathbf{A},V)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. Из (2.3) следует, что *резольвента $M(\mathbf{k},\mathbf{A},V)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, компактна*. При условиях (1.20) аналитическое продолжение оператора $M(\mathbf{k},\mathbf{A},V)$ можно провести непосредственно по формулам (2.5)–(2.7) на постоянной области определения $\widetilde{H}^2(\Omega)$.

В дальнейшем будем считать $k_1 \in \mathbb{C}$, а значение $k_2 = \varkappa \in \mathbb{R}$ фиксируем. Тогда операторы $M(k_1, \varkappa) = M(\{k_1, \varkappa\}, \mathbf{A}, V)$ образуют относительно $k_1 \in \mathbb{C}$ *самосопряженное аналитическое семейство типа* (B) *с компактной резольвентой*. Поясним, что семейство типа (B) соответствует определению операторов через секториальные формы с постоянной областью определения (см. [К, §VII.4]). *При условиях* (1.20) *семейство* $M(k_1, \varkappa)$ *есть аналитическое семейство типа* (A) по Като — семейство операторов с постоянной областью определения (см. [К, §VII.2]). Самосопряженность семейства означает, что

$$M(k_1, \varkappa)^* = M(\bar{k}_1, \varkappa).$$

3. Схема Томаса в существенном основывается на двух фактах: на аналитической альтернативе Фредгольма для семейств с компактной резольвентой и на теореме Реллиха об аналитичности собственных чисел и собственных векторов самосопряженных аналитических семейств на вещественной оси. Подробно схема Томаса пояснена в [БС, §2] для случая операторных семейств типа (A). Однако оба нужных факта верны и для семейств типа (B) (см. [К, теорема VII.1.10 и замечание VII.4.22]). Все остальные доводы, изложенные в [БС, §2], не требуют каких-либо изменений и нет надобности их здесь повторять. Как и прежде, дело сводится к доказательству того, что $\|(M(\mu + iy, \varkappa))^{-1}\| \to 0$ при $|y| \to \infty$ для подходящего μ. Сформулируем сказанное более точно.

Положим

$$k_1 = \mu + iy, \quad \mu = \pi/|\mathbf{a}_1|, \ y \in \mathbb{R}; \qquad k_2 = \varkappa \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Условимся в этом случае писать $M(y)$ *вместо* $M(\mathbf{k})$; *аналогичное соглашение применяется для обозначения других операторов и форм.*

Нашим основным техническим результатом является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть потенциалы* $\mathbf{A}$, V *— такие же, как и в теореме* 1.1. *Пусть* $M(y) = M(\mathbf{k}, \mathbf{A}, V)$, *где* $\mathbf{k}$ *определено в* (2.18). *Тогда существуют такие постоянные*

$$y_0 = y_0(\mathbf{A}, V), \qquad C = C(\mathbf{A}), \tag{2.19}$$

что оператор $M(y)$ *обратим при* $|y| \geqslant y_0$ *и*

$$\|(M(y))^{-1}\| \leqslant C(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0.$$

Постоянные (2.19) *не зависят от* $\varkappa \in \mathbb{R}$.

Как уже отмечалось, схема Томаса позволяет заключить (подробнее см. [БС, §2]), что *утверждение теоремы* 1.1 (*и теоремы* 1.2) *вытекает из теоремы* 2.1.

При условиях (1.20) теорема 2.1 доказывается значительно проще, и мы приводим соответствующее рассуждение в §4. В этом объеме теорема 2.1 обеспечивает справедливость теоремы 1.2. В общей ситуации теорема 2.1 устанавливается в §5, 6.

§3. Оценки для оператора Паули

1. Как и в [БС], исходным для нас является двумерный оператор Паули. Соответствующий векторный потенциал сейчас удобно обозначить через $\widetilde{\mathbf{A}}$,

$$\widetilde{\mathbf{A}} \in C^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.1}$$

Пусть $\widetilde{B}$ — магнитное поле, порожденное потенциалом $\widetilde{\mathbf{A}}$:

$$\widetilde{B}(\mathbf{x}) = \partial_1 \widetilde{A}_2 - \partial_2 \widetilde{A}_1. \tag{3.2}$$

Тогда оператор Паули (точнее, один из двух его блоков) есть в соответствии с обозначением (1.13) оператор

$$M(\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}) = (D - \widetilde{\mathbf{A}})^2 + \widetilde{B}. \tag{3.3}$$

Часто для оператора (3.3) будем использовать более короткое обозначение

$$M(\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}) = \widetilde{M}. \tag{3.4}$$

Для потенциала (3.1) предполагаем выполнение условия калибровки вида (1.14), (1.15). Это позволяет ввести вспомогательный *периодический* потенциал $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ такой, что

$$\nabla\varphi = \{\widetilde{A}_2, -\widetilde{A}_1\}, \quad \int_\Omega \varphi d\mathbf{x} = 0. \tag{3.5}$$

Для оператора $\widetilde{M}(\mathbf{k})$, соответствующего оператору (3.4), справедливо (ср. [БС]) мультипликативное представление

$$\widetilde{M}(\mathbf{k}) = e^{-\varphi}Q_+(\mathbf{k})e^{2\varphi}Q_-(\mathbf{k})e^{-\varphi}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2, \tag{3.6}$$

где

$$Q_\pm(\mathbf{k}) = (D_1 + k_1) \pm i(D_2 + k_2). \tag{3.7}$$

Отметим, что оператор

$$M_0(\mathbf{k}) := Q_+(\mathbf{k})Q_-(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2, \tag{3.8}$$

отвечает оператору (3.3) при $\widetilde{\mathbf{A}} = 0$, т.е. оператору (1.19). Разумеется, оператор (3.8) совпадает с оператором (2.5).

Для $\mathbf{k}$ из (2.18) соответствующие операторы будем обозначать через $Q_\pm(y)$, $M_0(y)$,

$$\widetilde{M}(y) = M(y, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}). \tag{3.9}$$

2. Для операторов (3.7), (3.8) удобно пользоваться Фурье-представлением. Разложим векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; тогда $\mathbf{b}_1 = 2\mu\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 = \gamma\mathbf{e}_2$. Если

$$v(\mathbf{x}) = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1/2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} \widehat{v}_{\mathbf{n}} \exp(i(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2)\mathbf{x}), \tag{3.10}$$

то действие $Q_\pm(y)$ на коэффициенты Фурье $\widehat{\mathbf{v}} = \{\widehat{v}_{\mathbf{n}}\}$ состоит в умножении на **символ** $\mathbf{q}^{(\pm)}(y)$:

$$\mathbf{q}^{(\pm)}(y) = \{q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)\}, \quad q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y) = \mu(2n_1 + 1) \pm i(\beta n_1 + \gamma n_2 + \varkappa \pm y). \tag{3.11}$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned}(Q_\pm(y)v)(\mathbf{x}) \\ = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1/2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)\widehat{v}_{\mathbf{n}} \exp(i(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2)\mathbf{x}), \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Далее,

$$(M_0(y)v)(\mathbf{x}) \\ = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1/2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} p_{\mathbf{n}}(y)\widehat{v}_{\mathbf{n}} \exp(i(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2)\mathbf{x}), \quad v \in \widetilde{H}^2(\Omega), \tag{3.13}$$

$$\mathbf{p}(y) = \{p_{\mathbf{n}}(y)\}, \quad p_{\mathbf{n}}(y) = q_{\mathbf{n}}^{(+)}(y)q_{\mathbf{n}}^{(-)}(y) \\ = \mu^2(2n_1+1)^2 + (\beta n_1 + \gamma n_2 + \varkappa)^2 - y^2 + 2iy\mu(2n_1+1). \tag{3.14}$$

Нам понадобятся оценки для символов $(\mathbf{q}^{(\pm)}(y))^{-1}$, $(\mathbf{p}(y))^{-1}$ в „слабых" классах $l_{s,\infty}(\mathbb{Z}^2)$. Пусть $\mathbf{g} = \{g_{\mathbf{n}}\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ и $\rho(t, \mathbf{g}) = \#\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : |g_{\mathbf{n}}| > t\}$. Класс $l_{s,\infty}$ выделяется условием

$$|\mathbf{g}|_{s,\infty} := \sup_{t>0} t(\rho(t,\mathbf{g}))^{1/s} < \infty, \quad s > 0. \tag{3.15}$$

Квазинорма, стоящая слева, не возрастает с ростом s.

Лемма 3.1. *Справедливы неравенства*

$$|(\mathbf{q}^{(\pm)}(y))^{-1}|_{s,\infty} \leqslant c_1(\Omega) < \infty, \quad s \geqslant 2, \tag{3.16}$$

$$\left.\begin{aligned} &|(\mathbf{p}(y))^{-1}|_{s,\infty} \leqslant c_2(\mu + |y|)^{-\sigma}, \quad c_2 = 4c_1^{2-\sigma}, \ s > 1; \\ &\sigma = 2(1 - s^{-1}) \text{ *при* } 1 < s < 2; \quad \sigma = 1 \text{ *при* } s \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Доказательство. Достаточно (3.16) проверить при $s = 2$ и (3.17) при $s \leqslant 2$. В соответствии с (3.11)

$$\rho(t, (\mathbf{q}^{(\pm)}(y))^{-1}) \\ = \#\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : \mu^2(2n_1+1)^2 + (\beta n_1 + \gamma n_2 + \varkappa \pm y)^2 < t^{-2}\} \\ \leqslant c_1(\Omega)^2 t^{-2}\zeta_\mu(t), \tag{3.18}$$

где ζ_μ — характеристическая функция интервала $(0, \mu^{-1})$. Постоянная $c_1(\Omega)$ не зависит от $\varkappa, y \in \mathbb{R}$, поскольку целая часть $\gamma^{-1}(\varkappa \pm y)$ может быть учтена сдвигом по n_2. Из (3.15), (3.18) непосредственно следует (3.16) при $s = 2$.

Введем теперь подмножества в $\mathbb{Z}^2$

$$\mathcal{N}_+(y) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : (\beta n_1 + \gamma n_2 + \varkappa)y \geqslant 0\}, \qquad \mathcal{N}_-(y) = \mathbb{Z}^2 \setminus \mathcal{N}_+(y). \tag{3.19}$$

Очевидно,

$$2|q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)| \geqslant \mu + |y|, \quad |q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)| \geqslant |q_{\mathbf{n}}^{(\mp)}(y)|, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{N}_\pm(y).$$

Отсюда и из (3.14)

$$|p_{\mathbf{n}}(y)| \geqslant |q_{\mathbf{n}}^{(\pm)}(y)|^\sigma |q_{\mathbf{n}}^{(\mp)}(y)|^{2-\sigma} \geqslant 2^{-\sigma}(\mu + |y|)^\sigma |q_{\mathbf{n}}^{(\mp)}(y)|^{2-\sigma}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{N}_\pm(y),$$

и, следовательно,

$$|p_{\mathbf{n}}(y)|^{-1} \leqslant 2^\sigma (\mu + |y|)^{-\sigma} |\widehat{q}_{\mathbf{n}}(y)|^{\sigma-2}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.20}$$

где

$$\widehat{q}_{\mathbf{n}}(y) := q_{\mathbf{n}}^{(\mp)}(y), \quad \mathbf{n} \in \mathcal{N}_\pm(y). \tag{3.21}$$

Из (3.16) и (3.20), (3.21) получаем

$$\begin{aligned} |(\mathbf{p}(y)^{-1}|_{s,\infty} &\leqslant 2^\sigma (\mu + |y|)^{-\sigma} (|(\mathbf{q}^{(+)}(y))^{-1}|_{2,\infty}^{2-\sigma} + |(\mathbf{q}^{(-)}(y))^{-1}|_{2,\infty}^{2-\sigma}) \\ &\leqslant 4c_1^{2-\sigma}(\mu + |y|)^{-\sigma}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Введем в $L_2(\Omega)$ ортопроекторы $\chi_\pm(y)$, действие которых в представлении (3.10) состоит в ограничении суммирования на множество индексов $\mathbf{n} \in \mathcal{N}_\pm(y)$. Будем использовать обозначения

$$G_{01} = D_1 + \mu, \qquad G_{02} = D_2 + \varkappa, \qquad G_{03} = iy \tag{3.22}$$

для операторов в $L_2(\Omega)$; $\operatorname{Dom} G_{0j} = \widetilde{H}^1(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Лемма 3.2. *Справедливы оценки*

$$\|G_{01}(Q_\pm(y))^{-1}\| \leqslant 1, \tag{3.23}$$
$$\|G_{0j}(Q_\pm(y))^{-1}\chi_\pm(y)\| \leqslant 1, \quad j = 2, 3. \tag{3.24}$$

Доказательство состоит в элементарных оценках для символов. Именно, в соответствии с (3.11), (3.12),

$$\mu|2n_1 + 1||q_{\mathrm{n}}^{(\pm)}(y)|^{-1} \leqslant 1, \quad \mathrm{n} \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.25}$$
$$|\beta n_1 + \gamma n_2 + \varkappa||q_{\mathrm{n}}^{(\pm)}(y)|^{-1} \leqslant 1, \ |y||q_{\mathrm{n}}^{(\pm)}(y)|^{-1} \leqslant 1, \quad \mathrm{n} \in \mathcal{N}_\pm(y). \quad \bullet \tag{3.26}$$

Положим теперь

$$T_j(y) = G_{0j}(y)(M_0(y))^{-1}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.27}$$

Лемма 3.3. *Для символов* $\mathrm{t}^{(j)}(y)$ *операторов* (3.27) *справедливы оценки*

$$|\mathrm{t}^{(1)}(y)|_{s,\infty} \leqslant c_1, \ |\mathrm{t}^{(j)}(y)|_{s,\infty} \leqslant 2c_1, \ j = 2, 3, \quad s \geqslant 2. \tag{3.28}$$

Доказательство сводится к сопоставлению (3.25), (3.26) с (3.14), (3.16). •

3. Теперь мы приведем утверждение, лежащее в основе наших оценок. Пусть $\mathcal{F}$ — дискретное преобразование Фурье, $\mathcal{F} : L_2(\Omega) \to l_2(\mathbb{Z}^2)$, действующее в соответствии с (3.10) по формуле $\mathcal{F}v = \{\widehat{v}_{\mathrm{n}}\}$, $\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^2$.

Лемма 3.4. *Пусть* $f \in L_s(\Omega)$, $\mathrm{g} = \{g_{\mathrm{n}}\} \in l_{s,\infty}(\mathbb{Z}^2)$, $s > 2$.

Тогда для оператора

$$f\mathcal{F}^*\mathrm{g} : l_2(\mathbb{Z}^2) \to L_2(\Omega) \tag{3.29}$$

справедлива оценка

$$\|f\mathcal{F}^*\mathrm{g}\| \leqslant c_3\|f\|_s|\mathrm{g}|_{s,\infty}, \quad s > 2, \ c_3 = c_3(s, \Omega). \tag{3.30}$$

Доказательство сводится к ссылкам на более общие (и более точные) утверждения. Оценка операторной нормы в (3.30) сохраняется при более слабом требовании $f \in L_{s,\infty}(\Omega)$. В таком виде она является частным случаем предложения 4.2 из [BKaS]. С другой стороны, (3.30) содержится в общей оценке типа Цвикеля (предложение 4.8 (ii) из [BKaS]). При этом правая часть в (3.30) оценивает норму оператора (3.29) в „слабом" классе $\mathfrak{S}_{s,\infty}$ компактных операторов; это уточнение нам не нужно. •

Выделим одно следствие леммы 3.4.

Лемма 3.5. *Пусть* $f \in L_s(\Omega)$, $s > 2$. *Тогда*

$$\|f(Q_\pm(y))^{-1}\| \leqslant c_1(\Omega)c_3(s,\Omega)\|f\|_s, \qquad s > 2, \ y \in \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

$$\|(Q_\pm(y))^{-1}f\| \leqslant c_1(\Omega)c_3(s,\Omega)\|f\|_s, \qquad s > 2, \ y \in \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

$$\|f(M_0(y))^{-1}\| \leqslant 4c_1c_3(\mu+|y|)^{-1}\|f\|_s, \quad s > 2, \ y \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Ясно, что

$$f(Q_\pm(y))^{-1} = f\mathcal{F}^*(\mathrm{q}^{(\pm)}(y))^{-1}\mathcal{F}.$$

Поэтому (3.31) следует из (3.16), (3.30). Оценка (3.32) вытекает из (3.31) и соотношения

$$(Q_\pm(y)^{-1}f)^* = \bar{f}(Q_\mp(-y))^{-1}.$$

Наконец, (3.33) следует из (3.17), (3.30). •

Наряду с (3.33) нам потребуется оценка через $\|f\|_2$.

Лемма 3.6. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$ *и* $0 < \sigma < 1$. *Тогда*

$$\|f(M_0(y))^{-1}\| \leqslant c_4(\mu+|y|)^{-\sigma}\|f\|_2, \quad \sigma \in (0,1), \ c_4 = c_4(\sigma, \ \Omega), y \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Операторная норма имеет в качестве мажоранты норму Гильберта–Шмидта, а потому

$$\|f(M_0(y))^{-1}\| \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{-1/2}\|f\|_2\|(\mathrm{p}(y))^{-1}\|_{l_2}. \tag{3.35}$$

Воспользуемся (3.20) при $\sigma < 1$. Тогда

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} |p_{\mathbf{n}}(y)|^{-2} \leqslant 2^{2\sigma}(\mu + |y|)^{-2\sigma} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2} (|q_{\mathbf{n}}^{(-)}(y)|^{2(\sigma-2)} + |q_{\mathbf{n}}^{(+)}(y)|^{2(\sigma-2)}).$$

Ряд в правой части сходится, его сумма равномерно ограничена по $\varkappa, y \in \mathbb{R}$. Отсюда и из (3.35) следует (3.34). •

4. Здесь мы получим основную оценку для случая оператора Паули (3.4). Будем исходить из (3.6). Легко видеть (ср. [БС, §3]), что оператор $\widetilde{M}(y)$ обратим и

$$(\widetilde{M}(y))^{-1} = e^{\varphi}(M_0(y))^{-1}S(y), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{3.36}$$

$$S(y) = e^{-\varphi} + 2e^{-2\varphi}(\widetilde{A}_1 + i\widetilde{A}_2)(Q_+(y))^{-1}e^{\varphi}. \tag{3.37}$$

Из теоремы вложения и из (3.5) вытекает оценка

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant c_5\|\nabla\varphi\|_r = c_5\|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r, \quad r > 2, \ c_5 = c_5(r, \Omega). \tag{3.38}$$

Далее, из (3.11), (3.13), (3.14) непосредственно видно, что

$$\|(M_0(y))^{-1}\| \leqslant \min\{(2\mu|y|)^{-1}, \mu^{-2}\}. \tag{3.39}$$

Оценим теперь норму оператора (3.37).

Лемма 3.7. *Имеет место оценка*

$$\left.\begin{aligned} &\|S(y)\| \leqslant \omega_1(\|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r; r), \quad y \in \mathbb{R}, \ r > 2, \\ &\omega_1(t; r) := e^{c_5 t}(1 + 2c_1c_3(r, \Omega)te^{2c_5 t}). \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Доказательство. В силу (3.31)

$$\|(\widetilde{A}_1 + i\widetilde{A}_2)(Q_+(y))^{-1}\| \leqslant c_1c_3(r, \Omega)\|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r, \quad r > 2. \tag{3.41}$$

Оценка (3.40) — прямое следствие (3.37), (3.38), (3.41). •

Предложение 3.8. *Пусть выполнено* (3.1) *и* $\widetilde{B}$ *определено в* (3.2). *Оператор* (3.9) *обратим, и справедлива оценка*

$$\left.\begin{aligned} \|(\widetilde{M}(y))^{-1}\| \leqslant \omega_2(\|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r; r)(\mu + |y|)^{-1}, \quad y \in \mathbb{R},\ r > 2, \\ \omega_2(t; r) := 2\mu^{-1} e^{c_5 t} \omega_1(t; r). \end{aligned}\right\} \qquad (3.42)$$

Доказательство. Достаточно использовать представление (3.36) и оценки (3.38)–(3.40). •

§4. Доказательство теоремы 2.1 (случай $r = 4$, $\rho = 2$)

Как уже упоминалось, теорема 2.1 доказывается значительно проще, если в (1.4) $r = 4$, а в (1.5) $\rho = 2$. Здесь приводится доказательство для этого случая.

1. Мы будем опираться на одно простое предложение общего характера, которое выделим явно. Оно хорошо известно и легко проверяется. Речь идет о следующем варианте резольвентного тождества.

Предложение 4.1. *Пусть* M, $\widetilde{M}$ *— замкнутые операторы в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *причем* $\operatorname{Dom} M = \operatorname{Dom} \widetilde{M}$ *и* $0 \in \rho(\widetilde{M})$. *Если оператор* $I + (M - \widetilde{M})\widetilde{M}^{-1}$ *имеет обратный*

$$L := (I + (M - \widetilde{M})\widetilde{M}^{-1})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \qquad (4.1)$$

то $0 \in \rho(M)$ *и*

$$M^{-1} = \widetilde{M}^{-1} L = \widetilde{M}^{-1}(I + (M - \widetilde{M})\widetilde{M}^{-1})^{-1}. \qquad (4.2)$$

2. Для вектор-функции $\mathbf{A}$ при условии (1.4) определим оператор

$$F(y, \mathbf{A}) := A_1 T_1(y) + A_2 T_2(y) + A_1 T_3(y), \qquad (4.3)$$

где $T_j(y)$, $j = 1, 2, 3$, — операторы (3.27). Из леммы 3.4 и оценок (3.28) прямо вытекает неравенство

$$\|F(y, \mathbf{A})\| \leqslant c_6 \|\mathbf{A}\|_r, \quad c_6 = c_6(r, \Omega), \ r > 2. \qquad (4.4)$$

3. Наша цель состоит в перенесении оценки (3.42) с оператора Паули $\widetilde{M}(y)$ на случай общего оператора $M(y, \mathbf{A}, V)$ при условиях (1.20). Для этого используется соотношение (4.2). Векторный потенциал $\mathbf{A} \in L_4(\Omega)$ приближается подходящим потенциалом $\widetilde{\mathbf{A}}$, удовлетворяющим (3.1). Как и $\mathbf{A}$, потенциал $\widetilde{\mathbf{A}}$ подчиняется условиям (1.2), (1.14), (1.15). Введем электрический потенциал $\widetilde{V} \in L_2(\Omega)$,

$$\widetilde{V}(x) = |\widetilde{\mathbf{A}}(x)|^2 - |\mathbf{A}(x)|^2 + \widetilde{B}(x), \tag{4.5}$$

где $\widetilde{B}$ определено в (3.2). На первом этапе мы применяем (4.2) к операторам

$$M(y) = M(y, \mathbf{A}, \widetilde{V}) \tag{4.6}$$

и $\widetilde{M}(y) = M(y, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B})$. В результате нужная оценка устанавливается для оператора (4.6). На втором (более стандартном) этапе оператор (4.6) сравнивается с исходным оператором

$$\widehat{M}(y) := M(y, \mathbf{A}, V). \tag{4.7}$$

4. По заданному $\mathbf{A} \in L_4(\Omega)$ выберем $\widetilde{\mathbf{A}}$ так, чтобы было

$$\|\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}\|_4 \leqslant \varepsilon, \qquad \|\widetilde{\mathbf{A}}\|_4 \leqslant 2\|\mathbf{A}\|_4. \tag{4.8}$$

Число $\varepsilon > 0$ ниже будет фиксировано. Для операторов (3.9), (4.6), очевидно, выполнено

$$\begin{aligned} M(y) - \widetilde{M}(y) &= 2(\widetilde{A}_1 - A_1)(D_1 + \mu) + 2(\widetilde{A}_2 - A_2)(D_2 + \varkappa) + 2iy(\widetilde{A}_1 - A_1) \\ &= 2((\widetilde{A}_1 - A_1)G_{01} + (\widetilde{A}_2 - A_2)G_{02} + (\widetilde{A}_1 - A_1)G_{03}). \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения (3.22). Далее, с учетом (3.36), (4.3)

$$\begin{aligned} K(y) &:= (M(y) - \widetilde{M}(y))(\widetilde{M}(y))^{-1} = (M(y) - \widetilde{M}(y))e^{\varphi}(M_0(y))^{-1}S(y) \\ &= 2e^{\varphi}(F(y, \widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) + \psi(M_0(y))^{-1})S(y), \\ \psi(\mathbf{x}) &:= i(-\widetilde{A}_2(\widetilde{A}_1 - A_1) + \widetilde{A}_1(\widetilde{A}_2 - A_2)). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из (4.4), (4.8) следует, что

$$\|F(y, \widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\| \leqslant \varepsilon c_6(4, \Omega). \tag{4.10}$$

Далее, воспользуемся оценкой (3.34), например при $\sigma = 1/2$. (Сейчас достаточно использовать (3.34) в огрубленном виде, без учета зависимости от y). Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\psi(M_0(y))^{-1}\| &\leqslant \mu^{-1/2} c_4 \|\psi\|_2 \leqslant \mu^{-1/2} c_4 \|\widetilde{\mathbf{A}}\|_4 \|\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|_4 \\ &\leqslant 2\varepsilon\mu^{-1/2} c_4 \|\mathbf{A}\|_4, \quad c_4 = c_4(1/2, \Omega). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Объединим оценки (4.10), (4.11) с (3.38), (3.40). Вместе с (4.8) это дает для оператора (4.9):

$$\left.\begin{aligned} &\|K(y)\| \leqslant \varepsilon\omega_3(\|\mathbf{A}\|_4), \\ &\quad \omega_3(t) = 2(c_6(4, \Omega) + 2\mu^{-1/2} c_4(1/2, \Omega) t)\omega_1(2t; 4)\exp(2c_5(4, \Omega)t). \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $2\varepsilon\omega_3(\|\mathbf{A}\|_4) = 1$. После этого *выберем* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *так, чтобы выполнялись условия* (4.8), *и фиксируем* $\widetilde{\mathbf{A}}$. Тогда, в силу (4.12), $2\|K(y)\| \leqslant 1$, и для оператора вида (4.1) $L(y) := (I + K(y))^{-1}$ выполнено

$$\|L(y)\| \leqslant 2, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Остается воспользоваться представлением (4.2) и оценкой (3.42), чтобы получить следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть* $\mathbf{A} \in L_4(\Omega)$ *и* $\varepsilon^{-1} = 2\omega_3(\|\mathbf{A}\|_4)$. *Пусть потенциал* $\widetilde{\mathbf{A}} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *выбран так, что выполнены условия* (4.8). *Пусть, наконец, потенциал* $\widetilde{V}$ *определен в* (3.2), (4.5). *Тогда оператор* (4.6) *обратим при любом* $y \in \mathbb{R}$ *и*

$$\|(M(y, \mathbf{A}, \widetilde{V}))^{-1}\| \leqslant 2\omega_2(2\|\mathbf{A}\|_4; 4)(\mu + |y|)^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

где функция ω_2 *определена в* (3.42).

5. Нам осталось заменить $\widetilde{V}$ на V. Соответственно в (4.2) роль $\widetilde{M}$ сейчас играет оператор (4.6), а роль M — оператор (4.7). Тогда их разность есть оператор умножения на функцию

$$V_0 = V - \widetilde{V} \in L_2(\Omega).$$

Поскольку вектор $\widetilde{\mathbf{A}}$ уже выбран по $\mathbf{A}$ и фиксирован, то в силу (4.5) *функция* V_0 в итоге *зависит лишь от* $\mathbf{A}$, V. Далее, вместо оператора (4.9) сейчас надо оценить оператор

$$\begin{aligned} K_0(y) &:= V_0(M(y, \mathbf{A}, \widetilde{V}))^{-1} = V_0(M(y, \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{B}))^{-1}L(y) \\ &= (\exp\varphi)V_0(M_0(y))^{-1}S(y)L(y). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Здесь при преобразованиях использованы равенства (4.2), (3.36). В силу (3.34)

$$\|V_0(M_0(y))^{-1}\| \leqslant c_4(1/2, \Omega)\|V_0\|_2(\mu + |y|)^{-1/2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Остальные множители в правой части (4.15) оцениваются на основании (3.38), (3.40), (4.13) равномерно по $y \in \mathbb{R}$. Поэтому можно выбрать y_0 так, чтобы было

$$2\|K_0(y)\| \leqslant 1, \quad |y| \geqslant y_0 = y_0(\mathbf{A}, V).$$

Тогда для

$$L_0(y) := (I + K_0(y))^{-1}$$

выполнено

$$\|L_0(y)\| \leqslant 2, \quad |y| \geqslant y_0.$$

В соответствии с (4.2)

$$(\widehat{M}(y))^{-1} = (M(y))^{-1}L_0(y), \quad |y| \geqslant y_0.$$

Вместе с (4.14) это приводит к следующему утверждению.

Предложение 4.3. *Пусть выполнены условия* (1.20). *Тогда существует постоянная* $y_0 = y_0(\mathbf{A}, V)$ *такая, что оператор* (4.7) *обратим при* $|y| \geqslant y_0$. *Справедлива оценка*

$$\|(M(y, \mathbf{A}, V))^{-1}\| \leqslant 4\omega_2(2\|\mathbf{A}\|_4; 4)(\mu + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0 = y_0(\mathbf{A}, V),$$

где функция ω_2 *определена в* (3.42).

Ясно, что предложение 4.3 содержит в себе утверждение теоремы 2.1 при условиях (1.20). Тем самым получено доказательство теоремы 1.2.

§5. Об обращении возмущенного оператора

1. Определяя операторы через квадратичные формы, мы уже не можем пользоваться предложением 4.1, поскольку оператор $M - \widetilde{M}$ теперь, вообще говоря, не определен. Вместо (4.2) мы используем соотношение, близкое к „проитерированному резольвентному тождеству". По поводу последнего см. [Я, формула (1.9.15)]. Отличия в деталях по сравнению со случаем, рассмотренным в [Я], довольно многочисленны, и мы приведем здесь полное изложение нужных фактов.

Пусть $\mathfrak{H}$ — основное и $\mathfrak{G}$ — вспомогательное гильбертовы пространства; пусть m, $\widetilde{m}$ — две замкнутые секториальные формы с общей плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}[m] = \mathfrak{d}[\widetilde{m}]. \tag{5.1}$$

Через M, $\widetilde{M}$ обозначим соответствующие этим формам m*-секториальные* (в смысле Като [K]) операторы. Отметим, что сопряженная к m форма m^*, определяемая равенством

$$m^*[u, v] = \overline{m[v, u]}, \quad u, v \in \mathfrak{d}, \tag{5.2}$$

также секториальна и замкнута. Соответствующий ей оператор M^* — сопряженный к оператору M. То же относится к форме $\widetilde{m}^*$ и к оператору $\widetilde{M}^*$.

Сделаем теперь несколько предположений.

i. *Точка* 0 *регулярна для* $\widetilde{M}$ (*а тогда и для* $\widetilde{M}^*$):

$$0 \in \rho(\widetilde{M}). \tag{5.3}$$

ii. *Оператор* $\widetilde{R} := \widetilde{M}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ *допускает факторизацию*:

$$\widetilde{R} = \Gamma_0\Gamma^*, \quad \Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}), \ \operatorname{Ran}\Gamma_0 \subset \mathfrak{d}, \ \operatorname{Ran}\Gamma \subset \mathfrak{d}. \tag{5.4}$$

iii. *Существуют замкнутые плотно определенные операторы* G_0, G *такие, что*

$$G_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}; \ G : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}; \quad \operatorname{Dom} G_0 \supset \mathfrak{d}, \ \operatorname{Dom} G \supset \mathfrak{d}, \tag{5.5}$$

$$m[u,v] = \widetilde{m}[u,v] + (G_0 u, Gv), \quad u, v \in \mathfrak{d}. \tag{5.6}$$

Отметим, что (5.6) означает справедливость равенства

$$M = \widetilde{M} + G^* G_0 \tag{5.7}$$

в смысле форм.

Из (5.4), (5.5) следует, что операторы $G_0\Gamma_0$, $G\Gamma$ определены всюду в $\mathfrak{H}$. Они, очевидно, также замкнуты, а потому

$$G_0\Gamma_0 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}), \quad G\Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}). \tag{5.8}$$

Рассмотрим оператор

$$X = (G_0\Gamma_0)(G\Gamma)^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}). \tag{5.9}$$

Ясно, что на $\operatorname{Dom} G^*$ оператор X совпадает с $G_0\widetilde{R}G^*$, а потому для X справедливо представление

$$X = \operatorname{clos} G_0\widetilde{R}G^*, \tag{5.10}$$

которое не зависит от факторизации (5.4).

Введем теперь наше последнее предположение.

iv. *Оператор* $I + X$ *имеет в* $\mathfrak{G}$ *ограниченный обратный*:

$$Z := (I + X)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}). \tag{5.11}$$

2. Основную роль для нас играет следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть выполнены предположения* i–iv. *Тогда* $0 \in \rho(M)$ *и справедливо представление*

$$M^{-1} = \widetilde{R} - (G\widetilde{R}^*)^* Z(G_0\widetilde{R}) \ (=: R). \tag{5.12}$$

Доказательство. Отметим, что

$$(G\widetilde{R}^*)^* = \operatorname{clos} \widetilde{R}G^* = \Gamma_0(G\Gamma)^*, \tag{5.13}$$

причем второе из этих представлений вместе с (5.4), (5.8) показывает, что

$$\operatorname{Ran} R \subset \mathfrak{d} \tag{5.14}$$

(здесь R — обозначение для правой части (5.12)).

Для $h \in \mathfrak{H}$, $v \in \operatorname{Dom} \widetilde{M}^*$ в соответствии с (5.6), (5.12)–(5.14) имеем

$$\begin{aligned} m[Rh, v] &= \widetilde{m}[Rh, v] + (G_0 Rh, Gv) \\ &= \widetilde{m}[\widetilde{R}h, v] - \widetilde{m}[(G\widetilde{R}^*)^* ZG_0\widetilde{R}h, v] \\ &\quad + (G_0\widetilde{R}h, Gv) - (G_0\Gamma_0(G\Gamma)^* ZG_0\widetilde{R}h, Gv) \\ &=: l_1 + l_2 + l_3 + l_4. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Теперь отметим, что

$$l_1 = (\widetilde{M}\widetilde{R}h, v) = (h, v). \tag{5.16}$$

Далее, в силу соотношения (5.2), примененного к форме $\widetilde{m}$, имеем

$$l_2 = -((G\widetilde{R}^*)^* ZG_0\widetilde{R}h, \widetilde{M}^*v) = -(ZG_0\widetilde{R}h, G\widetilde{R}^*\widetilde{M}^*v) = -(ZG_0\widetilde{R}h, Gv).$$

Наконец,

$$l_4 = -(XZG_0\widetilde{R}h, Gv).$$

Поскольку $(X+I)Z = I$, получаем

$$l_2 + l_4 = -(G_0\widetilde{R}h, Gv) = -l_3,$$

и в соответствии с (5.15), (5.16)

$$m[Rh, v] = (h, v), \quad h \in \mathfrak{H}, \ v \in \operatorname{Dom} \widetilde{M}^*. \tag{5.17}$$

Предельным переходом равенство (5.17) распространяется на все $v \in \mathfrak{d}$, а следовательно, $MRh = h$. Таким образом, оператор R является для M правым обратным:

$$MR = I. \tag{5.18}$$

Отметим теперь, что формы m^*, $\widetilde{m}^*$ и операторы M^*, $\widetilde{M}^*$ тоже удовлетворяют условиям i–iv. Действительно, вместе с (5.3) $0 \in \rho(\widetilde{M}^*)$ и, в силу (5.4), $(\widetilde{M}^{-1})^* = \widetilde{R}^* = \Gamma\Gamma_0^*$. Вместо (5.7) имеем (в смысле форм) равенство $M^* = \widetilde{M}^* + G_0^*G$. Таким образом, Γ и Γ_0 меняются местами, и то же верно для G и G_0. Следовательно, согласно (5.9), роль оператора X сейчас играет оператор X^*, а условие (5.11) влечет условие

$$Z^* = (I + X^*)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}).$$

Применяя (5.18) к операторам M^*, $\widetilde{M}^*$, видим, что

$$M^*R^* = I. \tag{5.19}$$

Из (5.18), (5.19) утверждение предложения 5.1 вытекает непосредственно. •

3. Сделаем несколько полезных добавлений.

Замечание 5.2. Выражение (5.12) для M^{-1} не зависит от конкретного вида факторизации (5.4). Нужно, однако, чтобы такая факторизация существовала.

Замечание 5.3. Для оператора $R = M^{-1}$ автоматически существует факторизация, аналогичная (5.4). Действительно,

$$R = \Gamma_0\Gamma^* - \Gamma_0(G\Gamma)^* Z G_0\Gamma_0\Gamma^* = \Gamma_0(I - (G\Gamma)^* Z(G_0\Gamma_0))\Gamma^*,$$

и можно положить

$$R = \widehat{\Gamma}_0\widehat{\Gamma}^*, \quad \widehat{\Gamma}_0 = \Gamma_0(I - (G\Gamma)^* Z(G_0\Gamma_0)), \ \widehat{\Gamma} = \Gamma. \tag{5.20}$$

Ясно, что при этом $\operatorname{Ran}\widehat{\Gamma}_0 \subset \mathfrak{d}$.

Следующее замечание имеет стандартный характер. Оно, однако, существенно для использования предложения 5.1.

Замечание 5.4. Предположим, что выполнены условия i, ii, а в iii роль (5.6) играет более общее соотношение

$$m[u,v] = \widetilde{m}[u,v] + \sum_{j=1}^{N}(G_{0j}u, G_j v), \quad u, v \in \mathfrak{d}, \tag{5.21}$$

причем выполнено (5.5) с заменой G_0 на G_{0j} и G на G_j, $j = 1, \dots, N$. Этот случай приводится к уже рассмотренному. Действительно, введем пространство $\mathfrak{G}^N$ — ортогональную сумму N экземпляров пространства $\mathfrak{G}$ и рассмотрим операторы G_0, $G : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}^N$,

$$G_0 = \operatorname{col}\{G_{0j}\}, \ G = \operatorname{col}\{G_j\}, \quad j = 1, \dots, N. \tag{5.22}$$

Условие iii выполнено, так как сумму в (5.21) можно записать в виде $(G_0 u, Gv)$, где скалярное произведение берется в $\mathfrak{G}^N$. Роль оператора (5.9) теперь играет „матричный“ оператор

$$\left.\begin{aligned} &X_N := \{X_{ij}\}, \quad i,j = 1,\dots,N,\\ &\text{где } X_{ij} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}, \ X_{ij} = (G_{0i}\Gamma_0)(G_j\Gamma)^* = \operatorname{clos} G_{0i}\widetilde{R}G_j^*.\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

Именно на оператор $X_N : \mathfrak{G}^N \to \mathfrak{G}^N$ следует накладывать условие iv.

4. В дальнейшем нам придется итерировать применение предложения 5.1. Некоторые связанные с этим обстоятельства удобно обсудить уже теперь. Пусть выполнены условия предложения 5.1. Пусть $\widehat{m}$ — еще одна замкнутая секториальная форма с областью определения (5.1): $\mathfrak{d}[\widehat{m}] = \mathfrak{d}$ и пусть $\widehat{M}$ — соответствующий форме $\widehat{m}$ m-секториальный оператор. Предположим, что

$$\widehat{m}[u,v] = m[u,v] + (\widehat{G}_0 u, \widehat{G} v), \quad u, v \in \mathfrak{d}, \tag{5.24}$$

причем

$$\widehat{G}_0 : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{G}}; \ \ \widehat{G} : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{G}}; \quad \operatorname{Dom} \widehat{G}_0 \cap \operatorname{Dom} \widehat{G} \supset \mathfrak{d}, \tag{5.25}$$

и операторы $\widehat{G}_0$, $\widehat{G}$ замкнуты. Тогда для пары $\widehat{m}$, m автоматически выполнены условия i–iii. Действительно, $0 \in \rho(M)$ выполнено (5.20), а предположение iii сводится к (5.24), (5.25). Для применимости к $\widehat{m}$, m предложения 5.1 решающим является условие iv. Вычислим соответствующий оператор $\widehat{X}$ вида (5.9). В силу (5.20) имеем

$$\widehat{X} = \widehat{G}_0 \Gamma_0 (I - (G\Gamma)^* Z(G_0 \Gamma_0))(\widehat{G}\Gamma)^*, \tag{5.26}$$

где Z — оператор (5.11). Средний множитель в правой части (5.26) можно преобразовать. Именно (см., например, [BS, формула (3.10.17)])

$$I - (G\Gamma)^*(I + (G_0\Gamma_0)(G\Gamma)^*)^{-1}(G_0\Gamma_0) = (I + (G\Gamma)^*(G_0\Gamma_0))^{-1}$$

и, следовательно,

$$\widehat{X} = \widehat{G}_0 \Gamma_0 (I + (G\Gamma)^*(G_0\Gamma_0))^{-1}(\widehat{G}\Gamma)^*. \tag{5.27}$$

К сожалению, оба выражения (5.26), (5.27) привязаны к фиксированной факторизации (5.4). Поэтому непосредственное их использование встречает затруднения. При проверке условия iv (см. п. 6.5) мы фактически будем пользоваться представлением вида (5.10):

$$\widehat{X} = \operatorname{clos} \widehat{G}_0 R \widehat{G}^*. \tag{5.28}$$

§6. Доказательство теоремы 2.1 (общий случай)

Здесь доказывается теорема 2.1 при условиях (1.4), (1.5). В основе лежит абстрактная схема, изложенная в §5. Как и в §4, доказательство разбивается на два этапа. Сначала (пункты 1–3) аппроксимируется потенциал $\mathbf{A}$ и доказывается аналог предложения 4.2. Затем (пункты 4, 5) добавляется потенциал V и устанавливается аналог предложения 4.3.

1. Ниже векторный потенциал $\mathbf{A}$ подчинен условию (1.4). Приближающий потенциал $\widetilde{\mathbf{A}}$ удовлетворяет условию (3.1) и неравенствам

$$\|\mathbf{A}-\widetilde{\mathbf{A}}\|_r \leqslant \varepsilon, \quad \|\widetilde{\mathbf{A}}\|_r \leqslant 2\|\mathbf{A}\|_r, \quad r>2. \tag{6.1}$$

Оба потенциала подчинены условиям калибровки (1.14), (1.15). Используется схема §5. Роль оператора $\widetilde{M}$ играет оператор (3.9) $\widetilde{M}(y) = M(y,\widetilde{\mathbf{A}},\widetilde{B})$, роль оператора M — оператор $M(y) = M(y,\mathbf{A},\widetilde{B})$. Отметим, что последний оператор не совпадает с оператором (4.6).

Операторы определяются через соответствующие секториальные формы $m(y)$, $\widetilde{m}(y)$. Пусть вектор $\mathbf{k}$ определен в (2.18). Тогда

$$\widetilde{m}(y)[u,v] = \int_\Omega ((D+\mathbf{k})u\overline{(D+\mathbf{k})v} - 2(D+\mathbf{k})u\widetilde{\mathbf{A}}\bar{v} + (|\widetilde{\mathbf{A}}|^2+\widetilde{B})u\bar{v})d\mathbf{x}, \tag{6.2}$$

$$m(y)[u,v] = \int_\Omega ((D+\mathbf{k})u\overline{(D+\mathbf{k})v} - 2(D+\mathbf{k})u\mathbf{A}\bar{v} + (|\mathbf{A}|^2+\widetilde{B})u\bar{v})d\mathbf{x}, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{Dom}\widetilde{m}(y) = \operatorname{Dom} m(y) = \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{6.4}$$

Учитывая (2.18) в записи явно, видим, что

$$\begin{aligned} &m(y)[u,v] - \widetilde{m}(y)[u,v] \\ &\quad = \int_\Omega (-2(D_1+\mu)u(A_1-\widetilde{A}_1)\bar{v} - 2iyu(A_1-\widetilde{A}_1)\bar{v} \\ &\qquad - 2(D_2+\varkappa)u(A_2-\widetilde{A}_2)\bar{v} + (|\mathbf{A}|^2-|\widetilde{\mathbf{A}}|^2)u\bar{v})d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Соотношение (6.5) имеет вид (5.21). Здесь $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{d} = \widetilde{H}^1(\Omega)$, $N = 4$ и

$$G_0 = \mathrm{col}(D_1 + \mu, D_2 + \varkappa, iy, h), \quad 2|h(x)| \leqslant |\widetilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A}|; \tag{6.6}$$

$$G^* = 2(\widetilde{A}_1 - A_1, \widetilde{A}_2 - A_2, \widetilde{A}_1 - A_1, |\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}|). \tag{6.7}$$

Обозначения в (6.6) согласованы с (3.22) .

Нам надлежит проверить условия предложения 5.1 в варианте, описанном в замечании 5.4. Условие (5.1) реализовано в (6.4). Замкнутость и секториальность форм (6.2), (6.3) отмечены в п. 2.2. Условие i (см. (5.3)) для $\widetilde{M}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, обеспечивается предложением 3.8. Факторизация (5.4) (условие ii) реализуется, например, при (см. (3.6))

$$\Gamma_0 = e^{\varphi}(Q_-(y))^{-1}e^{-\varphi}, \qquad \Gamma^* = e^{-\varphi}(Q_+(y))^{-1}e^{\varphi}. \tag{6.8}$$

Легко понять, что при этом выполнены включения из (5.4). Условие iii обеспечено формулой (6.5), которую можно представить в виде (5.21). Операторы (5.22) реализованы в (6.6), (6.7); соотношения (5.5) для G_{0j}, G_j, $j = 1, \dots, 4$, выполнены (для операторов умножения — в силу (1.9)).

2. Проверка условия iv требует значительно более внимательного анализа. Прежде всего мы оценим норму соответствующего оператора X_N (сейчас $N = 4$) из (5.23). Соответствующие матричные элементы (символ clos в обозначениях опускаем) суть

$$X_{ij} = G_{oi}(\widetilde{M}(y))^{-1}G_j^*, \quad i, j = 1, \dots, 4. \tag{6.9}$$

Предстоит оценить шестнадцать операторов (6.9), действующих в $L_2(\Omega)$. В существенном они различаются лишь первым индексом и имеют соответственно вид

$$\left.\begin{array}{ll} X_1 := (D_1 + \mu)(\widetilde{M}(y))^{-1}f, & X_2 := (D_2 + \varkappa)(\widetilde{M}(y))^{-1}f, \\ X_3 := iy(\widetilde{M}(y))^{-1}f, & X_4 := h(\widetilde{M}(y))^{-1}f. \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

Конкретные значения $f \in L_r(\Omega)$ определяются согласно (6.7): $f = G_j^* = G_j$, $j = 1, \dots, 4$.

Для дальнейшего полезно оценить операторы $\mathcal{X}_\pm(y;f)=\mathcal{X}_\pm(y)$,

$$\mathcal{X}_\pm(y):=(Q_\pm(y))^{-1}S(y)f=(Q_\pm(y))^{-1}(e^{-\varphi}+2e^{-2\varphi}(\widetilde{A}_1+i\widetilde{A}_2)(Q_+(y))^{-1}e^{\varphi})f.$$

Используя (3.32), (3.38), а также (6.1), найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\|\mathcal{X}_\pm(y;f)\|\leqslant\omega_4(\|\mathbf{A}\|_r;r)\|f\|_r, \quad r>2,\\ &\omega_4(t;r):=c_7e^{2c_5t}(1+4c_7te^{4c_5t}),\quad c_7=c_1(\Omega)c_3(r,\Omega),\ c_5=c_5(r,\Omega).\end{aligned}\right\}\tag{6.11}$$

Перейдем к оценке операторов (6.10). Для X_1 имеем

$$X_1=(D_1+\mu)e^{\varphi}(M_0(y))^{-1}S(y)f=e^{\varphi}(D_1+\mu-i\widetilde{A}_2)(Q_+(y))^{-1}\mathcal{X}_-(y).$$

Первый и последний множители справа оцениваются согласно (3.38), (6.11). Средние сомножители оцениваются с помощью (3.22), (3.23) и (3.31). Снова, учитывая (6.1), получим

$$\left.\begin{aligned} &\|X_1\|\leqslant\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r;r)\|f\|_r,\quad r>2,\\ &\omega_5(t;r)=(\exp 2c_5(r,\Omega)t)(1+2c_7t)\omega_4(t;r).\end{aligned}\right\}\tag{6.12}$$

Напомним (см. п. 3.2), что $\chi_\pm(y)$ — ортопроекторы в $L_2(\Omega)$, отвечающие в Фурье-представлении ограничению индексов суммирования на множества (3.19). Тогда

$$\begin{aligned} X_2&=(D_2+\varkappa)e^{\varphi}(M_0(y))^{-1}S(y)f\\ &=e^{\varphi}(D_2+\varkappa+i\widetilde{A}_1)(Q_+(y))^{-1}\chi_+(y)\mathcal{X}_-(y)\\ &\quad+e^{\varphi}(D_2+\varkappa+i\widetilde{A}_1)(Q_-(y))^{-1}\chi_-(y)\mathcal{X}_+(y).\end{aligned}$$

При оценке X_2 используются те же соотношения, что и для X_1. Лишь вместо (3.23) нужно применить (3.24). В итоге

$$\|X_2\|\leqslant 2\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r;r)\|f\|_r,\quad r>2.\tag{6.13}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} X_3 &= ie^{\varphi}(y(Q_+(y))^{-1}\chi_+(y)\mathcal{X}_-(y) + y(Q_-(y))^{-1}\chi_-(y)\mathcal{X}_+(y)), \\ \|X_3\| &\leqslant 2e^{2c_5\|\mathbf{A}\|_r}\omega_4(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|f\|_r, \quad r > 2. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Наконец, $X_4 = he^{\varphi}(Q_+(y))^{-1}\mathcal{X}_-(y)$. Из (3.31), (6.11), с учетом (6.1), (6.6) получаем

$$\|X_4\| \leqslant \frac{3}{2}c_7e^{2c_5\|\mathbf{A}\|_r}\|\mathbf{A}\|_r\omega_4(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|f\|_r, \quad r > 2. \tag{6.15}$$

При некотором огрублении оценки (6.12)–(6.15) можно объединить:

$$\|X_j\| \leqslant 2\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|f\|_r, \quad j = 1, \dots, 4, \ r > 2. \tag{6.16}$$

Неравенства (6.16) дают возможность оценить операторы (6.9). С учетом (6.1), (6.7) находим

$$\|X_{ij}\| \leqslant 4\varepsilon\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r; r), \quad i, j = 1, \dots, 4, \ r > 2.$$

Следовательно, для матричного оператора $X = X_N$ из (5.23) имеем

$$\|X\| \leqslant 16\varepsilon\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r; r), \quad r > 2. \tag{6.17}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы правая часть в (6.17) равнялась 1/2. Затем **фиксируем потенциал $\widetilde{\mathbf{A}}$, удовлетворяющий** (6.1). Оператор Z вида (5.11) существует и $\|Z\| \leqslant 2$.

3. Итак, проверены все условия предложения 5.1, а потому оператор $R = (M(y))^{-1}$ существует и справедливо представление (5.12). Отсюда непосредственно следует, что

$$\|(M(y))^{-1}\| \leqslant \|(\widetilde{M}(y))^{-1}\| + 2\|G(\widetilde{M}(-y))^{-1}\|\,\|G_0(\widetilde{M}(y))^{-1}\|, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

Первое слагаемое в правой части оценено в (3.42). Далее, оценку для $G_0(\widetilde{M}(y))^{-1}$ можно извлечь из (6.16) при $f = 1$. Тогда

$$\|G_0(\widetilde{M}(y))^{-1}\| \leqslant 4(\operatorname{mes}\Omega)^{1/r}\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r; r), \quad r > 2. \tag{6.19}$$

Убывание с ростом $|y|$ удается извлечь из оценки для

$$G(\widetilde{M}(-y))^{-1} = e^{\varphi}G(M_0(-y))^{-1}S(-y).$$

Из (3.33), (3.38), (3.40), (6.1) следует, что

$$\|G(\widetilde{M}(-y))^{-1}\| \leqslant 48c_7\|\mathbf{A}\|_r e^{2c_5\|\mathbf{A}\|_r}\omega_1(2\|\mathbf{A}\|_r; r)(\mu + |y|)^{-1}; \tag{6.20}$$

при этом мы ограничились грубой оценкой $\|\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}\|_r \leqslant 3\|\mathbf{A}\|_r$. Сопоставление (3.42) и (6.18)–(6.20) приводит к следующему утверждению.

Предложение 6.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.4), (1.14), (1.15). *Пусть* $\varepsilon^{-1} = 32\omega_5(\|\mathbf{A}\|_r; r)$. *Пусть, наконец, потенциал* $\widetilde{\mathbf{A}} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющий условиям* (1.2), (1.14), (1.15), *выбран так, что выполнено* (6.1). *Тогда оператор* $M(y, \mathbf{A}, \widetilde{B})$ *обратим и*

$$\left.\begin{aligned} &\|(M(y, \mathbf{A}, \widetilde{B}))^{-1}\| \leqslant \omega_6(\|\mathbf{A}\|_r; r)(\mu + |y|)^{-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \ r > 2, \\ &\omega_6(t; r) := \omega_2(2t; r) + c_8 t\omega_1(2t; r)\omega_5(t; r)e^{2c_5 t}, \end{aligned}\right\} \tag{6.21}$$

$$c_8(r, \Omega) = 384c_7(r, \Omega)(\operatorname{mes}\Omega)^{1/r}.$$

Замечание 6.2. Так как функция $\widetilde{B}$ ограничена, то из (6.21) без каких-либо выкладок получается утверждение теоремы 2.1 для „чисто магнитного“ оператора $M(\mathbf{A}, 0)$ вида (1.13). Оставшаяся часть статьи посвящена включению потенциала V при условии (1.5).

4. В этом пункте мы выведем оценки, которые позволят включить потенциал V. Через $\omega_l(t;r)$, $t > 0$, $r > 2$, $l \geqslant 7$ обозначаем оценочные функции экспоненциального роста. Каждую из них можно выписать явно, но в этом нет необходимости.

Наряду с леммой 3.4 нам понадобится

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathrm{g} \in l_{\rho,\infty}(\mathbb{Z}^2)$ *и*

$$a \in L_r(\Omega), \quad b \in L_r(\Omega), \quad r = 2\rho > 2. \tag{6.22}$$

Тогда

$$\|b\mathcal{F}^*\mathrm{g}\mathcal{F}a\| \leqslant c_9\|a\|_r\|b\|_r|\mathrm{g}|_{\rho,\infty}, \quad c_9 = c_9(r,\Omega). \tag{6.23}$$

Доказательство легко извлечь из леммы 3.4. С другой стороны, оценка (6.23) содержится как весьма частный случай (причем в более точной форме) в теореме 2.3 (ii) статьи [BKaS]. •

Прямым следствием оценок (3.17), (6.23) является неравенство

$$\left.\begin{aligned} &\|b(M_0(y))^{-1}a\| \leqslant c_{10}(\mu + |y|)^{-\sigma}\|a\|_r\|b\|_r, \quad c_{10} = c_2c_9, \ \ y \in \mathbb{R}, \\ &\sigma = \sigma(\rho) = 2(1-\rho^{-1}) \text{ при } 1 < \rho < 2, \quad \sigma = 1 \text{ при } \rho \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

Перейдем к оценкам для оператора $\widetilde{M}(y)$. В силу (3.36), (3.37)

$$(\widetilde{M}(y))^{-1}a = e^{\varphi}((M_0(y))^{-1}a)e^{-\varphi} + 2e^{\varphi}((M_0(y))^{-1}(\widetilde{A}_1 + i\widetilde{A}_2))e^{-2\varphi}(Q_+(y))^{-1}ae^{\varphi}.$$

Поскольку $M_0(y)^* = M_0(-y)$, оператор $(M_0(y))^{-1}a$ оценивается на основании (3.33) после перехода к сопряженному оператору. Надо использовать также (3.32), (3.38) и учесть (6.1). Тогда

$$\|(\widetilde{M}(y))^{-1}a\| \leqslant \omega_7(\|\mathbf{A}\|_r;r)\|a\|_r(\mu + |y|)^{-1}, \quad r > 2, \ \ y \in \mathbb{R}. \tag{6.25}$$

Аналогично, но с использованием (6.24) вместо (3.33), получим:

$$\begin{gathered}\|b(\widetilde{M}(y))^{-1}a\| \leqslant \omega_8(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|a\|_r\|b\|_r(\mu+|y|)^{-\sigma},\\ r = 2\rho > 2,\ \ \sigma=\sigma(\rho),\ \ y\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{6.26}$$

Остается получить оценки с участием оператора $M(y) = M(y, \mathbf{A}, \widetilde{B})$. Исходим из уже установленного соотношения вида (5.12). Тогда

$$(M(y))^{-1}a = (\widetilde{M}(y))^{-1}a - (\widetilde{M}(y))^{-1}G^*ZG_0(\widetilde{M}(y))^{-1}a.$$

Оператор $(\widetilde{M}(y))^{-1}G^*$ уже оценивался (см. (6.20)). Равномерная по y оценка оператора $G_0(\widetilde{M}(y))^{-1}a$ сводится к (6.16) (с заменой f на a). Кроме того, $\|Z\| \leqslant 2$. Отсюда и из (6.25) находим

$$\|(M(y))^{-1}a\| \leqslant \omega_9(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|a\|_r(\mu+|y|)^{-1},\quad r>2,\ \ y\in\mathbb{R}. \tag{6.27}$$

Подобным же образом получается оценка

$$\begin{gathered}\|b(M(y))^{-1}a\| \leqslant \omega_{10}(\|\mathbf{A}\|_r; r)\|a\|_r\|b\|_r(\mu+|y|)^{-\sigma},\\ r = 2\rho > 2,\ \ \sigma=\sigma(\rho),\ \ y\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{6.28}$$

Надо лишь использовать неравенство (6.26), в том числе — для оценки множителя $b(\widetilde{M}(y))^{-1}G^*$.

5. Теперь мы закончим доказательство теоремы 2.1. *Не ограничивая общности, будем считать, что в* (1.4), (1.5) $r = 2\rho$. Общая схема §5 в варианте „повторного применения“ (см. п. 5.4) прилагается к паре операторов

$$M(y) = M(y, \mathbf{A}, \widetilde{B}),\quad \widehat{M}(y) = M(y, \mathbf{A}, V). \tag{6.29}$$

Положим

$$\widehat{V} = V - \widetilde{B} = ba,\quad a = |\widehat{V}|^{1/2},\quad b = |\widehat{V}|^{1/2}\operatorname{sign}\widehat{V}.$$

Ясно, что при этом выполнено (6.22). Пусть $\widehat{G}_0$, $\widehat{G}(=\widehat{G}^*)$ суть операторы умножения соответственно на b, a. Тогда выполнено (5.24) и, в силу (6.22), выполнено (5.25). Условия i–iii предложения 5.1 для пары (6.29) выполнены, как это объяснено в п. 5.4, автоматически. В частности, факторизация (5.20) для $(M(y))^{-1}$ (условие ii) является следствием реализованной в (6.8) факторизации (5.4) для $(\widetilde{M}(y))^{-1}$.

Соответствующий оператор (5.28) есть $\widehat{X}(y) = b(M(y))^{-1}a$. В силу (6.28) при достаточно большом y_0 будет

$$2\|\widehat{X}(y)\| \leqslant 1, \quad |y| \geqslant y_0 = y_0(\mathbf{A}, V).$$

Тогда справедливо представление вида (5.12):

$$(\widehat{M}(y))^{-1} = (M(y))^{-1} - (M(y))^{-1}a\widehat{Z}b(M(y))^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0, \tag{6.30}$$

где $\widehat{Z} = (I+\widehat{X})^{-1}$ и $\|\widehat{Z}\| \leqslant 2$. Применим оценку (6.27) и аналогичную оценку для $b(M(y))^{-1} = ((M(-y))^{-1}b)^*$. Отсюда видно, что второе слагаемое справа в (6.30) есть $O((\mu+|y|)^{-2})$. Оценка для $(M(y))^{-1}$ содержится в (6.21). Увеличивая, если потребуется, значение y_0, найдем, что

$$\|(M(y,\mathbf{A},V))^{-1}\| \leqslant 2\omega_6(\|\mathbf{A}\|_r; r)(\mu+|y|)^{-1}, \quad r > 2, \ |y| \geqslant y_0(\mathbf{A}, V). \tag{6.31}$$

Таким образом, установлено

Предложение 6.4. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5), $r = 2\rho$. *Тогда существует постоянная* $y_0(\mathbf{A}, V)$ *такая, что выполнено неравенство* (6.31) *с функцией* ω_6, *определенной в* (6.21).

Этим закончено доказательство теоремы 2.1.

Список литературы

[БС] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен*, Алгебра и анализ 9 (1997), № 1, 32–48.

[К] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[Я] Яфаев Д. Р., *Математическая теория рассеяния*, С.-Петербург. ун-т, СПб, 1994.

[BS] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[BKaS] Birman M. Sh., Karadzhov G. E., Solomyak M. Z., *Boundedness conditions and spectrum estimates for the operators $b(X)a(D)$ and their analogs*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 85–106.

[M] Marcinkiewicz J., *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math. **8** (1939), 78–91.

[So] Sobolev A. V., *Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator*, Research Report no. 97/06, Univ. of Sussex, 1997.

[T] Thomas L. E., *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal*, Comm. Math. Phys. 33 (1973), 335–343.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет,
кафедра математической физики
198904, Санкт-Петербург,
Петродворец, Ульяновская, 1
E-mail: tanya@petrov.stoic.spb.su

Поступило 26 января 1998 г.