Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, Поведение общих гипергеометрических функций в комплексной области,
Докл. АН СССР, 1986, том 290, номер 2, 277–281

https://www.mathnet.ru/dan47663

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
10 декабря 2025 г., 23:00:43

Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть в* (1) *норма спектральная. Тогда если* $\|A\|_2 \leqslant \mu$, *то* $B^0 = 0$ *и* $\sigma_1^0 = 0$, *в противном случае* $\sigma_1^0 = \rho_1 - \mu$ *и матрица*

$$B^0 = \sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} \max\{\rho_k - \mu, 0\} y_k x_k^{\mathrm{T}}$$

всегда реализует минимум (2), *причем она не единственная, за исключением случая*

$$A = \rho \sum_{k=1}^{t} y_k x_k^{\mathrm{T}}, \quad t > 0.$$

Замечание 4. Частным случаем рассмотренной нами задачи является случай, когда исходный класс матриц – класс симметричных вещественных матриц. Тогда сингулярные числа можно заменить на собственные значения и сингулярные пары (x_i, y_i) – на ортонормированные собственные векторы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
18 III 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с. 2. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984. 520 с. 3. *Lawson Ch.L., Hanson R.J.* Solving least squares problems. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1974. 340 p. 4. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

В.А. ВАСИЛЬЕВ, академик И.М. ГЕЛЬФАНД, А.В. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

ПОВЕДЕНИЕ ОБЩИХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Общие гипергеометрические функции, введенные в [9, 1], являются по существу функциями на грассмановых многообразиях. В [1] указано разбиение грассманиана на полуалгебраические подмножества, называемые стратами. Это разбиение очень существенно, поскольку гипергеометрических функций много: на каждом страте имеется своя система общих гипергеометрических функций, аналитических на этом страте. В [2] построена система дифференциальных уравнений в частных производных, которым удовлетворяют общие гипергеометрические функции на общем (т.е. открытом) страте. Там же доказано, что эта система голономна, и получена верхняя оценка на число ее линейно-независимых решений. Отметим, что интегралы от произведений степеней линейных функций рассматривались в интересных работах К. Аомото (см. [6, 8]). В наших терминах: Аомото получен ряд результатов о поведении этих интегралов на общем страте, однако в этих его работах отсутствует действие картановской группы и существенное для нас разбиение грассманиана на страты.

В настоящей работе мы строим для функций из 1 более общие интегральные представления, дающие возможность продолжить их в комплексную область. Для обширного класса стратов, называемых нами основными, найдено число линейно-независимых гипергеометрических функций; этот результат тесно связан с результатами [3]. В частности, для общего страта доказано, что оценка из [2] точна.

1. Основные определения. Пусть $G_k(\mathbf{C}P^n)$ — многообразие k-мерных плоскостей в комплексном проективном пространстве $\mathbf{C}P^n$. Для каждой $\zeta \in G_k(\mathbf{C}P^n)$ обозначим через $\bar{\zeta}$ $(k+1)$-мерное векторное подпространство в $\mathbf{C}^{n+1}$, чьей проективизацией является ζ. Фиксируем координаты $x_0, \ldots, x_n$ в $\mathbf{C}^{n+1}$ и соответствующие однородные координаты $(x_0 \ldots . x_n)$ в $\mathbf{C}P^n$. Для каждого $j = 0, 1, \ldots, n$ пусть S_j — координатная гиперплоскость в $\mathbf{C}P^n$, заданная уравнением $x_j = 0$; положим $S = \cup S_j$. Если $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ — подмножество в $\{0, 1, \ldots, n\}$, то положим $S_J = S_{j_1} \cap \ldots \cap S_{j_r}$. Назовем точки $\zeta, \zeta' \in G_k(\mathbf{C}P^n)$ эквивалентными, если $\dim(\zeta \cap S_J) = \dim(\zeta' \cap S_J)$ для всех $J \subset \{0, \ldots, n\}$; классы эквивалентности по этому отношению называются стратами в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ (ср. [1, 3]). Имеется единственный открытый страт в $G_k(\mathbf{C}P^n)$, называемый общим: он состоит из таких ζ, что $\dim(\zeta \cap S_J) = k - |J|$ при $|J| \leqslant k$ (иными словами, плоскости $\zeta \cap S_j$ в ζ находятся в общем положении).

Зафиксируем набор комплексных чисел $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ с суммой $n-k$, и пусть $\tau_j = \exp(2\pi i \alpha_j)$. Пусть L — локальная система ранга 1 на $\mathbf{C}P^n - S$ с показателями монодромии τ_j^{-1} (т.е. L — одномерное комплексное векторное расслоение с плоской связностью на $\mathbf{C}P^n - S$ такое, что обход в положительном направлении вокруг плоскости S_j задает в слое умножение на τ_j^{-1}. Для каждой $\zeta \in G_k(\mathbf{C}P^n)$ обозначим той же буквой L ограничение этой локальной системы на $\zeta - S$. Пусть $H_r^{lf}(\zeta - S, L)$ — группа гомологий локально-конечных цепей с коэффициентами в L. Над каждым стратом Γ в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ имеется расслоение, слой которого над точкой $\zeta \in \Gamma$ равен $H_k^{lf}(\zeta - S, L)$; это расслоение снабжено канонической плоской связностью (так называемой связностью Гаусса–Манина, см. [4, 5]).

Пусть Γ — страт в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ и $\zeta \in \Gamma$. Обозначим через $D(\zeta)$ множество k-форм ω на $\bar{\zeta} - 0$ вида $\omega = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j t_j dt_0 \wedge \ldots \wedge dt_{j-1} \wedge dt_{j+1} \wedge \ldots \wedge dt_k$, где $t_0, \ldots, t_k$ — некоторая система линейных координат в $\bar{\zeta}$ (ясно, что любые две формы из $D(\zeta)$ пропорциональны). Пусть $\pi_\alpha = \prod_{j=0}^{n} x_j^{\alpha_j - 1}$ — (многозначная) аналитическая функция в $\bar{\zeta}$ с ветвлением на S. В силу условия $\Sigma \alpha_j = n - k$ при $\omega \in D(\zeta)$ k-форма $\pi_\alpha \cdot \omega$ опускается до (многозначной) голоморфной k-формы на $\zeta - S$, которую мы снова обозначим $\pi_\alpha \cdot \omega$. Для каждой формы $\pi_\alpha \cdot \omega$ и класса $h \in H_k^{lf}(\zeta - S, L)$ мы сейчас определим интеграл $\int_h \pi_\alpha \cdot \omega$.

Пусть $M_{\alpha,\zeta} \to \zeta - S$ — накрытие, на котором k-форма $\pi_\alpha \cdot \omega$ становится однозначной. Произвольной конечной гладкой триангуляции пары $(\zeta, \zeta \cap S)$ соответствует разбиение пространства $M_{\alpha,\zeta}$ на (вообще говоря, некомпактные) связные компоненты прообразов ее симплексов; тогда любой элемент $h \in H_r^{lf}(\zeta - S, L)$ можно задать конечной линейной комбинацией r-мерных клеток этого разбиения. Если $h \in H_k^{lf}(\zeta - S, L)$ представлен в таком виде, то $\int_h \pi_\alpha \cdot \omega$ определяется как соответствующая линейная комбинация обычных интегралов k-формы $\pi_\alpha \cdot \omega$ по k-мерным клеткам в $M_{\alpha,\zeta}$; эти интегралы, вообще говоря, расходятся, и в этом случае смысл им придается с помощью метода разбиений и аналитического продолжения по α (см. [1]). Отметим, что в [6] интеграл определяется несколько

по-другому, но при тех α, при которых определение из [6] имеет смысл, оно эквивалентно нашему.

Определение. Пусть Γ – страт в $G_k(\mathbf{C}P^n)$, $\xi \in \Gamma$ и $h \in H_k^{lf}(\xi - S, L)$. Пусть U – некоторая односвязная окрестность точки ξ в Γ, $\zeta \in U$ и $\omega \in D(\zeta)$. Общая гипергеометрическая функция $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ определяется формулой

$$(1) \qquad \Phi_h(\alpha; \zeta, \omega) = \int\limits_{h(\zeta)} \pi_\alpha \cdot \omega,$$

где класс $h(\zeta) \in H_k^{lf}(\zeta - S, L)$ получается из класса h перенесением по связности Гаусса–Манина вдоль любого пути в U, соединяющего точки ξ и ζ.

Функция $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ аналитична по (ζ, ω) при $\zeta \in U \subset \Gamma$, $\omega \in D(\zeta)$ и мероморфна по α. Легко видеть, что если Γ – общий страт, то все функции $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ удовлетворяют системе обобщенных гипергеометрических уравнений из [2].

Пример. Для каждого страта Γ в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ обозначим через $\Gamma_{\mathbf{R}}$ множество плоскостей $\zeta \in \Gamma$, заданных в $\mathbf{C}P^n$ линейными уравнениями с вещественными коэффициентами. Пусть $\xi \in \Gamma_{\mathbf{R}}$. Тогда любой набор $\epsilon = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_n)$, где все $\epsilon_i = \pm 1$, выделяет в $\zeta - S$ клетку, являющуюся образом конуса в $\xi - 0$, заданного неравенствами $\epsilon_j x_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Если $h \in H_k^{lf}(\xi - S, L)$ – класс, заданный любым поднятием этой клетки на накрытие $M_{\alpha,\xi}$, то функция $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с функцией $\Phi(\alpha, \epsilon;\ \zeta, \omega)$, определенной в [1].

Определение. Страт Γ в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ называется основным, если при $\zeta \in \Gamma$:

1) ζ не содержится ни в какой координатной гиперплоскости S_j и все пересечения $\zeta \cap S_j$ при $j = 0, 1, \ldots, n$ различны;

2) найдется такой индекс $j_0 \in \{0, \ldots, n\}$, что семейство плоскостей $\zeta \cap S_j$, $j \neq j_0$, имеет только нормальные пересечения в k-мерной аффинной плоскости $\zeta - S_{j_0}$.

Замечания. 1. Основные страты – это в точности страты, изучавшиеся в [3, § 4]. Они образуют обширный класс стратов. А именно, для каждого основного страта Γ в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ плоскости $\zeta \cap S_{j_0}$ при $\zeta \in \Gamma$ пробегают некоторый страт в $G_{k-1}(S_{j_0}) = G_{k-1}(\mathbf{C}P^{n-1})$, и почти все страты в $G_{k-1}(\mathbf{C}P^{n-1})$ (в том числе все невырожденные в смысле [1]) получаются такой конструкцией.

2. Условие, что все пересечения $\zeta \cap S_j$ различны, несущественно и приведено лишь для удобства формулировок: если отказаться от него, то формулировки теорем, оставаясь в силе, станут более громоздкими.

В дальнейшем мы будем считать, что индекс j_0 из определения основного страта равен 0. Фиксируем некоторый основной страт Γ в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ и $\xi \in \Gamma_{\mathbf{R}}$. Укажем набор образующих группы $H_k^{lf}(\xi - S, L)$. Пусть $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ – k-подмножество в $\{1, \ldots, n\}$. По определению основного страта пересечение $(\xi - S_0) \cap S_J$ либо пусто, либо состоит из единственной точки v_J; в последнем случае назовем подмножество J регулярным (регулярность J означает, что $J \cup \{0\}$ принадлежит списку страта Γ в смысле работы [1]). Легко видеть, что регулярное подмножество всегда найдется и что при этом в качестве аффинных координат на $\xi - S_0$ можно выбрать $y_j = x_j/x_0$, $j \in J$. Определим в $\xi - S$ "мнимый конус" ∇_J с вершиной v_J, полагая $\nabla_J = \{x = (y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}) \in \xi - S\colon \operatorname{Re} y_j = 0,\ \operatorname{Im} y_j > 0$ при $j \in J$. Любому поднятию ∇_J на накрытие $M_{\alpha,\xi}$ соответствует класс $h \in H_k^{lf}(\xi - S, L)$. Этот класс определяется по J с точностью до пропорциональности; обозначим его $h(J)$.

2. Вычисление гомологий. В этом пункте $\Gamma \subset G_k(\mathbf{C}P^n)$ – основной страт, $\xi \in \Gamma$. Построим комплекс, считающий группы $H_r^{lf}(\xi - S, L)$, где показатели монодромии локальной системы L равны $\tau_0^{-1}, \ldots, \tau_n^{-1}$ и $\tau_0 \cdot \ldots \cdot \tau_n = 1$. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_m \mathcal{E}_m$ – внешняя алгебра с образующими $e_1, \ldots, e_n$ и дифференциалом $\partial\colon \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_{m-1}$ таким, что $\partial e_j = (\tau_j - 1) \cdot 1$. Пусть $\mathcal{B}_m$ – подпространство в $\mathcal{E}_m$, натяну-

тое на элементы $e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_m}$ такие, что при $J=\{1,\ldots,n\}-\{j_1,\ldots,j_m\}$ имеем $(\xi-S_0)\cap S_J=\phi$. Тогда $\partial\mathcal{B}_m\subset\mathcal{B}_{m-1}$, т.е. определен фактор-комплекс $\mathcal{C}=\bigoplus_m(\mathcal{E}_m/\mathcal{B}_m)$.

Теорема 1. *Группа $H_r^{lf}(\xi-S,L)$ при всех $r=0,\ldots,2k$ изоморфна $(r+n-2k)$-й группе гомологий комплекса $\mathcal{C}$. Если $\xi\in\Gamma_R$, а $h(J)$ – надлежащим образом нормированные циклы, построенные выше, то изоморфизм для $r=k$ можно выбрать так, что $h(J)$ переходит в образ элемента $e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_{n-k}}$ в $H_{n-k}(\mathcal{C})$, где $\{j_1,\ldots,j_{n-k}\}=\{1,\ldots,n\}-J$.*

Теорема 2. *Группа $H_r^{lf}(\xi-S,L)$ равна 0 при $0\leqslant r<k$.*

Если все τ_j отличны от 1 при $j\neq 0$, то $H_r^{lf}(\xi-S,L)=0$ и при $r>k$. Для общего страта последнее утверждение верно, уже если хотя бы одно из чисел τ_j отлично от 1.

Для общего страта и при дополнительных ограничениях на показатели τ_j теорема 2 установлена К. Аомото (см. [6]).

Из теорем 1 и 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть $\tau_j\neq 1$ при $j\neq 0$. Выберем произвольный линейный порядок $\prec$ на множестве $\{1,\ldots,n\}$, и пусть B – система всех регулярных k-подмножеств J в $\{1,\ldots,n\}$ (по отношению к страту Γ), удовлетворяющих следующему условию: если выбросить из J произвольный элемент j_0, а взамен добавить все $j\in\{1,\ldots,n\}$ такие, что $j_0\prec j$, то полученное множество должно содержать некоторое регулярное подмножество.*

Тогда классы $h(J)$ при $J\in B$ образуют базис в $H_k^{lf}(\xi-S,L)$.

Как мы увидим в п.3, следствие 1 дает чисто комбинаторное описание числа линейно-независимых гипергеометрических функций с данными показателями α_j на каждом основном страте Γ.

Следствие 2. *Если Γ – общий страт в $G_k(\mathbf{C}P^n)$ и $\tau_j\neq 1$ для некоторого j, то $\dim H_k^{lf}(\xi-S,L)=\binom{n-1}{k}$.*

Следствие 2 ранее установлено К. Аомото (см. [6]).

Следствие 3. *Пусть снова Γ – общий страт и j – такой индекс, что $\tau_j\neq 1$. Тогда классы $h(J)$ с всевозможными k-подмножествами J в $\{1,\ldots,n\}$, не содержащими j, образуют базис в $H_k^{lf}(\xi-S,L)$.*

3. Линейная независимость гипергеометрических функций.

Теорема 3. *Пусть Γ – основной страт в $G_k(\mathbf{C}P^n)$, $\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)$ – набор комплексных чисел с $\sum\alpha_j=n-k$, $\xi\in\Gamma$ и U – односвязная окрестность точки ξ в Γ. Предположим, что все α_j – нецелые при $j=1,2,\ldots,n$, и пусть L – соответствующая локальная система на $\xi-S$.*

Тогда если классы $h_1,\ldots,h_N$ в $H_k^{lf}(\xi-S,L)$ линейно-независимы, то соответствующие им гипергеометрические функции $\Phi_{h_i}(\alpha;\zeta;\omega)$, определенные при $\zeta\in U$, $\omega\in D(\zeta)$, также линейно-независимы. В случае, когда страт Γ общий, достаточно потребовать, чтобы $\tau_j\neq 1$ хотя бы для одного j.

Следствие 4. *Если ξ лежит в общем страте в $G_k(\mathbf{C}P^n)$, то число линейно-независимых решений системы уравнений из [2] вблизи точки ξ равно $\binom{n-1}{k}$.*

4. Доказательства. Теорема 1 вытекает из того, что размерности групп $H_r^{lf}(\xi-S,L)$ постоянны вдоль любого страта, и из следующего разбиения $\xi-S$ на клетки в случае вещественной ξ. Клетки коразмерности r в $\xi-S$ нумеруются r-подмножествами J в $\{1,\ldots,n\}$: клетка C_J состоит из точек $(x_0\ldots\ldots x_n)\in\xi-S$ таких, что $x_j/x_0\in i\mathbf{R}_+$ при $i\in J$ и $x_j/x_0\in i\mathbf{R}_+$ при $j\in J$. Тот факт, что C_J – клетка,

вытекает из того, что проекция C_J на $\mathrm{Re}(\xi - S_0)$ является расслоением со стягиваемыми слоями над линейным пространством.

Доказательство теоремы 2 основано на том, что если все показатели τ_j отличны от 1, то комплекс $\mathscr{C}$ из теоремы 1 изоморфен (с точностью до сдвига размерности) резольвенте, построенной в [3, приложение]; в частности, он имеет единственную ненулевую группу гомологий. Следствия 1–3 вытекают отсюда с помощью результатов [3].

Для доказательства теоремы 3 достаточно убедиться, что если h – ненулевой класс в $H_k^{lf}(\xi - S, L)$, то росток в точке ξ функции $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ отличен от 0. При этом можно считать, что $\xi \in \Gamma_R$; в этом случае удается явно построить петлю в Γ с началом и концом в точке ξ такую, что вариация ростка функции $\Phi_h(\alpha;\ \zeta, \omega)$ при аналитическом продолжении вдоль этой петли отлична от нуля. Вычисление этой вариации использует обобщенную формулу Пикара–Лефшеца (см. [7]).

Следствие 4 вытекает из следствия 2 и теоремы 3 с учетом оценки из [2].

Авторы признательны В.А. Голубевой, обратившей их внимание на новые работы К. Аомото.

Поступило
24 VI 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И.М.* – ДАН, 1986, т. 288, №1, с. 14–18. 2. *Гельфанд И.М., Гельфанд С.И.* – ДАН, 1986, т. 288, № 2, с. 279–283. 3. *Гельфанд И.М., Зелевинский А.В.* – Функц. анализ и его прилож., 1986, т. 20, № 3, с. 19–35. 4. *Deligne P., Mostow G.D.* Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monogromy. Preprint IHES/M/82/46, 1983. 5. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. II. М.: Наука, 1984. 6. *Aomoto K.* – Sci. Papers, Coll. Gen. Ed., Univ. Tokyo, 1978, vol. 27, p. 49–61. 7. *Фам Ф.* Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970. 184 с. 8. *Aomoto K.* – Adv. Studies in Pure Math., 1984, vol. 4, p. 165–179. 9. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

М.И. КАНОВИЧ

КВАЗИПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГОРИФМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ВЫПОЛНИМОСТИ И ВЫВОДИМОСТИ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 20 III 1985)

Решение задачи анализа состоит в построении эффективного алгорифма ρ, распознающего для произвольной задачи ζ из данного класса задач, разрешима ли задача ζ. В оценке времени работы алгорифма ρ на задаче ζ используется параметр $|\zeta|$ – длина записи задачи ζ. В некоторых случаях экспоненциальную общую задачу анализа удается разбить на подклассы полиномиальной сложности. Пусть каждая задача ζ характеризуется некоторым числом: уровнем (рангом) $r(\zeta)$. Алгорифм анализа ρ назовем квазиполиномиальным, если время работы алго-