B. S. Kalmurzaev, N. A. Bazhenov, M. A. Torebekova, Index sets for classes of positive preorders, *Algebra Logika*, 2022, Volume 61, Number 1, 42–76

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.103

Алгебра и логика, 61, № 1 (2022), 42—76

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.103 УДК 510.5

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ КЛАССОВ ПОЗИТИВНЫХ ПРЕДПОРЯДКОВ*)

Б. С. КАЛМУРЗАЕВ, Н. А. БАЖЕНОВ, М. А. ТОРЕБЕКОВА

Введение

В работе изучается алгоритмическая сложность естественных классов позитивных (вычислимо перечислимых) бинарных отношений, заданных на множестве натуральных чисел ω.

Пусть R и S — это бинарные отношения на ω. Отношение R *вычислимо сводится* к S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что для любых $x, y \in \omega$ выполнено

$$xRy \ \Leftrightarrow \ f(x)Sf(y).$$

Отношения R и S *вычислимо эквивалентны* (обозначается через $R \equiv_c S$), если $R \leq_c S$ и $S \leq_c R$.

Систематическое исследование c-степеней (т. е. степеней, индуцированных сводимостью $\leq_c$) для позитивных отношений эквивалентности начато в [1, 2]. В дальнейшем позитивные эквивалентности и их алгоритмические свойства изучались в [3–6]. В последние годы в серии работ [7–9]

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Минобрнауки РК, грант № AP08856493, работа второго из авторов выполнена в рамках гос. задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0011.

получены интересные глубокие результаты о степенной структуре **Ceers**, состоящей из c-степеней позитивных эквивалентностей. В частности, в [9] доказано, что теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Ceers})$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.

Зафиксируем универсальную вычислимую нумерацию α семейства всех позитивных эквивалентностей, заданных на ω. Пусть K — некоторый класс позитивных эквивалентностей. *Индексным множеством* класса K (относительно нумерации α) называют множество

$$I(K;\alpha) = \{e \in \omega : \alpha(e) \in K\}.$$

Исследование индексных множеств позволяет получать точные оценки алгоритмической сложности для классов эквивалентностей K. Приведём известный пример подобной оценки.

Напомним, что позитивную эквивалентность E называют *универсальной*, если $F \leq_c E$ для любой позитивной эквивалентности F.

Зафиксируем индекс $i_0 \in \omega$, такой что эквивалентность $\alpha(i_0)$ является универсальной. Нетрудно показать, что для произвольного $k \in \omega$ эквивалентность $\alpha(k)$ является универсальной в том и только том случае, если $\alpha(i_0) \leq_c \alpha(k)$, что в свою очередь эквивалентно следующему условию:

$$\begin{aligned} &\exists e\,[\,\text{функция } \varphi_e \text{ всюду определена и} \\ &\quad \forall x \forall y\,[(x,y) \in \alpha(i_0) \;\leftrightarrow\; (\varphi_e(x), \varphi_e(y)) \in \alpha(k)]]. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко установить, что (1) можно переписать в виде Σ^0_3-условия.

В [10] доказано, что индексное множество класса всех универсальных позитивных эквивалентностей является m-полным Σ^0_3-множеством. Этот результат показывает, что (1) даёт оптимальное синтаксическое описание для универсальных эквивалентностей.

Индексные множества для классов позитивных эквивалентностей изучались в [6, 7, 10–13]. Некоторые результаты этих работ подробно обсуждаются в § 1.

Здесь продолжаются исследования алгоритмических свойств позитивных предпорядков, начатые в [14–16]. Изучаются индексные множества для различных естественных классов предпорядков. В § 1 приводятся необходимые предварительные сведения. В § 2 приводятся некоторые простые результаты об индексных множествах. В § 3 доказывается, что индексное множество самополных позитивных предпорядков (см. опр. 1 в § 2) является Π^0_3-полным (теор. 10).

Пусть β — это универсальная вычислимая нумерация семейства всех позитивных предпорядков. В § 4 доказывается, что для любого позитивного предпорядка R, чей фактор-порядок бесконечен, индексное множество $\{k : R \leq_c \beta(k)\}$ является Σ^0_3-полным (теор. 11). Отсюда вытекает, что индексное множество универсальных позитивных предпорядков также Σ^0_3-полно.

В § 5 обсуждаются условия, облегчающие работу с индексными множествами для подклассов в семействе всех позитивных линейных предпорядков. В § 6 доказывается, что для позитивного линейного предпорядка L, такого что L не является самополным и фактор-порядок для L бесконечен, индексное множество $\{k : \beta(k) \equiv_c L\}$ будет Σ^0_3-полным (теор. 16). В § 7 доказывается, что индексное множество самополных линейных предпорядков является Π^0_3-полным (теор. 17). В § 8 обсуждаются открытые вопросы.

§ 1. Предварительные сведения

Предварительные сведения по теории вычислимости см. в [2, 17]. Если $x, y \in \omega$, то через $\langle x, y\rangle$ обозначается номер упорядоченной пары (x, y) в канторовской нумерации. Считаем, что вычислимые функции $l(z)$ и $r(z)$ удовлетворяют следующему условию: $z = \langle l(z), r(z)\rangle$ для всех $z \in \omega$. Будем пользоваться следующим соглашением: множество $R \subseteq \omega \times \omega$ отождествляется с множеством $R^1 = \{\langle x, y\rangle : (x, y) \in R\}$.

Квантор $\exists^\infty x$ означает „существует бесконечно много x“. Через Id обозначается тождественное отношение эквивалентности на ω. Через $\leq_{\mathbb{N}}$ обозначаем стандартный линейный порядок на ω. Для множества X через $\mathrm{card}\,(X)$ обозначается мощность X.

Пусть n — ненулевое натуральное число. Как обычно, термин *Σ^0_n-полное множество* является синонимом для m-полного Σ^0_n-множества. Будем использовать термин *Π^0_n-полное множество* аналогичным образом.

Если не оговорено противное, то считаем, что каждое рассматриваемое бинарное отношение задано на ω. Напомним, что бинарное отношение R называют *предпорядком*, если R рефлексивно и транзитивно. Предпорядок R является эквивалентностью, если отношение R симметрично. Для $a \in \omega$ и эквивалентности E через $[a]_E$ обозначается класс E-эквивалентности элемента a.

Пусть R и S — бинарные отношения. Запись $f\colon R \leq_c S$ означает, что f является всюду определённой вычислимой функцией, осуществляющей сводимость $R \leq_c S$.

В доказательствах будем использовать следующий факт [17, теор. 4.3.11]. Если $A \subseteq \omega$ — это Σ^0_3-множество, то существует вычислимый предикат $Q \subseteq \omega^3$ со свойствами

если $k \in A$, то существует единственный x, такой что $\exists^\infty y Q(k,x,y)$;

если $k \notin A$, то для каждого x выполнено $\neg\exists^\infty y Q(k,x,y)$.

1.1. Позитивные предпорядки. Если R — это позитивный предпорядок, то *вычислимой аппроксимацией* предпорядка R называем равномерную последовательность рекурсивных предпорядков $(R^s)_{s\in\omega}$ со следующими свойствами для каждого $s \in \omega$:

(1) $R^0 = \mathrm{Id}$ и $R^s \subseteq R^{s+1}$;

(2) множество $R^{s+1} \setminus R^s$ конечно;

(3) $R = \bigcup\limits_{s\in\omega} R^s$.

Для позитивного предпорядка R зададим бинарное отношение

$$\mathrm{supp}\,(R) = \{(x,y) : (xRy)\&(yRx)\}.$$

Ясно, что $\mathrm{supp}\,(R)$ является позитивной эквивалентностью. Кроме того, если R является эквивалентностью, то $\mathrm{supp}\,(R) = R$.

Иногда будем использовать следующие обозначения:

$x \leq_R y$ означает, что $(x,y) \in R$;

$x <_R y$ означает, что $(x,y) \in R$ и при этом $(y,x) \notin R$;

$x \sim_R y$ означает, что $(x, y) \in \operatorname{supp}(R)$.

Рассмотрим фактор-структуру $R/\operatorname{supp}(R) = (D; \leq_R)$, определённую по правилам:

носитель $R/\operatorname{supp}(R)$ состоит из классов эквивалентности $[x]_{\operatorname{supp}(R)}$, где $x \in \omega$;

для чисел x и y соотношение $[x]_{\operatorname{supp}(R)} \leq_R [y]_{\operatorname{supp}(R)}$ выполнено в том и только том случае, если $x \leq_R y$.

Нетрудно проверить, что фактор-структура $R/\operatorname{supp}(R)$ корректно определена и является частичным порядком.

Позитивный предпорядок R называется *линейным предпорядком*, если структура $R/\operatorname{supp}(R)$ является линейным порядком.

Следуя [16], будем использовать следующие обозначения:

$Ceers$ — это семейство всех позитивных эквивалентностей;

$Ceprs$ — семейство всех позитивных предпорядков;

$Celps$ — семейство всех позитивных линейных предпорядков.

Позитивный предпорядок R называют *универсальным*, если $Q \leq_c R$ для любого $Q \in Ceprs$. Нетрудно показать, что универсальные позитивные предпорядки существуют [18].

В [7] введено понятие самополной эквивалентности. Это понятие естественным образом обобщается на случай предпорядков:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [14, с. 281]. Говорят, что позитивный предпорядок R является *самополным*, если для любой вычислимой функции f, такой что $f\colon R \leq_c R$, её область значений $\operatorname{range}(f)$ пересекает все $\operatorname{supp}(R)$-классы, т. е.

$$\forall y \exists x [f(x) \sim_R y].$$

1.2. Вычислимые нумерации. Пусть $\mathcal{S}$ — не более чем счётное семейство подмножеств ω. *Нумерацией* ν семейства $\mathcal{S}$ называют произвольное сюръективное отображение из ω на $\mathcal{S}$. Говорят, что нумерация ν является *вычислимой*, если множество

$$\{(k, x) : k \in \omega,\ x \in \nu(k)\}$$

вычислимо перечислимо. Семейство $\mathcal{S}$ называют *вычислимым*, если $\mathcal{S}$ обладает вычислимой нумерацией.

Говорят, что нумерация ν *сводится* к нумерации μ (обозначается через $\nu \le \mu$), если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что

$$\nu(k) = \mu(f(k)) \text{ для всех } k \in \omega.$$

Отметим, что в данном определении, вообще говоря, семейство $\{\nu(k) : k \in \in \omega\}$ является *подсемейством* в $\{\mu(\ell) : \ell \in \omega\}$.

Вычислимую нумерацию α семейства $\mathcal{S}$ называют *универсальной* (*главной*), если $\nu \le \alpha$ для любой вычислимой нумерации ν для $\mathcal{S}$.

В [1, след. 1] доказано, что семейство всех позитивных эквивалентностей обладает универсальной вычислимой нумерацией α_{ceers}. Используя аналогичные рассуждения, легко показать, что семейство всех позитивных предпорядков также обладает универсальной вычислимой нумерацией α_{ceprs}. Кроме того, нетрудно установить, что нумерация α_{ceers} сводится к α_{ceprs}.

1.3. Индексные множества. Пусть K — это некоторый класс позитивных предпорядков. Если не оговорено противное, то под *индексным множеством* класса K будет пониматься множество

$$I(K; \alpha_{\mathrm{ceprs}}) = \{e \in \omega : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(e) \in K\}.$$

В случае, если $K \subseteq Ceers$, также можно рассматривать (задаваемое аналогично) индексное множество $I(K; \alpha_{\mathrm{ceers}})$.

В последние годы получены точные оценки сложности индексных множеств $I(K; \alpha_{\mathrm{ceers}})$ для многих естественных классов K позитивных эквивалентностей. Приведём некоторые из этих результатов.

ТЕОРЕМА 1 [11]. *Пусть E — это позитивная эквивалентность с бесконечным числом классов.*

(a) *Индексное множество $\{e : E \le_c \alpha_{\mathrm{ceers}}(e)\}$ является Σ^0_3-полным.*

(b) *Множество $\{e : E \equiv_c \alpha_{\mathrm{ceers}}(e)\}$ является Σ^0_3-полным.*

(c) *Если эквивалентность E не является универсальной, то множество $\{e : \alpha_{\mathrm{ceers}}(e) \le_c E\}$ также Σ^0_3-полное.*

Позитивную эквивалентность E называют *тёмной*, если E имеет бесконечно много классов и при этом $\mathrm{Id} \not\leq_c E$.

ТЕОРЕМА 2 [7]. *Индексное множество $I(K;\alpha_{\mathrm{ceers}})$ является Π^0_3-полным для каждого из следующих классов K:*

(a) *тёмные эквивалентности* [7, замеч. 12.1];

(b) *самополные эквивалентности* [7, теор. 12.2].

Позитивную эквивалентность E называют *слабо предполной*, если не существует всюду определённой вычислимой функции $d(x)$, для которой выполнено $\forall x\, [d(x) \not\sim_E x]$.

ТЕОРЕМА 3 [12, теор. 4.4]. *Индексное множество*

$$\{e : \alpha_{\mathrm{ceers}}(e) \text{ — слабо предполная эквивалентность}\}$$

является Π^0_3-полным.

Более подробное обсуждение результатов о позитивных эквивалентностях см. в [7, 12, 13, 19].

§ 2. Начальные результаты об индексных множествах

Вначале опишем способ оценки сложности индексных множеств $I(K;\alpha_{\mathrm{ceprs}})$ для некоторых классов $K \subseteq Ceprs$ специального вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть K — это некоторый класс позитивных предпорядков. Говорим, что K является supp-*определимым*, если существует класс K_{eq} позитивных эквивалентностей, такой что

$$K = \{R : \mathrm{supp}\,(R) \in K_{eq}\}. \tag{2}$$

В данном разделе для $i \in \omega$ положим

$$E_i := \alpha_{\mathrm{ceers}}(i) \text{ и } P_i := \alpha_{\mathrm{ceprs}}(i).$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $K \subseteq Ceprs$ — это* supp-*определимый класс, а $K_{eq} \subseteq Ceers$ — это класс эквивалентностей, удовлетворяющий соотношению* (2)*. Тогда*

$$I(K_{eq};\alpha_{\mathrm{ceers}}) \equiv_m I(K;\alpha_{\mathrm{ceprs}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нумерация α_{ceers} сводится к α_{ceprs}, поэтому существует вычислимая функция $f(x)$, такая что $E_k = P_{f(k)}$ для всех $k \in \omega$. Тогда

$$k \in I(K_{eq}; \alpha_{\text{ceers}}) \ \leftrightarrow\ E_k \in K_{eq} \ \leftrightarrow\ E_k = P_{f(k)} \in K \ \leftrightarrow\ f(k) \in I(K; \alpha_{\text{ceprs}}).$$

Значит, индексное множество $I(K_{eq}; \alpha_{\text{ceers}})$ m-сводится к множеству $I(K; \alpha_{\text{ceprs}})$.

Для $k \in \omega$ пусть $(P_{k,s})_{s\in\omega}$ — это вычислимая аппроксимация позитивного предпорядка P_k. Определим позитивное отношение эквивалентности F_k посредством его вычислимой аппроксимации — полагаем $F_{k,s} :=$ $:= \operatorname{supp}(P_{k,s})$. Нетрудно показать, что $(F_k)_{k\in\omega}$ индуцирует вычислимую нумерацию всего семейства $Ceers$.

Следовательно, существует вычислимая функция $g(x)$, такая что $F_k = E_{g(k)}$ для всех k. Тогда

$$\begin{aligned} k \in I(K; \alpha_{\text{ceprs}}) \ &\leftrightarrow\ P_k \in K \ \leftrightarrow\ \operatorname{supp}(P_k) \in K_{eq} \\ &\leftrightarrow\ F_k = E_{g(k)} \in K_{eq} \ \leftrightarrow\ g(k) \in I(K_{eq}; \alpha_{\text{ceers}}). \end{aligned}$$

Значит, $I(K; \alpha_{\text{ceprs}}) \equiv_m I(K_{eq}; \alpha_{\text{ceers}})$. $\square$

Теорема 4 применима для некоторых естественных классов предпорядков. Например, позитивный предпорядок R называют *слабо предполным*, если соответствующая эквивалентность $\operatorname{supp}(R)$ является слабо предполной. Следовательно, непосредственно из теорем 3 и 4 вытекает, что индексное множество слабо предполных предпорядков Π^0_3-полно.

Приведём некоторые результаты, которые можно получить применением теоремы 4 к известным результатам о позитивных эквивалентностях (определения соответствующих классов эквивалентностей см. в цитированных работах).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для следующих классов позитивных предпорядков K сложность индексного множества $I(K; \alpha_{\text{ceprs}})$ совпадает со сложностью индексного множества соответствующего класса позитивных эквивалентностей.*

(1) *Тёмные предпорядки: индексное множество Π^0_3-полное* [7];

(2) *светлые предпорядки*: Σ^0_3*-полное* [7];

(3) *слабо предполные предпорядки*: Π^0_3*-полное* [12];

(4) *предполные предпорядки*: Σ^0_3*-полное* [12];

(5) *e-полные предпорядки*: Σ^0_3*-полное* [12];

(6) *равномерно эффективно неотделимые предпорядки*: Σ^0_3*-полное* [10];

(7) *эффективно неотделимые предпорядки*: Π^0_4*-полное* [11];

(8) *u. f. p. предпорядки*: Σ^0_3*-полное* [12];

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно показать, что класс универсальных позитивных предпорядков не является supp-определимым. Кроме того, в предложении 9 будет установлено, что класс самополных предпорядков также не supp-определим.

Прежде чем переходить к индексным множествам для классов из замечания 1, построим ещё несколько несложных оценок индексных множеств.

2.1. Эквивалентности и линейные предпорядки (среди всех предпорядков). Установим сложность индексных множеств (внутри класса $Ceprs$) для класса позитивных эквивалентностей $Ceers$ и класса линейных предпорядков $Celps$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Индексные множества* $I_{Ceers} = I(Ceers; \alpha_{\mathrm{ceprs}})$ *и* $I_{Celps} = I(Celps; \alpha_{\mathrm{ceprs}})$ *являются* Π^0_2*-полными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что множества I_{Ceers} и I_{Celps} являются Π^0_2-множествами:

$$k \in I_{Ceers} \;\Leftrightarrow\; (\forall x, y)\,[xP_k y \to yP_k x],$$
$$k \in I_{Celps} \;\Leftrightarrow\; (\forall x, y)\,[xP_k y \;\vee\; yP_k x].$$

Установим Π^0_2-полноту этих индексных множеств. Пусть A — произвольное Π^0_2-множество. Выберем вычислимый предикат $Q(k, x, y)$, такой что

$$k \in A \;\Leftrightarrow\; \forall x \exists\, y Q(k, x, y).$$

Зададим позитивные предпорядки F_k и L_k по следующим правилам:

$$F_k = \mathrm{Id} \cup \{(2x, 2x+1) : x \in \omega\} \cup \{(2x+1, 2x) : \exists y\, Q(k, x, y)\},$$

$$L_k = \text{транзитивное замыкание множества } \mathrm{Id} \cup \{(x, x+1) \colon \exists y\, Q(k, x, y)\}.$$

В силу универсальности нумерации α_{ceprs} семейства $Ceprs$ существуют вычислимые функции f и g, такие что $F_k = P_{f(k)}$ и $L_k = P_{g(k)}$ для всех $k \in \omega$. Нетрудно проверить, что эквивалентны следующие условия:

$k \in A$;

$F_k = P_{f(k)}$ является отношением эквивалентности;

$L_k = P_{g(k)}$ есть линейный предпорядок.

Вычислимая функция f m-сводит множество A к I_{Ceers}, следовательно множество I_{Ceers} Π^0_2-полно. Аналогично устанавливается Π^0_2-полнота и для I_{Celps}. $\square$

2.2. Эквивалентности с конечным числом классов.

ТЕОРЕМА 7. *Индексное множество (относительно нумерации α_{ceers}) позитивных эквивалентностей R, таких что R имеет конечное число классов, является Σ^0_3-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I_{fin} индексное множество позитивных эквивалентностей R, имеющих лишь конечное число классов.

Пусть $k \in \omega$. Эквивалентность $E_k = \alpha_{\mathrm{ceers}}(k)$ имеет конечное число классов в том и только том случае, если

$$\bigvee_{i \geq 1} \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_i \forall y\, [(y, x_1) \in E_k \vee (y, x_2) \in E_k \vee \cdots \vee (y, x_i) \in E_k].$$

Отсюда вытекает, что $I_{fin} \in \Sigma^0_3$.

Пусть A — произвольное Σ^0_3-множество. Для того, чтобы установить Σ^0_3-полноту I_{fin}, достаточно построить равномерную последовательность позитивных эквивалентностей $(F_k)_{k\in\omega}$ со следующим свойством:

$$k \in A \;\Leftrightarrow\; F_k \text{ имеет конечное число классов.} \tag{3}$$

Выберем вычислимый предикат $P(k, x, y)$, такой что

$$k \in A \;\Leftrightarrow\; \exists x \exists^{\infty} y\, P(k, x, y). \tag{4}$$

На шаге s конструкции будем строить вспомогательную инъективную функцию u_s, такую что $\mathrm{dom}\,(u_s) = \{0, 1, \ldots, s\}$.

Шаг 0. Определим $F_k^0 := \mathrm{Id}$ и $u_0(0) := 0$.

Шаг $s+1$. Пусть $s = \langle \ell, m \rangle$. Заметим, что $\ell \leq s$.

Находим наименьшее число a, для которого класс $[a]_{F_k^s}$ одноэлементен и $a \notin \mathrm{range}(u_s)$. Полагаем $u_{s+1}(s+1) := a$.

Если $P(k, \ell, m)$ истинно, то рассмотрим конечное множество

$$X = \bigcup_{\ell \leq t \leq s} [u_s(t)]_{F_k^s}.$$

Определим $F_k^{s+1} := F_k^s \cup (X \times X)$. Для каждого $t \leq s$ зададим значение $u_{s+1}(t)$ по правилам:

если $t \leq \ell$, то $u_{s+1}(t) = u_s(t)$;

если $t > \ell$, то находим наименьшее число b, для которого класс $[b]_{F_k^{s+1}}$ одноэлементен и b ещё не попало в $\mathrm{range}(u_{s+1})$. Полагаем $u_{s+1}(t) = b$.

Если $P(k, \ell, m)$ ложно, то переходим к следующему шагу.

Описание конструкции завершено. Полагаем $F_k := \bigcup_{s \in \omega} F_k^s$. Нетрудно проверить, что $(F_k)_{k \in \omega}$ — равномерная последовательность позитивных эквивалентностей.

Предположим, что $k \in A$. В силу (4) существует (наименьшее) ℓ_0, такое что $\exists^\infty m\, P(k, \ell_0, m)$. Выберем шаг s_0, такой что

$$(\forall x < \ell_0)(\forall y \geq s_0) \neg P(k, x, y).$$

Из описания конструкции вытекает, что $u_s(\ell_0) = u_{s_0}(\ell_0) := u_0^*$ для всех $s \geq s_0$.

Рассмотрим конечное множество

$$Y = \bigcup_{t \leq s_0} \{[z]_{F_k^{s_0}} : z \in \mathrm{range}(u_t)\}.$$

Из описания конструкции вытекает, что для любого $a \in \omega \setminus Y$ найдётся шаг $s_1 \geq s_0$, на котором $a = u_{s_1}(z)$ для некоторого $z > \ell_0$.

Выберем наименьшее m, такое что $\langle \ell_0, m \rangle \geq s_1$ и истинно $P(k, \ell_0, m)$. Тогда элемент $a = u_{s_1}(z)$ будет $F_k^{\langle \ell_0, m \rangle + 1}$-эквивалентным u_0^*. Поэтому F_k имеет лишь конечное число классов.

Предположим теперь, что $k \notin A$. Пусть N — натуральное число. В силу соотношения (4) существует шаг s_0, такой что

$$(\forall x \leq N)(\forall y \geq s_0)\neg P(k, x, y).$$

Тогда для каждого $\ell \leq N$ выполнено $u_s(\ell) = u_{s_0}(\ell) := u^*_\ell$ при $s \geq s_0$, и элементы $u^*_0, u^*_1, \ldots, u^*_N$ попарно не F_k-эквивалентны.

В силу произвольности выбора N получаем, что F_k имеет бесконечное число классов, при этом каждый F_k-класс будет конечным. Заключаем, что соотношение (3) выполнено. $\square$

Из теоремы 4 и конструкции теоремы 7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. (1) *Индексное множество позитивных эквивалентностей R, таких что в R каждый класс эквивалентности конечен, является Π^0_3-полным* [6, предл. 5.8].

(2) *Позитивные предпорядки R, обладающие лишь конечным числом классов* $\mathrm{supp}\,(R)$*-эквивалентности, имеют Σ^0_3-полное индексное множество.*

§ 3. Самополные позитивные предпорядки

Вначале покажем, что класс самополных предпорядков не является supp-определимым, см. определение 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Существует самополный позитивный предпорядок R, такой что отношение эквивалентности* $\mathrm{supp}\,(R)$ *не будет самополным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательный рекурсивный частичный порядок

$$\begin{aligned} R_0 := \mathrm{Id} \cup \left\{(x,y) : \left[\frac{x}{4}\right] <_{\mathbb{N}} \left[\frac{y}{4}\right]\right\} \\ \cup \{(4x, 4x+i) : i \in \{1,2,3\},\ x \in \omega\} \\ \cup \{(4x+i, 4x+1) : i \in \{2,3\},\ x \in \omega\}, \end{aligned}$$

где $[x/n]$ — это целая часть дроби x/n. Заметим, что в частичном порядке R_0 число вида $4x+2$ несравнимо только с элементом $4x+3$.

Пусть W — это простое в. п. множество. Определим позитивный предпорядок R следующим образом:

$$R = R_0 \cup \{(4x+2, 4x+3), (4x+3, 4x+2) : x \in W\}.$$

Покажем, что предпорядок R является самополным. Пусть f — это вычислимая функция, сводящая R к R. Заметим, что R-несравнимая пара $4x+2, 4x+3$ обязана отображаться в R-несравнимую пару. Допустим, что $x_0 \notin W$ и $f(4x_0+2) \in \{4x_1+2, 4x_1+3\}$ для некоторого $x_1 \neq x_0$. Покажем, что $x_1 \notin W$ и $x_1 >_{\mathbb{N}} x_0$. Элемент $4x_0+3$ несравним (относительно R) с $4x_0+2$, а следовательно существует элемент y, несравнимый с $f(4x_0 + + 2)$. Это возможно лишь в случае, когда $x_1 \notin W$. Теперь допустим, что $x_1 <_{\mathbb{N}} x_0$. Тогда количество классов $[z]_{\mathrm{supp}\,(R)}$, таких что $z \leq_R f(4x_0+2)$, строго меньше, чем количество классов $[u]_{\mathrm{supp}\,(R)}$ с условием $u \leq_R 4x_0+2$; противоречие с тем, что f сводит отношение R к R.

Далее можно показать, что $f(4x_1+2) \in \{4x_2+2, 4x_2+3\}$ для некоторого $x_2 \notin W$ с условием $x_2 >_{\mathbb{N}} x_1$. Проводя аналогичные рассуждения, можно построить бесконечную вычислимую последовательность $(x_k)_{k\in\omega}$, лежащую во множестве $\omega \setminus W$, что противоречит простоте множества W.

Из приведённого выше рассуждения получаем, что $f(4x+2), f(4x + + 3) \in \{4x+2, 4x+3\}$ для каждого $x \notin W$. Если $x_0 <_{\mathbb{N}} x_1$ и $(\omega \setminus W) \cap \cap \{z : x_0 \leq_{\mathbb{N}} z \leq_{\mathbb{N}} x_1\} = \{x_0, x_1\}$, то легко показать, что существует лишь конечное число y, для которых $4x_0+2 <_R y <_R 4x_1+2$. Кроме того, $f(y) \sim_R \sim_R y$ для каждого такого y. Поэтому сводимость f является сюръективной на $\mathrm{supp}\,(R)$-классах, а сам предпорядок R — самополным.

Рассмотрим теперь эквивалентность $\mathrm{supp}\,(R)$. Каждый $\mathrm{supp}\,(R)$-класс состоит из не более чем двух элементов, кроме того, классы $[4x]_{\mathrm{supp}\,(R)}$ и $[4x+1]_{\mathrm{supp}\,(R)}$ одноэлементны. Значит, функция

$$g(z) = \begin{cases} z+4, & \text{если } z \text{ делится на } 4, \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

сводит $\mathrm{supp}\,(R)$ к $\mathrm{supp}\,(R)$, при этом множество $range(g)$ не пересекает класс $[0]_{\mathrm{supp}\,(R)}$. Значит, отношение $\mathrm{supp}\,(R)$ не является самополным. $\square$

Несмотря на то, что класс самополных предпорядков не является supp-определимым, несложное рассуждение позволяет перенести теорему 2(b) на случай предпорядков.

ТЕОРЕМА 10. *Индексное множество*

$$\{k : \textit{предпорядок } \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k) \textit{ самополный}\}$$

является Π^0_3*-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство самополноты предпорядка $P_k :=$ $:= \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k)$ эквивалентно условию

$$\begin{aligned}(\forall e)\,[\exists y\,(\varphi_e(y)\uparrow) \vee [(\forall u,v)\,[u \leq_{P_k} v \leftrightarrow \varphi_e(u) \leq_{P_k} \varphi_e(v)]\\ \to (\forall a \exists b)\,(a \sim_{P_k} \varphi_e(b))]],\end{aligned}$$

что эквивалентно Π^0_3-формуле.

Чтобы показать Π^0_3-полноту, воспользуемся конструкцией [7, теор. 12.2]. В этой конструкции для данного Π^0_3-множества A строится равномерная последовательность позитивных эквивалентностей $(F_k)_{k\in\omega}$ с условием

$$k \in A \;\Leftrightarrow\; F_k \text{ — самополное отношение.}$$

Отображение $\alpha\colon k \mapsto F_k$ является вычислимой нумерацией некоторого подсемейства в $Ceprs$. Следовательно, α сводится к универсальной нумерации α_{ceprs} посредством некоторой вычислимой функции f. Получаем, что выполнено следующее: $k \in A$ в том и только том случае, если $\alpha_{\mathrm{ceprs}}(f(k))$ — это самополный предпорядок. $\square$

§ 4. Верхний конус над данной c-степенью

Докажем, что аналог теоремы 1(a) выполнен и для случая позитивных предпорядков.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть F — это позитивный предпорядок с бесконечным числом* $\mathrm{supp}\,(F)$*-классов. Индексное множество* $\{k : F \leq_c \leq_c \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k)\}$ *является* Σ^0_3*-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $F \leq_c P_k$ (где $P_k = \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k)$) эквивалентно условию

$$(\exists e)\,[(\forall y)\,[\varphi_e(y)\downarrow]\ \&\ (\forall u, v)\,[u \leq_F v \leftrightarrow \varphi_e(u) \leq_{P_k} \varphi_e(v)]],$$

что является Σ^0_3-условием на k.

Покажем теперь Σ^0_3-полноту. Известен следующий факт: если предпорядок F имеет бесконечно много классов, то фактор-структура $F/\mathrm{supp}\,(F)$ содержит или подпорядок одного из типов ω или ω^*, или бесконечную антицепь.

Пусть A — Σ^0_3-множество. Зафиксируем вычислимый предикат $Q(x, y, z)$, такой что для любого $k \in \omega$ выполнено

$$k \in A \iff (\exists y \exists^\infty z) Q(k, y, z).$$

Выберем вычислимую аппроксимацию $\{F^s\}_{s\in\omega}$ для нашего позитивного предпорядка F.

Для данного $k \in \omega$ построим вычислимую функцию $r(y, s)$, частично вычислимую функцию $b(y, s)$ и вычислимую аппроксимацию $\{R_{k,s}\}_{s\in\omega}$.

К о н с т р у к ц и я.

Ш а г 0. Для каждого y зададим $r(y, 0) = 0$, $b(y, 0) = 2y$ и $R_{k,0} = \mathrm{Id}$.

Ш а г $s+1$. Пусть $y = l(s)$ и $z = r(s)$. Для каждого $w \neq y$ определим $r(w, s+1) = r(w, s)$. Рассмотрим следующие два случая.

С л у ч а й 1. Если выполнено $\neg Q(k, y, z)$, то полагаем $r(y, s+1) = r(y, s)$ и $R_{k,s+1} = R_{k,s}$.

С л у ч а й 2. Если выполнено $Q(k, y, z)$, то зададим $r(y, s+1) = r(y, s)+1$, и определим $b(y, r(y, s+1))$ как наименьшее число, на данный момент не лежащее в области значений функции $b(\cdot,\cdot)$. Полагаем

$$R_{k,s+1} = R_{k,s} \cup \{(b(y, i), b(y, j)) : i, j \leq_{\mathbb{N}} r(y, s+1)\ \&\ i \leq_{F^s} j\}.$$

Описание конструкции завершено. Определяем R_k следующим образом:

$$R_k = \begin{cases} \left(\bigcup\limits_s R_{k,s}\right) & \\ \cup\{(b(y_1,i), b(y_2,j)) : & \\ (y_1 <_{\mathbb{N}} y_2) \,\&\, b(y_1,i)\downarrow & \\ \&\, b(y_2,j)\downarrow\}, & \text{если } F/\mathrm{supp}\,(F) \text{ содержит} \\ & \text{бесконечную антицепь,} \\ \bigcup\limits_s R_{k,s} & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (Rk)$$

Для данного $y \in \omega$ предпорядок $R_k \restriction [\mathrm{range}(\lambda i.b(y,i))]$ будем называть *y-ой коробкой* в R_k. Установим основные свойства описанной конструкции.

ЛЕММА 4.1. *Если для некоторого y существует бесконечно много z, удовлетворяющих $Q(k,y,z)$, то функция $\lambda i.b(y,i)$ всюду определена и сводит F к R_k.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого числа y в ходе выполнения конструкции случай 2 выполняется бесконечно часто, поэтому $\lim\limits_s r(y,s) = \infty$. Следовательно, функция $\lambda i.b(y,i)$ всюду определена. Для элементов $i,j \in \omega$ условие $i \leq_F j$ выполнено в том и только том случае, если найдётся шаг s^*, такой что $i \leq_{F^{s^*}} j$, а оба значения $b(y,i)$ и $b(y,j)$ определены на шаге s^*. В свою очередь, это условие эквивалентно тому, что $b(y,i) \leq_{R_{k,s^*}} b(y,j)$. Следовательно, функция $\lambda i.b(y,i)$ сводит F к R_k. $\square$

ЛЕММА 4.2. *Если для каждого $y \in \omega$ множество $\{z : Q(k,y,z)\}$ конечно, то имеет место $F \not\leq_c R_k$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для каждого y соответствующая y-ая коробка конечна. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $F/\mathrm{supp}\,(F)$ не содержит бесконечную антицепь. Тогда $F/\mathrm{supp}\,(F)$ содержит бесконечный линейный порядок. По (Rk) предпорядок R_k определяется как дизъюнктная сумма коробок. Если функция $f(x)$ осуществляет сводимость $F \leq_c R_k$, то f отображает бесконечный линейный предпорядок в одну из конечных коробок в R_k; противоречие.

Случай 2. Пусть $F/\mathrm{supp}\,(F)$ содержит бесконечную антицепь. В силу (Rk) все коробки линейно $\leq_{R_k}$-упорядочены: если элементы u и v лежат в разных коробках, то имеет место $u <_{R_k} v$ или $v <_{R_k} u$. Если функция f осуществляет сводимость $F \leq_c R_k$, то f-образ бесконечной антицепи пересекается с бесконечным числом коробок. Следовательно, найдутся элементы a и b, несравнимые относительно F, но при этом $f(a) <_{R_k} f(b)$; противоречие. □

Нетрудно показать, что $\{R_k\}_{k\in\omega}$ является вычислимой нумерацией некоторого подсемейства в $Ceprs$. Значит, существует вычислимая функция $g(x)$, такая что $R_k = \alpha_{\mathrm{ceprs}}(g(k))$ для всех $k \in \omega$.

Если $k \in A$, то $\exists y \exists^\infty z Q(k, y, z)$. По лемме 4.1 имеет место $F \leq_c R_k$. Если же $k \notin A$, то для каждого y существует лишь конечное число z с условием $Q(k, y, z)$. По лемме 4.2 выполнено $F \not\leq_c R_k$. Поэтому функция $g(x)$ m-сводит множество A к нашему индексному множеству. □

Если в теореме 11 в качестве F взять некоторый универсальный позитивный предпорядок, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 12. *Индексное множество $\{k : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k)$ — универсальный предпорядок$\}$ является Σ^0_3-полным.*

§ 5. Нумерации для позитивных линейных предпорядков

Далее сконцентрируем внимание на подклассах семейства $Celps$, состоящего из всех позитивных линейных предпорядков. Напомним, что семейство $Ceers$ всех позитивных эквивалентностей имеет универсальную вычислимую нумерацию. Неприятным обстоятельством при изучении индексных множеств позитивных линейных предпорядков является отсутствие вычислимых нумераций семейства $Celps$.

ТЕОРЕМА 13. *Не существует вычислимой нумерации семейства $Celps$ всех позитивных линейных предпорядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\nu\colon \omega \to Celps$ — это вычислимая нумерация семейства $Celps$. Построим рекурсивный линейный порядок L, такой что $L \neq \nu(k)$ для всех $k \in \omega$; тем самым придём к противоречию.

Пусть $\{\nu_s(k)\}_{s\in\omega}$ — это вычислимая аппроксимация для $\nu(k)$. Искомый порядок L строится следующим образом.

Шаг 0. Зададим рекурсивный частичный порядок L^0 по правилам: $\mathrm{Id} \subseteq L^0$ и

$$x <_{L^0} y \;\Leftrightarrow\; \left[\frac{x}{2}\right] <_{\mathbb{N}} \left[\frac{y}{2}\right].$$

Отметим, что для каждого $m \in \omega$ элементы $2m$ и $2m+1$ несравнимы относительно L^0.

Шаг $s+1$. Для каждого $k \leq s$ поступаем следующим образом.

(1) Если $(2k, 2k+1) \in \nu_{s+1}(k) \setminus \nu_s(k)$, то добавляем в L^{s+1} пару $(2k+1, 2k)$ и запрещаем склеивать эту пару в строящемся L: более формально, объявляем, что $(2k, 2k+1) \notin L^t$ для всех $t \in \omega$.

(2) Если $(2k, 2k+1) \notin \nu_{s+1}(k)$ и $(2k+1, 2k) \in \nu_{s+1}(k) \setminus \nu_s(k)$, то добавляем в L^{s+1} пару $(2k, 2k+1)$ и запрещаем склеивать эту пару, т. е. $(2k+1, 2k) \notin L^t$ для всех $t \in \omega$.

Описание конструкции завершено. Несложно заметить, что построенная структура $L = \bigcup\limits_s L^s$ является позитивным предпорядком. Докажем, что L также является рекурсивным и линейным. Достаточно установить, что для любых $u, v \in \omega$, таких что $u \neq v$, справедливо $u <_L v$ или $v <_L u$. Если $|u - v| > 1$, то требуемое условие очевидным образом вытекает из определения L^0.

Предположим теперь, что $u = 2e$ и $v = 2e+1$. Поскольку структура $\nu(e)$ является линейным предпорядком, пара чисел u и v сравнима относительно предпорядка $\nu(e)$. Следовательно, найдётся (единственное) s^*, для которого выполнено в точности одно из двух условий:

(a) $(2e, 2e+1) \in \nu_{s^*+1}(e) \setminus \nu_{s^*}(e)$ (при этом верно или $(2e+1, 2e) \notin \nu_{s^*+1}(e)$, или $(2e+1, 2e) \in \nu_{s^*+1}(e) \setminus \nu_{s^*}(e)$);

(b) $(2e+1, 2e) \in \nu_{s^*+1}(e) \setminus \nu_{s^*}(e)$ и $(2e, 2e+1) \notin \nu_{s^*+1}(e)$.

В зависимости от того, какой из случаев (a) или (b) выполнен, в L^{s^*+1} перечислится в точности одна из пар (u, v) или (v, u), при этом добавление оставшейся пары будет навсегда запрещено. Отсюда вытекает, что порядок L является рекурсивным и линейным.

Из описания конструкции ясно, что $L \neq \nu(e)$ для всех $e \in \omega$. Действительно, если $(2e, 2e+1) \in \nu(e)$, то $(2e, 2e+1) \notin L$. Если $(2e+1, 2e) \in \nu(e)$ и $(2e, 2e+1) \notin \nu(e)$, то $(2e+1, 2e) \notin L$. $\square$

Итак, семейство всех позитивных линейных предпорядков $Celps$ не имеет вычислимых нумераций. В связи с этим, при исследовании индексных множеств для подклассов $Celps$ будем пользоваться следующим естественным надсемейством семейства $Celps$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Зададим семейство $\mathcal{S}_{lin}$ позитивных предпорядков по правилу

$$\mathcal{S}_{lin} = Celps \cup \{\mathrm{Id} \cup L' : L' \text{ — линейный предпорядок на некотором конечном начальном сегменте } \omega\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Существует универсальная вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}_{lin}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_e = \alpha_{\mathrm{ceprs}}(e)$ для $e \in \omega$. Зафиксируем вычислимую аппроксимацию семейства всех позитивных предпорядков $\{P_e^s\}_{e,s\in\omega}$. Будем строить аппроксимацию вычислимой нумерации ν для семейства $\mathcal{S}_{lin}$ следующим образом.

Шаг 0. Полагаем $\nu^0(e) = \mathrm{Id}$.

Шаг $s+1$. Находим максимальное число $b(s+1) \leq s+1$, такое что множества

$$P_e^{s+1} \cap \{0, 1, \ldots, b(s+1)\}^2 \text{ и } (\nu^s(e) \cup P_e^{s+1}) \cap \{0, 1, \ldots, b(s+1)\}^2$$

являются линейными предпорядками. Полагаем

$$\nu^{s+1}(e) = \nu^s(e) \cup (P_e^{s+1} \cap \{0, 1, \ldots, b(s+1)\}^2).$$

Как обычно, зададим $\nu(e) = \bigcup_s \nu^s(e)$. Нетрудно проверить следующее. Если P_e принадлежит семейству $\mathcal{S}_{lin}$, то $\nu(e) = P_e$. В противном случае $\nu(e)$ имеет вид $Id \cup L'$, где L' — это линейный предпорядок на некотором начальном сегменте ω.

Пусть теперь μ — это некоторая вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}_{lin}$. В силу универсальности нумерации α_{ceprs} (как нумерации семейства всех позитивных предпорядков), существует вычислимая функция $g(x)$, такая что $\mu(x) = P_{g(x)}$ для всех $x \in \omega$. Отсюда получаем, что $\mu(x) = \nu(g(x))$. Значит, ν — универсальная вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}_{lin}$. $\square$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. В дальнейшем для $k \in \omega$ через $\nu_{\mathrm{lin}}(k)$ обозначается позитивный предпорядок, имеющий номер k в построенной в предложении 14 универсальной нумерации ν для семейства $\mathcal{S}_{lin}$.

Установим сложность индексного множества для $\nu_{\mathrm{lin}}(k)$, являющихся линейными предпорядками. В дальнейшем будем считать, что обозначение L_k является сокращённой формой записи для $\nu_{\mathrm{lin}}(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Индексное множество линейных предпорядков $LP = \{i : \nu_{\mathrm{lin}}(i)$ — линейный предпорядок$\}$ является Π^0_2-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что LP является Π^0_2-множеством. Действительно,

$$i \in LP \;\Leftrightarrow\; (\forall x, y)[xL_iy \;\vee\; yL_ix],$$

что, в свою очередь, эквивалентно Π^0_2-условию.

Теперь покажем Π^0_2-полноту этого множества. Пусть A — произвольное Π^0_2-множество. Для A существует вычислимый предикат $P(x, y)$ со свойством

$$k \in A \;\Leftrightarrow\; \exists^{\infty} y\,[P(k, y)].$$

Для данного $k \in \omega$ будем строить вычислимую аппроксимацию позитивного предпорядка R_k следующим образом. Полагаем $R_{k,0} = \mathrm{Id}$ и

$$R_{k,s+1} := \begin{cases} (\omega \upharpoonright [0, s]) \cup \mathrm{Id}, & \text{если } P(k, s), \\ R_{k,s}, & \text{если } \neg P(k, s), \end{cases}$$

где $\omega \upharpoonright [0, s]$ — это стандартный линейный порядок на начальном сегменте натуральных чисел $[0, s]$.

Определим $R_k := \bigcup_s R_{k,s}$. Легко проверить, что $k \in A$ в том и только том случае, если R_k — стандартный линейный порядок на ω. Поскольку $\{R_k\}_{k\in\omega}$ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства в $\mathcal{S}_{lin}$, существует вычислимая функция $g(x)$, такая что $R_k = L_{g(k)}$ для всех $k \in \omega$. Ясно, что функция g осуществляет m-сводимость множества A к индексному множеству LP. $\square$

§ 6. О c-степени данного линейного предпорядка

Докажем, что аналог теоремы 1(b) выполнен для линейных предпорядков, не являющихся самополными.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Если R и S — позитивные линейные предпорядки, то через $R \veebar S$ обозначаем позитивный линейный предпорядок, определённый следующим образом. Для натуральных чисел x и y пара (x, y) лежит в $R \veebar S$ в том и только том случае, если выполнено одно из трёх условий:

$x = 2k$, $y = 2\ell$ и $k \le_R \ell$;

$x = 2k+1$, $y = 2\ell+1$ и $k \le_S \ell$;

$x = 2k$ и $y = 2\ell + 1$.

ТЕОРЕМА 16. *Пусть L — позитивный линейный предпорядок, не являющийся самополным и имеющий бесконечное число* $\mathrm{supp}\,(L)$*-классов. Тогда индексное множество $\{i : \nu_{\mathrm{lin}}(i) \equiv_c L\}$ является Σ^0_3-полным, поэтому и множество $\{k : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(k) \equiv_c L\}$ также Σ^0_3-полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что наше индексное множество имеет сложность Σ^0_3. Действительно,

$$\begin{aligned} L_i \equiv_c L \ \Leftrightarrow \ (\exists e_1, e_2)\big[(&\varphi_{e_1} \text{ и } \varphi_{e_2} \text{ всюду определены}) \\ &\&\quad (L_i \le_c L \text{ посредством } \varphi_{e_1}) \\ &\&\quad (L \le_c L_i \text{ посредством } \varphi_{e_2})\big]. \end{aligned}$$

Теперь установим Σ^0_3-полноту. Пусть A — это произвольное Σ^0_3-множество. Выберем вычислимый предикат $Q(x, y, z)$, такой что

$$x \in A \ \Leftrightarrow \ (\exists y \exists^\infty z)\,[Q(x, y, z)]$$

для всех $x \in \omega$. Без ограничения общности можно считать, что имеет место $\forall x \forall z \neg Q(x, 0, z)$.

По данному $x \in \omega$ построим позитивный линейный предпорядок R_x так, чтобы $R_x \equiv_c L$ в том и только том случае, если $x \in A$.

Предпорядок L не является самополным, поэтому существует вычислимая функция $f(x)$, сводящая L к L, для которой найдётся элемент $a_0 \in \omega$, такой что $[a_0]_{\mathrm{supp}\,(L)} \cap \mathrm{range}(f) = \varnothing$.

Множества $U = \{x \colon f(x) \leq_L a_0\}$ и $V = \{x \colon a_0 \leq_L f(x)\}$ вычислимы (в силу того, что они вычислимо перечислимы и образуют разбиение ω). Без ограничения общности можно считать, что оба множества непусты (случай, когда $U = \varnothing$ или $V = \varnothing$, рассматривается аналогично).

Существуют вычислимые функции $g_1 \colon \omega \to U$ и $g_2 \colon \omega \to V$, являющиеся сюръективными. Определим предпорядки L^l и L^r следующим образом:

$$(x, y) \in L^l \;\Leftrightarrow\; g_1(x) \leq_L g_1(y) \;\text{ и }\; (x, y) \in L^r \;\Leftrightarrow\; g_2(x) \leq_L g_2(y).$$

Нетрудно показать, что L^l и L^r являются позитивными линейными предпорядками, при этом $L^l \veebar L^r \equiv_c L$.

ЛЕММА 6.1. *Пусть k — ненулевое натуральное число. Тогда*

$$L^l \veebar \mathbf{k} \veebar L^r \equiv_c L,$$

где через $\mathbf{k}$ *обозначается позитивный линейный предпорядок M_k, такой что* $\mathrm{supp}\,(M_k)$ *имеет в точности k классов эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $f \colon L \leq_c L$, при этом $[a_0]_{\mathrm{supp}\,(L)} \cap \mathrm{range}(f) = \varnothing$. Без ограничения общности, можно считать, что $f(a_0) >_L a_0$ (случай, когда $f(a_0) <_L a_0$, рассматривается аналогично).

Функция
$$f^{(k)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{k \text{ раз}}(x)\dots))$$
вычислимо сводит L к L, при этом для каждого из элементов

$$v \in \{a_0, f(a_0), f^{(2)}(a_0), \dots, f^{(k-1)}(a_0)\}$$

выполнено $v \in V$ и $[v]_{\mathrm{supp}\,(L)} \cap \mathrm{range}(f^{(k)}) = \varnothing$. Опираясь на функции $g_1 \circ f^{(k)}$ и $g_2 \circ f^{(k)}$, теперь нетрудно построить сводимость $h\colon L^l \veebar \mathbf{k} \veebar L^r \leq_c L$. Говоря неформально, при этом k лишних классов отображаются функцией h в элементы $a_0, f(a_0), \dots, f^{(k-1)}(a_0)$.

Сводимость $\xi\colon L \leq_c L^l \veebar \mathbf{k} \veebar L^r$ нетрудно восстановить, опираясь на сводимость $\psi\colon L \leq_c L^l \veebar L^r$. $\square$

Отметим, что в случае, когда одно из множеств U или V является пустым, необходимо рассмотреть следующие предпорядки:

L^l задаётся как отношение $\mathrm{Id}_1 = \omega \times \omega$, если $U = \varnothing$;

$L^r := \mathrm{Id}_1$, если $V = \varnothing$.

Пусть $\{L^l_s\}_{s\in\omega}$ и $\{L^r_s\}_{s\in\omega}$ — это вычислимые аппроксимации линейных предпорядков L^l и L^r соответственно. Можно считать, что все $k, s \in \omega$ удовлетворяют следующему: если отношение $L^l_s \cap [0,k]^2$ является линейным предпорядком, то для любого $s_1 \geq s$ отношение $L^l_{s_1} \cap [0,k]^2$ также будет линейным предпорядком. Считаем, что аппроксимация L^r_s также удовлетворяет аналогичному условию.

Конструкцию разделим на два случая: $L/\mathrm{supp}\,(L) \ncong \zeta$ и $L/\mathrm{supp}\,(L) \cong \zeta$, где ζ — это стандартное упорядочение целых чисел.

Случай (I). Пусть $L/\mathrm{supp}\,(L) \ncong \zeta$.

Для данного $x \in \omega$ будем строить вычислимую аппроксимацию $\{R_{x,s}\}_{s\in\omega}$ и частично вычислимую функцию $b(y,r,s)$, действующую из $\mathbb{Z} \times \omega^2$ в ω. В конце каждого шага s будем транзитивно замыкать отношение $R_{x,s}$.

Для целого числа y (на шаге s) *коробкой* $\boxed{y}$ будем называть ограничение строящегося предпорядка на уже построенные элементы вида $b(y,r,s)$, где $r \in \omega$. Считаем, что коробки в $R_{x,s}$ располагаются так же, как в стандартном порядке ζ (т. е. если $y_0 <_{\mathbb{Z}} y_1$, то к концу шага s полагаем, что $b(y_0,r_0,s) <_{R_{x,s}} b(y_1,r_1,s)$ для любых $r_0, r_1 \in \omega$).

Конструкция.

Шаг 0. Пусть $R_{x,0} = \mathrm{Id}$, при этом $b(y,u,0)\uparrow$ для любого $y \in \mathbb{Z}$, и все коробки пусты.

Шаг $s+1$. Пусть $y = l(s)$ и $z = r(s)$. Находим наибольшие числа k и

m, такие что $k, m \leq \operatorname{card}\{i : i \leq z \,\&\, Q(x,y,i)\}$, а $L^l_s \cap [0,k]^2$ и $L^r_s \cap [0,m]^2$ — линейные предпорядки.

Если коробка $\boxed{y}$ не пуста и верно $Q(x,y,z)$, то поступаем следующим образом.

(i) Все элементы в коробках, больших чем $\boxed{y}$, склеиваем с наибольшим $\operatorname{supp}(R_{x,s})$-классом в коробке $\boxed{y}$. Говоря более формально, находим $\leq_{R_{x,s}}$-наибольший класс $[c]_{\operatorname{supp}(R_{x,s})}$ в коробке $\boxed{y}$. Для всех y' и r', таких что $y' >_{\mathbb{Z}} y$ и $b(y',r',s)$ определено, объявляем $b(y',r',s) \sim_{R_{x,s+1}} c$.

(ii) Все элементы в коробках, меньших чем $\boxed{-y}$, склеиваем с наименьшим классом в коробке $\boxed{-y}$. Другими словами, находим $\leq_{R_{x,s}}$-наименьший класс $[d]_{\operatorname{supp}(R_{x,s})}$ в коробке $\boxed{-y}$. Для всех y' и r', таких что $y' <_{\mathbb{Z}} -y$ и $b(y',r',s)$ определено, объявляем $b(y',r',s) \sim_{R_{x,s+1}} d$.

(iii) К концу этого шага считаем, что все коробки $\boxed{y'}$ для $y' \in \mathbb{Z} \setminus [-y, y]$ пусты, а соответствующие функции $b(y', \cdot, s+1)$ нигде не определены.

После этого (вне зависимости от того, осуществлялись ли действия (i)–(iii)), если $y \neq 0$, то поступаем следующим образом.

Для каждого $p \leq k$, если значение $b(-y,p,s)$ не определено, то задаём $b(-y,p,s+1)$ как свежее число. Для $i, j \leq k$ определяем

$$b(-y,i,s+1) R_{x,s+1} b(-y,j,s+1) \;\Leftrightarrow\; i L^l_s j.$$

Для каждого $t \leq m$, если $b(y,t,s)$ не определено, то задаём $b(y,t,s+1)$ как свежее число. Для $i, j \leq m$ определяем

$$b(y,i,s+1) R_{x,s+1} b(y,j,s+1) \;\Leftrightarrow\; i L^r_s j.$$

Переходим к следующему шагу.

Описание конструкции завершено. Определим $R_x = \bigcup\limits_s R_{x,s}$.

В следующей лемме под (итоговым) содержимым коробки $\boxed{y}$, где $y \in \mathbb{Z}$, понимаются элементы $u \in \omega$, такие что

$$\exists i \exists s_0\, (\forall s \geq s_0)\, [b(y,i,s) = b(y,i,s_0) = u].$$

ЛЕММА 6.2. (1) *Если для числа $y \in \omega$ мощность* $\operatorname{card}\{z : Q(x,y,z)\}$ *конечна, то (итоговые) коробки* $\boxed{y}$ *и* $\boxed{-y}$ *являются конечными (возможно, пустыми).*

(2) *Для любого* $y \in \mathbb{Z}$ *либо в коробке* $\boxed{y}$ *будет построен линейный предпорядок, либо эта коробка пуста.*

(3) *Если для некоторого* $y \in \omega$ *множество* $\{z : Q(x, y, z)\}$ *бесконечно, то для любого* $y' \in \mathbb{Z} \setminus [-y; y]$ *коробка* $\boxed{y'}$ *пуста.*

(4) *Если* $x \in A$ *и* y *— наименьшее натуральное число, такое что множество* $\{z : Q(x, y, z)\}$ *бесконечно, то функции*

$$\lambda t.B(y,t) := \lim_s b(y,t,s) \text{ и } \lambda t.B(-y,t) := \lim_s b(-y,t,s)$$

вычислимы и всюду определены.

(5) *Если* $x \in A$ *и* y *— наименьшее натуральное число, такое что множество* $\{z : Q(x, y, z)\}$ *бесконечно, то функция* $\lambda t.B(y,t)$ *вычислимо сводит* L^l *к* R_x*, а* $\lambda t.B(-y,t)$ *вычислимо сводит* L^r *к* R_x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)–(3) Эти пункты получаются непосредственным анализом конструкции.

(4) В силу того, что y — наименьшее число, когда множество $\{z : Q(x, y, z)\}$ бесконечно, существует шаг s^*, на котором для любого $s \geq \geq s^*$ из условия $l(s) < y$ вытекает $\neg Q(x, l(s), r(s))$.

После шага s^* коробка $\boxed{y}$ никогда не будет склеиваться с меньшими коробками, а коробка $\boxed{-y}$ не будет склеиваться с большими. Тогда для любых $u \in \{y, -y\}$, $t \in \omega$ и $s \geq s^*$, если значение $b(u,t,s)$ определено, будет выполнено $b(u,t,s+1)\downarrow = b(u,t,s)$.

Множество $\{z : Q(x, y, z)\}$ бесконечно (при этом L^l, L^r — это позитивные линейные предпорядки), поэтому из описания конструкции вытекает, что для каждого $t \in \omega$ найдётся $s' \geq s^*$, для которого $b(y,t,s')$ определено. Получаем, что

$$\lambda t.B(y,t) = b(y,t,s_t),$$

где s_t — это наименьшее число $\geq s^*$, для которого верно $b(y,t,s_t)\downarrow$. Значит, функции $\lambda t.B(y,t)$ и $\lambda t.B(-y,t)$ всюду определены и вычислимы.

(5) Непосредственно следует из п. (4) и описания конструкции. □

Нетрудно проверить, что для каждого x отношение R_x является позитивным линейным предпорядком. Значит, $\{R_x\}_{x\in\omega}$ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства в семействе $\mathcal{S}_{lin}$. Следовательно, существует вычислимая функция h, такая что $R_x = L_{h(x)}$ для всех x.

Покажем, что функция $h(x)$ m-сводит множество A к множеству $\{i\colon L_i \equiv_c L\}$. Пусть $x \in A$, и y — наименьшее натуральное число, такое что $\exists^\infty z Q(x,y,z)$.

По лемме 6.2(3) предпорядок R_x состоит только из коробок

$$\boxed{-y} <_{R_x} \boxed{-y+1} <_{R_x} \ldots <_{R_x} \boxed{y-1} <_{R_x} \boxed{y}.$$

По лемме 6.2(4),(5) вычислимые функции $\lambda t.B(-y,t)$ и $\lambda t.B(y,t)$ вычислимо сводят L^l и L^r к коробкам $\boxed{-y}$ и $\boxed{y}$ соответственно. В силу леммы 6.2(1) все коробки, кроме крайних, будут конечными. Следовательно, $R_x \equiv_c L^l \veebar \mathbf{k} \veebar L^r$ для некоторого $k \in \omega$. Принимая во внимание лемму 6.1, получаем, что $R_x \equiv_c L$.

Предположим теперь, что $x \notin A$. В силу леммы 6.2(1) все коробки конечны. Поэтому фактор-структура $R_x/\mathrm{supp}\,(R_x)$ изоморфна ζ. С другой стороны, $L/\mathrm{supp}\,(L) \ncong \zeta$. Следовательно, $R_x \not\equiv_c L$.

Получаем, что $h\colon A \leq_m \{i\colon L_i \equiv_c L\}$. Значит, наше индексное множество Σ^0_3-полное.

С л у ч а й (II). Пусть $L/\mathrm{supp}\,(L) \cong \zeta$. Заметим, что в данном случае имеет место

$$L/\mathrm{supp}\,(L) \ncong \zeta \times \zeta.$$

Аналогично предыдущему случаю будем строить линейный предпорядок R_x, собирая его из коробок. Адресами коробок будут служить пары целых чисел $\boxed{n,m}$. Относительно R_x эти коробки будут сравниваться следующим образом:

$$\boxed{n_1,m_1} <_{R_x} \boxed{n_2,m_2} \Leftrightarrow (n_1 <_{\mathbb{Z}} n_2) \vee (n_1 = n_2 \ \&\ m_1 <_{\mathbb{Z}} m_2).$$

Легко понять, что коробки упорядочены по типу $\zeta \times \zeta$.

Строящаяся (по аналогии с предыдущим случаем) функция b имеет четыре аргумента: первые два — это целые числа (они определяют адрес коробки, в которую кладётся соответствующее значение).

Диагональные коробки $\boxed{n, n}$ строятся особым образом: для $y \in \in \omega \setminus \{0\}$ в коробку $\boxed{y, y}$ будем копировать L^r, а в коробку $\boxed{-y, -y}$ будем копировать L^l. Все остальные коробки будут либо пустыми, либо состоять только из одного $\mathrm{supp}\,(R_x)$-класса.

Конструкция.

Шаг 0. Пусть $R_{x,0} = \mathrm{Id}$, а $b(n, m, u, 0)\uparrow$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$ и $u \in \omega$. Считаем, что все коробки пусты.

Шаг $s+1$. Пусть $y = l(s)$ и $z = r(s)$. Находим наибольшие числа u и v, такие что $u, v \leq \mathrm{card}\,\{i : i \leq z \ \&\ Q(x, y, i)\}$ и $L^l_s \cap [0, u]^2$, $L^r_s \cap [0, v]^2$ являются линейными предпорядками.

Если коробка $\boxed{y, y}$ не пуста и верно $Q(x, y, z)$, то поступаем следующим образом.

(i) Все коробки, $<_{R_{x,s}}$-большие чем $\boxed{y, y}$, склеиваем с наибольшим классом коробки $\boxed{y, y}$. Все коробки, меньшие чем $\boxed{-y, -y}$, склеиваем с наименьшим классом коробки $\boxed{-y, -y}$.

(ii) Для каждого $p \in [-y, y-1]$ и произвольного $t > y$ коробку $\boxed{p, t}$ склеиваем с коробкой $\boxed{p, y}$ (более точно, с её $<_{R_{x,s}}$-наибольшим классом). Для каждого $q \in [-y+1, y]$ и $t' < -y$ коробку $\boxed{q, t'}$ склеиваем с коробкой $\boxed{q, -y}$ (с её наименьшим классом). Все такие склеенные коробки $\boxed{p, t}$ и $\boxed{q, t'}$ объявляем пустыми. Функцию b для пустых коробок объявляем неопределённой.

После этого (вне зависимости от того, осуществлялись ли действия (i) и (ii)), если $y \neq 0$, поступаем следующим образом.

Определяем $b(-y, -y, t, s+1)$ и $b(y, y, t', s+1)$ как свежие числа для всех $t \leq u$ и $t' \leq v$ (если $b(-y, -y, t, s)$, $b(y, y, t', s)$ не были определены ранее). Для всех $p \in [-y, y]$ определяем $b(\pm y, p, 0, s+1)$ и $b(p, \pm y, 0, s+1)$ как свежие числа, если эти значения ещё не определены.

Для всех $i, j \leq u$ задаём

$$b(-y, -y, i, s+1) R_{x,s+1} b(-y, -y, j, s+1) \ \Leftrightarrow\ i L^l_s j.$$

Для всех $i, j \leq v$ задаём

$$b(y, y, i, s+1) R_{x,s+1} b(y, y, j, s+1) \ \Leftrightarrow\ i L^r_s j.$$

Переходим к следующему шагу.

Описание конструкции завершено. Определяем $R_x = \bigcup_s R_{x,s}$. Нетрудно установить существование вычислимой функции h, такой что $R_x = L_{h(x)}$ для всех $x \in \omega$. Так же, как и в случае (I), необходимо показать, что функция $h(x)$ m-сводит Σ^0_3-множество A к множеству $\{i\colon L_i \equiv_c L\}$.

Приведём набросок доказательства. Опираясь на описание конструкции, можно восстановить аналог леммы 6.2. Важно отметить, что особую роль играет аналог для леммы 6.2(3).

(3*) Пусть для некоторого $y \in \omega$ множество $\{z : Q(x,y,z)\}$ бесконечно. Тогда для любых $k, \ell \in \mathbb{Z}$, если $(k,\ell) <_{\zeta\times\zeta} (-y,-y)$ или $(k,\ell) >_{\zeta\times\zeta} (y,y)$, коробка $\boxed{k,\ell}$ пуста.

Рассмотрим теперь произвольное число $x \in \omega$. Если $x \in A$, то для минимального $y \in \omega$, удовлетворяющего п. (3*), в коробках $\boxed{-y,-y}$ и $\boxed{y,y}$ будут построены линейные предпорядки, эквивалентные L^l и L^r соответственно. Кроме того, непустых коробок B между $\boxed{-y,-y}$ и $\boxed{y,y}$ будет лишь конечное число, и каждая такая коробка B конечна (эти условия вытекают из описания действия (ii) в конструкции). Отсюда получаем, что $R_x \equiv_c L^l \veebar \mathbf{k} \veebar L^r \equiv_c L$ для некоторого числа k.

Если $x \notin A$, то элементов y, удовлетворяющих (3*), нет. Конструкция гарантирует, что в этом случае порядковый тип $R_x/\mathrm{supp}\,(R_x)$ равен $\zeta \times \zeta$. Поскольку $L/\mathrm{supp}\,(L) \not\cong \zeta\times\zeta$, имеет место $R_x \not\equiv_c L$. □

§ 7. Самополные линейные предпорядки

В данном разделе установим, что аналог теоремы 2(b) выполнен для класса самополных линейных предпорядков.

ТЕОРЕМА 17. *Индексное множество самополных линейных предпорядков*

$$SFL = \{i : \nu_{\mathrm{lin}}(i) \text{ — } \textit{самополный}\}$$

является Π^0_3*-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что SFL является Π^0_3-множеством:

$$i \in SFL \;\Leftrightarrow\; (\forall e)\,[\{(\forall x)\varphi_e(x)\!\downarrow \;\&\; (\forall a,b)\,[a \leq_{L_i} b \leftrightarrow \varphi_e(a) \leq_{L_i} \varphi_e(b)]\}$$

$$\to (\forall z \exists u)\,[z \sim_{L_i} \varphi_e(u)]],$$

что в свою очередь эквивалентно Π^0_3-условию.

Установим Π^0_3-полноту множества SFL. Пусть A — это произвольное Σ^0_3-множество. Выберем вычислимый предикат Q со свойством

$$e \in A \ \Leftrightarrow\ \exists x \exists^\infty y\,[Q(e,x,y)].$$

Покажем, что A m-сводится к множеству $\omega \setminus SFL$.

Далее будет использоваться следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18 [20, теор. 39(2)]**.** *Существуют позитивный линейный предпорядок M и элемент $c_0 \in \omega$ со следующими свойствами:*

фактор-структура $M/\mathrm{supp}\,(M)$ изоморфна ординалу $\omega + 1$;

класс $[c_0]_{\mathrm{supp}\,(M)}$ есть простое множество;

$x \le_M c_0$ для всех $x \in \omega$;

если $x \not\sim_M c_0$, то класс $[x]_{\mathrm{supp}\,(M)}$ одноэлементен.

ЛЕММА 7.1. *Линейный предпорядок M из предложения* 18 *является самополным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что M не является самополным. Тогда существуют сводимость $f\colon M \le_c M$ и элемент $a \in \omega$, такие что $[a]_{\mathrm{supp}\,(M)} \cap \mathrm{range}(f) = \varnothing$.

Поскольку $M/\mathrm{supp}\,(M) \cong \omega+1$, нетрудно показать, что $f(c_0) \sim_M c_0$. Тогда $a \not\sim_M c_0$. Следовательно, $a <_M f(a) <_M c_0$. В результате множество

$$\{a <_M f(a) <_M f(f(a)) <_M f^{(3)}(a) <_M \dots <_M f^{(n)}(a) <_M \dots\}$$

окажется бесконечным в. п. подмножеством в $\omega \setminus [c_0]_{\mathrm{supp}\,(M)}$, что противоречит простоте $[c_0]_{\mathrm{supp}\,(M)}$. Значит, предпорядок M является самополным. $\Box$

Пусть M — самополный линейный предпорядок из предложения 18. Через X обозначим простое множество $[c_0]_{\mathrm{supp}\,(M)}$.

Зафиксируем вычислимые аппроксимации $\{M_s\}_{s\in\omega}$ и $\{X_s\}_{s\in\omega}$ для предпорядка M и множества X соответственно. Без ограничения общности, можно считать, что аппроксимация для X согласована с аппроксимацией отношения M в следующем смысле: для любых s, x, y

$$(x \le_{M_s} y)\,\&\,(x \in X_s) \to (y \in X_s).$$

Для данного числа $e \in \omega$ построим аппроксимацию позитивного линейного предпорядка $\{R_{e,s}\}_{s\in\omega}$ и вычислимую функцию $h(x, s)$. На каждом шаге s в предпорядке $R_{e,s}$ будем выделять конечные множества $\boxed{y}^s$, $y \in \omega$, со следующими свойствами:

$\boxed{y}^s \subseteq \boxed{y}^{s+1}$;

если $y_0 \neq y_1$, то $\boxed{y_0}^s$ и $\boxed{y_1}^s$ не пересекаются;

существует лишь конечное число y, для которых $\boxed{y}^s$ непусто.

Множество $\boxed{y}^s$ называем *y-ой коробкой* в $R_{e,s}$. Если индекс s понятен из контекста, то будем использовать $\boxed{y}$ вместо $\boxed{y}^s$.

Шаг 0. Пусть $R_{e,0} = \mathrm{Id}$ и $h(x, 0) = x$ для всех $x \in \omega$. Считаем, что все коробки $\boxed{y}$ пусты.

Шаг $s+1$. Для каждого $x \leq s$ (в порядке возрастания x) осуществляем следующие два действия.

(i) Задаём

$$h(x, s+1) = \mu y\, [y \notin \{h(i, s+1) : i < x\} \;\&\; y \notin X_s].$$

(ii) Пусть y равен значению $h(x, s+1)$. Задаём

$$r := \mathrm{card}\left(\boxed{y}^s\right), \quad k := 1 + \mathrm{card}\,\{z : Q(e, x, z)\}.$$

Если $r < k$, то выбираем наименьшие свежие числа $b_{y,r}, b_{y,r+1}, \ldots, b_{y,k}$. Будем считать, что эти числа лежат в коробке $\boxed{y}$. Определяем

$$b_{y,i} <_{R_{e,s+1}} b_{y,j} \text{ для всех } i < j \leq k \tag{5}$$

В конце шага $s+1$ для всех $y_1, y_2 \leq h(s, s+1)$ задаём $R_{e,s+1}$ посредством коробок:

$$\boxed{y_1} \leq_{R_{e,s+1}} \boxed{y_2} \;\Leftrightarrow\; y_1 \leq_{M_s} y_2. \tag{6}$$

Транзитивно замыкаем отношение $R_{e,s+1}$. Переходим к следующему шагу.

Определим $R_e = \bigcup\limits_s R_{e,s}$. Для того, чтобы показать соотношение $A \leq_m \omega \setminus SFL$, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7.2. (1) *Функция $h(x) = \lim\limits_s h(x, s)$ является всюду определённой $\mathbf{0}'$-вычислимой, и при этом h — это биекция из ω на $\omega \setminus X$.*

(2) *Отношение* R_e *является линейным предпорядком.*

(3) *Если мощность* $\mathrm{card}\,\{z : Q(e,x,z)\}$ *бесконечна для некоторого* $x \in \omega$, *то* R_e *не будет самополным.*

(4) *Если мощности* $\mathrm{card}\,\{z : Q(e,x,z)\}$ *конечны для всех* x, *то* R_e *самополный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Нетрудно понять, что $h(x)$ является частично $\mathbf{0}'$-вычислимой функцией. Покажем, что $h(x)$ всюду определена.

Пусть s^* — это шаг, такой что некоторый начальный сегмент натуральных чисел $[0,n]$ удовлетворяет следующим условиям:

$[0,n]$ содержит не менее $(x+1)$ элемента из множества $\omega \setminus X$,

$[0,n] \cap X = [0,n] \cap X_{s^*}$.

Такой шаг найдётся в силу того, что множество $\omega \setminus X$ бесконечно. Тогда для каждого $z \leq x$ выполнено $h(z,s) = h(z,s^*)$ при всех $s \geq s^*$. Следовательно, предел $h(x) = \lim\limits_s h(x,s)$ существует.

Из описания действия (i) конструкции нетрудно получить, что h — это биекция, отображающая ω на $\omega \setminus X$.

(2) Очевидно, что R_e рефлексивно. Отношение R_e транзитивно в силу того, что в конце каждого ненулевого шага s строится транзитивное замыкание $R_{e,s}$.

Пусть $x \neq z$ — произвольные числа. В силу действия (ii) конструкции можно считать, что $x = b_{y_1,i}$ и $z = b_{y_2,j}$ для некоторых y_1, y_2, i, j. Если $y_1 = y_2$, то из (5) следует, что $x \leq_{R_e} z$ или $z \leq_{R_e} x$. Если $y_1 \neq y_2$, то в силу (6) коробки $\boxed{y_1}$ и $\boxed{y_2}$ сравнимы (т. к. M является линейным предпорядком). Значит, предпорядок R_e линейный.

(3) Пусть для числа x мощность $\mathrm{card}\,\{z : Q(e,x,z)\}$ бесконечна. Из п. (1) следует существование $y \notin X$, такого что $h(x) = y$. В силу действия (ii) в порядке R_e коробка $\boxed{y} = \bigcup\limits_s \boxed{y}^s$ будет содержать бесконечную последовательность $\{b_{y,i}\}_{i\in\omega}$, являющуюся ω-цепью относительно предпорядка R_e (поскольку $y \notin X$, коробка $\boxed{y}$ никогда не склеивается с другими коробками в R_e).

Функция $\lambda i.b_{y,i}$ монотонно возрастает и вычислима, следовательно множество $\boxed{y} = range(\lambda i.b_{y,i})$ вычислимо. Функция

$$g(x) := \begin{cases} b_{y,i+1}, & \text{если } x = b_{y,i} \text{ для некоторого } i, \\ x, & \text{если } x \notin \boxed{y}; \end{cases}$$

вычислимо сводит R_e к R_e, при этом $[b_{y,0}]_{\mathrm{supp}\,(R_e)} \cap range(g) = \varnothing$. Следовательно, предпорядок R_e не будет самополным.

(4) Воспользуемся методом от противного. Допустим, что R_e не является самополным. Рассмотрим сводимость $f\colon R_e \leq_c R_e$, для которой $range(f)$ не пересекается с классом $[z_0]_{\mathrm{supp}\,(R_e)}$.

Нетрудно показать, что все коробки $\boxed{y} = \bigcup_s \boxed{y}^s$, где $y \in \omega$, в предпорядке R_e конечны. Отсюда вытекает, что фактор-структура $R_e/\mathrm{supp}\,(R_e)$ изоморфна ординалу $\omega + 1$. Возьмём число d_0, такое что $[d_0]_{\mathrm{supp}\,(R)}$ — наибольший элемент в фактор-структуре.

Получаем, что $z_0 \not\sim_{R_e} d_0$ и $z_0 <_{R_e} f(z_0) <_{R_e} d_0$. Далее нетрудно показать, что $\{f^{(n)}(z_0)\}_{n\in\omega}$ — вычислимая строго возрастающая цепь в предпорядке R_e. Каждая коробка $\boxed{y}$ конечна, поэтому данная цепь пересекает бесконечно много коробок. Значит,

$$\Big\{y : \exists n\, [f^{(n)}(z_0) \in \boxed{y}]\Big\}$$

является бесконечным в. п. подмножеством в $\omega \setminus X$, что противоречит простоте множества X. □

Из леммы 7.2(2) следует, что $\{R_e\}_{e\in\omega}$ является вычислимой нумерацией некоторого подсемейства в $\mathcal{S}_{lin}$. Значит, существует вычислимая функция f, такая что $R_x = L_{f(x)}$ для всех $x \in \omega$.

Если $e \in A$, то $\exists x \exists^{\infty} y\, [Q(e,x,y)]$. По лемме 7.2(3) линейный предпорядок $R_e = L_{f(e)}$ не является самополным. Значит, $f(e) \notin SFL$.

Если $e \notin A$, то $\forall x \exists^{<\infty} y\, [Q(e,x,y)]$. По лемме 7.2(4) предпорядок $R_e = L_{f(e)}$ самополный. Значит, $f(e) \in SFL$. Заключаем, что $A \leq_m \omega \setminus SFL$. □

§ 8. Открытые вопросы

Остаётся открытым вопрос о том, верен в ли в общем случае аналог теоремы 1(b) для позитивных предпорядков.

ВОПРОС 1. Пусть R — позитивный предпорядок с бесконечным числом $\mathrm{supp}\,(R)$-классов. Всегда ли индексное множество $\{i : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(i) \equiv_c R\}$ является Σ^0_3-полным? В частности, верно ли это утверждение для случая, когда R — самополный линейный предпорядок?

Также вызывает интерес следующий

ВОПРОС 2. Пусть R — произвольный позитивный предпорядок с бесконечным числом $\mathrm{supp}\,(R)$-классов. Каковы возможные m-степени индексного множества $\{i : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(i) \leq_c R\}$?

Отметим, что уже известно, что теорема 1(c) в общем случае не переносится на класс предпорядков: не для каждого (неуниверсального) R с бесконечным числом $\mathrm{supp}\,(R)$-классов множество $I_{\leq_c R} := \{i : \alpha_{\mathrm{ceprs}}(i) \leq_c$ $\leq_c R\}$ является Σ^0_3-полным. В частности, если R — универсальная позитивная эквивалентность, то по предложению 6 множество $I_{\leq_c R}$ является Π^0_2-полным (поскольку $I_{\leq_c R}$ совпадает с множеством I_{Ceers}). Аналогичное утверждение верно и для случая, когда R — универсальный позитивный линейный предпорядок (существование таких предпорядков показано в [15]).

ВОПРОС 3. Существуют ли позитивные предпорядки R с бесконечным числом $\mathrm{supp}\,(R)$-классов, удовлетворяющие следующим условиям:

R не является ни универсальной эквивалентностью, ни универсальным линейным предпорядком;

индексное множество $I_{\leq_c R}$ Π^0_2-полно?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Л. Ершов*, Позитивные эквивалентности, Алгебра и логика, **10**, № 6 (1971), 620—650.

2. *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, М., Наука, 1977.

3. *C. Bernardi*, On the relation provable equivalence and on partitions in effectively inseparable sets, Stud. Log., **40**, No. 1 (1981), 29—37.

4. *C. Bernardi, A. Sorbi*, Classifying positive equivalence relations, J. Symb. Log., **48**, No. 3 (1983), 529—538.

5. *A. H. Lachlan*, A note on positive equivalence relations, Z. Math. Logik Grundlagen Math., **33** (1987), 43—46.
6. *S. Gao, P. Gerdes*, Computably enumerable equivalence relations, Stud. Log., **67**, No. 1 (2001), 27—59.
7. *U. Andrews, A. Sorbi*, Joins and meets in the structure of ceers, Computability, **8**, Nos. 3/4 (2019), 193—241.
8. *U. Andrews, N. Schweber, A. Sorbi*, Self-full ceers and the uniform join operator, J. Log. Comput., **30**, No. 3 (2020), 765—783.
9. *U. Andrews, N. Schweber, A. Sorbi*, The theory of ceers computes true arithmetic, Ann. Pure Appl. Logic, **171**, No. 8 (2020), Article ID 102811, 22 p.
10. *U. Andrews, S. Lempp, J. S. Miller, K. M. Ng, L. S. Mauro, A. Sorbi*, Universal computably enumerable equivalence relations, J. Symb. Log., **79**, No. 1 (2014), 60—88.
11. *U. Andrews, A. Sorbi*, The complexity of index sets of classes of computably enumerable equivalence relations, J. Symb. Log., **81**, No. 4 (2016), 1375—1395.
12. *S. Badaev, A. Sorbi*, Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations, Math. Log. Q., **62**, Nos. 1/2 (2016), 111—127.
13. *U. Andrews, S. A. Badaev*, On isomorphism classes of computably enumerable equivalence relations, J. Symb. Log., **85**, No. 1 (2020), 61—86.
14. *Д. К. Кабылжанова*, О позитивных предпорядках, Алгебра и логика, **57**, № 3 (2018), 279—284.
15. *Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев*, О тёмных вычислимо перечислимых отношениях эквивалентности, Сиб. матем. ж., **59**, № 1 (2018), 29—40.
16. *С. А. Бадаев, Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев*, О структуре позитивных предпорядков, Алгебра и логика, **59**, № 3 (2020), 293—314.
17. *R. I. Soare*, Turing computability. Theory and applications (Theory Appl. Comput.), Berlin, Springer, 2016.
18. *S. A. Badaev, B. S. Kalmurzayev, D. K. Kabylzhanova, K. Sh. Abeshev*, Universal positive preorders, Известия НАН РК. Сер. физ.-мат., 2018, № 6(322), 49—53.
19. *U. Andrews, S. Badaev, A. Sorbi*, A survey on universal computably enumerable equivalence relations, in: A. Day (ed.) et al., Computability and complexity. Essays dedicated to Rodney G. Downey on the occasion of his 60th birthday (Lect. Notes Comput. Sci., **10010**), Cham, Springer, 2017, 418—451.

20. *A. Gavrushkin, B. Khoussainov, F. Stephan*, Reducibilities among equivalence relations induced by recursively enumerable structures, Theor. Comput. Sci., **612** (2016), 137—152.

Поступило 28 июля 2021 г.

Окончательный вариант 7 июня 2022 г.

Адреса авторов:

КАЛМУРЗАЕВ Биржан Сеилханович,

Казахский нац. ун-т им. аль-Фараби,

Казахстанско-Британский техн. ун-т,

г. Алма-Ата, КАЗАХСТАН. e-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич, Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

ТОРЕБЕКОВА Мария Акылбеккызы, Казахстанско-Британский техн. ун-т, г. Алма-Ата, КАЗАХСТАН. e-mail: mariyakylbek@gmail.com