



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Serge Bernstein, О представлении положительных многочленовъ, *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 1915, том 14, выпуск 5, 227–228

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

13 января 2025 г., 16:39:16



Sur la représentation des polynômes positifs.

par *Serge Bernstein.*

Dans ma Note ¹⁾ «Sur les séries normales» insérée à la fin du t. II des «Principes d'analyse» de M. d'Adhémar je me suis proposé, en particulier, un certain problème de minimum qui m'a amené à effectuer la transformation d'un polynome arbitraire

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

à la forme

$$P(x) = A_0(1-x)^m + A_1x(1-x)^{m-1} + \dots + A_mx^m, \quad (1)$$

où $m \geq n$. L'identification de ces deux expressions donne

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_1 &= a_1 + ma_0, \\ &\dots\dots\dots \\ A_k &= a_k + C_{m-k+1}^k a_{k-1} + \dots + C_m^k a_0, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ A_m &= a_m + a_{m-1} + \dots + a_0 \end{aligned} \quad (2)$$

(pour $k > n$, on pose $a_k = 0$),

et j'ai montré que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_k}{C_m^k} = P\left(\frac{k}{m}\right). \quad (3)$$

Il en résulte, entre autres, la conséquence suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynome $P(x)$ n'admette pas de racines dans l'intervalle 0,1 est que $P(x)$ soit susceptible, pour m assez grand, d'être mis sous la forme d'une somme de termes de même signe

$$\sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i (1-x)^{m-i}.$$

¹⁾ Voir aussi mon Mémoire russe «О наилучшем приближении непрерывных функций» pp. 120—125.

Il est facile de tirer de cette proposition le théorème suivant de Laguerre ¹⁾: si le polynôme $P(x)$ reste positif (non nul) pour $x \geq 0$, on peut le mettre sous la forme $P(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux polynômes à coefficients positifs.

Nous pouvons même donner à ce théorème une forme plus précise: dans la représentation indiquée on peut toujours poser $\varphi(x) = (1+x)^{\alpha}$, à condition de prendre α assez grand. Autrement dit, si le polynôme $P(x)$ reste positif pour $x \geq 0$, on peut toujours choisir α assez grand pour que tous les coefficients de $f(x) = P(x) \cdot (1+x)^{\alpha}$ soient positifs.

En effet, posons $x = \frac{y}{1-y}$.

Donc

$$P(x) = \frac{R(y)}{(1-y)^n},$$

où $R(y) > 0$, pour $0 \leq y \leq 1$. Par conséquent,

$$R(y) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-i},$$

où tous les A sont positifs pour m assez grand. Mais

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad 1-y = \frac{1}{1+x};$$

donc

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-n-i} = \sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i \left(\frac{1}{1+x} \right)^{m-n} = \frac{\sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i}{(1+x)^{m-n}}.$$

C. q. f. d.

¹⁾ Voir E. Meissner «Über positive Darstellungen von Polynomen». *Mathematische Annalen*; Bd. 70. La démonstration de Laguerre lui-même ne semble pas avoir été publiée.