Н. А. Баженов, О $\Delta^0_2$-категоричности булевых алгебр, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2013, том 13, выпуск 2, 3–14

УДК 510.5+510.6+512.563

*Н. А. Баженов*

# О $\Delta_2^0$-КАТЕГОРИЧНОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР*

Доказано, что для вычислимых булевых алгебр понятия $\Delta_2^0$-категоричности и относительной $\Delta_2^0$-категоричности совпадают. В частности, отсюда следует, что для любой тьюринговой степени $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ вычислимая булева алгебра $\mathbf{d}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она вычислимо категорична.

*Ключевые слова*: булева алгебра, $\Delta_2^0$-категоричность, вычислимая категоричность.

## Введение

Изучение категоричности вычислимых моделей относительно различных классов было начато Б. Л. ван дер Варденом, исследовавшим вопрос о том, существует ли эффективный алгоритм построения изоморфизма между двумя алгебраическими замыканиями поля, построенными различными способами. Эта проблема была решена А. Фрейлихом и Дж. Шефердсоном в [1]. А. И. Мальцев [2] доказал, что конечно-порожденные алгебраические системы являются вычислимо категоричными. Это положило начало систематическому изучению проблемы описания категоричных структур (более подробно см. [3–5]).

Пусть $\alpha$ — вычислимый ординал. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *вычислимо категоричной* (*$\Delta_\alpha^0$-категоричной*), если для любого вычислимого представления $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ существует вычислимый изоморфизм ($\Delta_\alpha^0$-изоморфизм) $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *относительно $\Delta_\alpha^0$-категоричной*, если для любой модели $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такой, что носитель $\mathfrak{B}$ является подмножеством множества натуральных чисел, существует $\Delta_\alpha^0(\mathcal{D}(\mathfrak{B}))$-изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, где $\mathcal{D}(\mathfrak{B})$ — атомная диаграмма $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимая модель $\mathfrak{A}$ называется *$\mathbf{d}$-вычислимо категоричной*, если для любого вычислимого представления $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Заметим, что вычислимая модель $\Delta_{n+1}^0$-категорична тогда и только тогда, когда она $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимо категорична.

Если вычислимая модель относительно $\Delta_\alpha^0$-категорична, то она является $\Delta_\alpha^0$-категоричной, но, вообще говоря, понятия $\Delta_\alpha^0$-категоричности и относительной $\Delta_\alpha^0$-категоричности не совпадают. С. С. Гончаров [6] показал, что существует вычислимо категоричная модель, не являющаяся относительно вычислимо категоричной. В [7] доказано, что для любого непредельного вычислимого ординала $\alpha$ существует $\Delta_\alpha^0$-категоричная модель,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3606.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (госконтракт № 02.740.11.0429) и РФФИ (проект 08-01-00336).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 2. С. 3–14

не являющаяся относительно $\Delta^0_\alpha$-категоричной. В [8] получен аналогичный результат для произвольного предельного ординала $\alpha$.

С другой стороны, если наложить некоторые дополнительные условия на $\Delta^0_\alpha$-категоричную модель, то можно доказать, что она является относительно $\Delta^0_\alpha$-категоричной. С. С. Гончаров [9] доказал, что, если модель $\mathfrak{A}$ является 2-разрешимой (т. е. ее $\forall\exists$-диаграмма разрешима), то из вычислимой категоричности $\mathfrak{A}$ следует ее относительная вычислимая категоричность.

Перейдем к описанию результатов, касающихся булевых алгебр. С. С. Гончаров, В. Д. Дзгоев [10] и Дж. Реммел [11] независимо получили описание $\Delta^0_1$-категоричных булевых алгебр. Для вычислимой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathfrak{B}$ вычислимо категорична;

2) $\mathfrak{B}$ относительно вычислимо категорична;

3) в $\mathfrak{B}$ имеется только конечное число атомов.

Также получены описания относительно $\Delta^0_n$-категоричных булевых алгебр: для случаев $n = 2$ и $n = 3$ — в работах Ч. Мак-Коя [12; 13], для $n = 4$ — в магистерской диссертации М. Е. Черепанова. В квалификационной работе бакалавра О. А. Лупинос приведено описание относительно $\Delta^0_5$-категоричных атомных булевых алгебр. Ч. Мак-Кой [12] показал, что при некоторых эффективных условиях понятия $\Delta^0_2$-категоричности и относительной $\Delta^0_2$-категоричности для вычислимых булевых алгебр совпадают. К. Эш [14] описал уровни $\Delta^0_\alpha$-категоричности для суператомных булевых алгебр. В [15] получен аналогичный результат для почти суператомных булевых алгебр.

В данной работе доказано, что вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B}$ является $\Delta^0_2$-категоричной тогда и только тогда, когда она относительно $\Delta^0_2$-категорична (тем самым обобщен результат Ч. Мак-Коя). В частности, отсюда следует, что если тьюрингова степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$, то вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B}$ $\mathbf{d}$-вычислимо категорична в том и только в том случае, когда она вычислимо категорична.

## 1. Предварительные сведения

В качестве источников предварительных сведений будем использовать монографии [3; 16–18].

Если $\mathfrak{B}$ — модель некоторого языка, $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$, то запись $\bar{a} \in \mathfrak{B}$ будет означать, что $a_1, \dots, a_n$ являются элементами носителя модели $\mathfrak{B}$. Будем считать, что $\omega$ и $\eta$ — множества, упорядоченные соответственно по типу натуральных и рациональных чисел.

В дальнейшем считаем, что булевы алгебры рассматриваются как модели языка $\mathcal{L}_{BA} = \{\vee^2, \wedge^2, \mathrm{C}^1; 0, 1\}$. На булевых алгебрах стандартным образом определяется порядок: $a \leqslant b \iff a \wedge b = a$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $\alpha$ — ординал. Будем обозначать $\mathrm{At}(\mathfrak{B})$ — множество атомов $\mathfrak{B}$, $\mathrm{Als}(\mathfrak{B})$ — идеал безатомных элементов $\mathfrak{B}$, $\mathrm{F}(\mathfrak{B})$ — идеал Фреше $\mathfrak{B}$, $\mathrm{F}_\alpha(\mathfrak{B})$ — $\alpha$-й итерированный идеал Фреше $\mathfrak{B}$. Если $R \in \{\mathrm{At}, \mathrm{Als}, \mathrm{F}\}$, то будем обозначать $\neg R(\mathfrak{B}) \leftrightharpoons$

$\leftrightharpoons \{a \in \mathfrak{B} \mid a \notin R(\mathfrak{B})\}$. Булева алгебра $\mathfrak{B}$ называется *$\alpha$-атомной*, если все фактор-алгебры $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}_\gamma}$ при $\gamma < \alpha$ являются атомными.

Если $a \in \mathfrak{B}$, то $\widehat{a}$ будет булева алгебра, полученная ограничением основных операций из $\mathfrak{B}$ на $\{b \in \mathfrak{B} \mid b \leqslant a\}$. Если $L$ — линейный порядок, то через $\mathfrak{B}(L)$ будем обозначать подалгебру $(P(L), \cup, \cap, \mathrm{C}; \varnothing, L)$, порожденную элементами вида $[x, y) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z < y\}$ и $[x, \infty) \leftrightharpoons \{z \mid x \leqslant z\}$, где $x, y \in L$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что формула $(a_1, \ldots, a_n \mid b)$ является сокращенной формой записи следующей формулы:

$$(b = a_1 \vee \ldots \vee a_n) \ \& \ \left( \mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i \wedge a_j = 0 \right).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра. Определим *спектры степеней* At, Als, F. Пусть $R \in \{\mathrm{At}, \mathrm{Als}, \mathrm{F}\}$. Тогда

$$\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(R) \leftrightharpoons \{\deg_T(R(\mathfrak{B})) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A},\ \mathfrak{B} \text{ — вычислимая булева алгебра}\}.$$

В [19] Монталбан доказал следующую теорему о спектре степеней множества атомов булевой алгебры.

**Теорема 1** (А. Монталбан). *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов. Если $\mathbf{a} \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{At})$ и $\mathbf{d}$ — в. п. степень такая, что $\mathbf{a}''' \leqslant \mathbf{d}'''$, то $\mathbf{d} \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{At})$. В частности, любая 3-высокая в. п. степень $\mathbf{d} \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{At})$.*

Пусть $n \in \omega \setminus \{0\}$. Тьюрингова степень $\mathbf{d}$ называется *$n$-высокой*, если $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}$. Нам понадобится следующая теорема о в. п. степенях.

**Теорема 2** (Дж. Сакс [20]). *Для любого $n \in \omega$ существует $(n+2)$-высокая, но не $(n+1)$-высокая в. п. степень.*

В дальнейшем в доказательстве вспомогательных лемм будет использована техника деревьев. Подробнее с ней можно познакомиться в монографии [16]. Ограничимся тем, что приведем некоторые функции, определенные на $\omega$, и отношение $\preccurlyeq$:

$$R(n) \leftrightharpoons 2n + 2, \quad L(n) \leftrightharpoons 2n + 1,$$

$$H(n) \leftrightharpoons 0, \text{ если } n = 0, \quad H(n) \leftrightharpoons [(n-1)/2], \text{ если } n > 0, \text{ где } [x] \text{ — целая часть } x,$$

$$S(n) \leftrightharpoons \begin{cases} n - 1, & n \text{ четное}, n > 0, \\ n + 1, & n \text{ нечетное}, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

$$h(0) \leftrightharpoons 0, \quad h(n+1) \leftrightharpoons h(H(n+1)) + 1,$$

$$H(x, 0) \leftrightharpoons x, \quad H(x, n+1) \leftrightharpoons H(H(x, n)),$$

$$x \preccurlyeq y \iff \prod_{n=0}^{h(x)} |H(x, n) - y| = 0.$$

Множество $D \subseteq \omega$ будем называть *деревом*, если для любого $n \in D$ элементы $H(n)$ и $S(n)$ также принадлежат $D$.

Легко понять, что для вершины дерева с номером $n$:
$R(n)$ — номер правой вершины, лежащей под $n$;

$L(n)$ — номер левой вершины, лежащей под $n$;
$H(n)$ — номер ближайшей к $n$ вершины из находящихся выше $n$, и $H(0) = 0$;
$S(n)$ — номер соседней к $n$ вершины, лежащей под $H(n)$;
$h(n)$ указывает расстояние между $n$ и 0.

Запись $x \preccurlyeq y$ означает, что $x$ и $y$ принадлежат одной и той же ветви, и $x$ находится под $y$.

Определим функцию $\mathrm{anc}\colon \omega \to \omega$ следующим образом: если существует $k \in \omega$ такое, что $x \preccurlyeq 2^{k+2} - 3$, то полагаем $\mathrm{anc}(x) \leftrightharpoons k + 1$, в противном случае $\mathrm{anc}(x) \leftrightharpoons 0$. Легко понять, что anc является вычислимой функцией.

Также зафиксируем вычислимое отношение $P_0$ такое, что

$$x \in \overline{\varnothing''} \iff \exists^{\infty} y\ P_0(x, y).$$

Такое $P_0$ существует, так как $\overline{\varnothing''} \in \Pi^0_2$.

В заключение приведем уже упоминавшийся во введении результат Ч. Мак-Коя.

**Теорема 3** (Ч. Мак-Кой [12]). *Вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B}$ относительно $\Delta^0_2$-категорична тогда и только тогда, когда существуют $c_1, \ldots, c_n \in \mathfrak{B}$ такие, что $(c_1, \ldots, c_n \mid 1_{\mathfrak{B}})$ и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ булева алгебра $\widehat{c_i}$ изоморфна одной из следующих алгебр: $\mathfrak{B}(1)$, $\mathfrak{B}(\eta)$ или $\mathfrak{B}(\omega)$.*

## 2. Случай булевых алгебр с конечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше

**Лемма 1.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов. Тогда существуют степени $\mathbf{d_1} \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{Als})$ и $\mathbf{d_2} \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{F})$ такие, что $\mathbf{d}_i \cup \mathbf{0}' < \mathbf{0}''$ при $i = 1, 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2, существует 2-высокая, не высокая в. п. степень $\mathbf{c}$. По теореме 1, существует вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такая, что $\deg_T(\mathrm{At}(\mathfrak{B})) = \mathbf{c}$. Ясно, что $\mathbf{d}_1 \leftrightharpoons \deg_T(\mathrm{Als}(\mathfrak{B})) \leqslant \mathbf{c}' < \mathbf{0}''$ и $\mathbf{0}' < \mathbf{c}'$. Следовательно,

$$\mathbf{d}_1 \cup \mathbf{0}' \leqslant \mathbf{c}' \cup \mathbf{0}' = \mathbf{c}' < \mathbf{0}''.$$

Случай с $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{F})$ рассматривается аналогично. Лемма 1 доказана. □

**Предложение 1.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная булева алгебра, содержащая бесконечное число атомов, такая, что $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)$ и $\forall x \in \mathfrak{A}$* ($x$ или $\mathrm{C}(x)$ содержит конечное число атомов). *Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega + \eta)$.*

**Предложение 2.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная атомная булева алгебра такая, что $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)$. Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega \times \eta)$.*

**Предложение 3.** *Пусть $\mathfrak{A}$ такая счетная булева алгебра, что:*

1) $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)$;

2) $(\forall x \in \mathfrak{A})(\widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega + \eta)\ \&\ \widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega \times \eta))$;

3) $\mathfrak{A}$ *содержит бесконечное число атомов.*

*Тогда* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$.

Доказательство предложений 1, 2 и 3 можно найти в [21].

**Лемма 2.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— вычислимая булева алгебра. Предположим, что выполнено любое из следующих условий:*

(a) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega+\eta)$;
(b) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega\times\eta)$;
(c) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$.

*Тогда* $\mathfrak{A}$ *не* $\Delta^0_2$*-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства заключается в следующем: с помощью техники деревьев строится вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такая, что либо идеал Фреше $\mathrm{F}(\mathfrak{B})$, либо идеал безатомных элементов $\mathrm{Als}(\mathfrak{B})$ имеет максимальную допустимую сложность (т. е. $\mathrm{F}(\mathfrak{B}) \equiv_T \varnothing''$ или $\mathrm{Als}(\mathfrak{B}) \equiv_T \varnothing''$); далее показывается, что вычислимое представление $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{A}$, которое можно получить при помощи леммы 1, и $\mathfrak{B}$ не могут быть $\mathbf{0}'$-изоморфны.

**Случай (a).** Предположим, что выполнено условие (a).

Ясно, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega+\eta) \times \widehat{\mathrm{C}(x)}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{C}(x) \neq 0$, и алгебра $\mathfrak{B}_1 \leftrightharpoons \widehat{\mathrm{C}(x)}$ вычислима. Следовательно, существует вычислимо перечислимое дерево $D^1$ такое, что булева алгебра $\mathfrak{B}_{D^1}$, построенная по дереву $D^1$, изоморфна $\mathfrak{B}_1$.

Построим вычислимо перечислимое дерево $D^2$.

**Шаг 0.** Полагаем $D_0 \leftrightharpoons \{0\}$.
**Шаг** $s+1$**.** Пусть конечное дерево $D_s$ уже построено.

**Случай 1.** Если $s+1 = 2k+1$, то полагаем

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(2^{k+1}-2), R(2^{k+1}-2)\}. \tag{1}$$

**Случай 2.** Если $s+1 = 2k+2$, то полагаем

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \& \\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x)-1, k))\}. \tag{2}$$

Полагаем $D^2 \leftrightharpoons \bigcup\limits_{s\in\omega} D_s$. Так как $D^2$ есть объединение вычислимой неубывающей последовательности конечных деревьев, $D^2$ является вычислимо перечислимым деревом. Следовательно, существует конструктивизация $\nu$ булевой алгебры $\mathfrak{B}_{D^2}$, построенной по дереву $D^2$. Без ограничения общности можно отождествить вершину $x$ дерева $D^2$ с номером элемента $\mathfrak{B}_{D^2}$, соответствующего $x$, в нумерации $\nu$.

Ясно, что $\mathfrak{B}_{D^2}$ удовлетворяет условиям предложения 1, и, следовательно, $\mathfrak{B}_{D^2} \cong \cong \mathfrak{B}(\omega+\eta)$. Также заметим, что $x \in \overline{\varnothing''} \iff \nu(2^{x+2}-3) \in \mathrm{Als}(\mathfrak{B}_{D^2})$.

В качестве $D$ возьмем дерево, получающееся следующим образом: слева от нуля «подвесим» $D^1$, справа от нуля «подвесим» $D^2$. Легко понять, что булева алгебра $\mathfrak{B}_D \cong$

$\cong \mathfrak{A}$, и можно построить такие конструктивизацию $\mu$ алгебры $\mathfrak{B}_D$ и вычислимую функцию $f$, что

$$x \in \overline{\varnothing''} \iff \mu(f(x)) \in \mathrm{Als}(\mathfrak{B}_D).$$

Можно перейти от конструктивной модели $\langle \mathfrak{B}_D, \mu \rangle$ к вычислимой модели $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ такой, что $\deg_T(\mathrm{Als}(\mathfrak{B})) = \mathbf{0}''$.

С другой стороны, согласно лемме 1, существуют тьюрингова степень $\mathbf{d}$ и вычислимая алгебра $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{A}$ такие, что

$$\deg_T(\mathrm{Als}(\mathfrak{C})) = \mathbf{d} \quad \& \quad \mathbf{d} \cup \mathbf{0}' < \mathbf{0}''.$$

Если существует $\Delta^0_2$-изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, то $\mathrm{Als}(\mathfrak{B}) \leqslant_T \mathrm{Als}(\mathfrak{C}) \oplus \varphi$, т. е. $\mathbf{0}'' \leqslant \mathbf{d} \cup \mathbf{0}' < \mathbf{0}''$ — противоречие. Следовательно, $\mathfrak{A}$ не $\Delta^0_2$-категорична.

**Случай (b).** Если выполнено условие (b), то доказательство проводится аналогично доказательству случая (a) с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}(\omega + \eta)$ на $\mathfrak{B}(\omega \times \eta)$, идеала безатомных элементов Als на $\neg\mathrm{F}$ — множество элементов, не принадлежащих идеалу Фреше, предложения 1 на предложение 2 и условия (2) на следующее условие:

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ L(L(x)),\ R(L(x)),\ R(x),\ L(R(x)),\ R(R(x)) \mid (x \in D_s)\ \&$$
$$\&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (\exists y \in D_s)(x = L(y))\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\}.$$

**Случай (c).** Предположим, что выполнено условие (c). Аналогично случаю (a) считаем, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)\times\mathfrak{B}_1$, где $\mathfrak{B}_1$ — вычислимая ненулевая булева алгебра, изоморфная алгебре $\mathfrak{B}_{D^1}$, построенной по вычислимо перечислимому дереву $D^1$.

Построим вычислимо перечислимое дерево $D^2$. На каждом шаге $s \in \omega$ будем строить конечное дерево $D_s$ и частичную функцию $p_s$, действующую из $D_s$ в $\{0,1\}$, так, что $D_s \subseteq D_{s+1}$ и $p_s \subseteq p_{s+1}$.

**Шаг 0.** Полагаем $D_0 \leftrightharpoons \{0\}$, $p_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

**Шаг $s+1$.** Пусть конечное дерево $D_s$ уже построено.

**Случай 1.** Если $s + 1 = 2k + 1$, то строим $D_{s+1}$ согласно формуле (1), $p_{s+1} \leftrightharpoons p_s \cup \cup \{(L(2^{k+1} - 2), 0)\}$.

**Случай 2.** Если $s + 1 = 2k + 2$, то полагаем:

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ L(L(x)),\ R(L(x)),\ L(R(L(x))),\ R(R(L(x))),\ R(x),$$
$$L(R(x)),\ R(R(x)),\ L(R(R(x))),\ R(R(R(x))) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&$$
$$\&\ (p_s(x) \downarrow= 0)\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\} \cup$$
$$\cup \{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (p_s(x) \downarrow\neq 0)\ \&$$
$$\&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\}.$$

Пусть $y \in D_{s+1} \setminus D_s$. Если $H(y) \in D_s$ и $L(y) \notin D_{s+1}$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$. Если $H(y) \notin D_s$, $H(H(y)) \in D_s$ и $y = L(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 0$. Если $H(H(y)) \notin D_s$ и $y = L(H(y))$, то $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$.

Полагаем $D^2 \leftrightharpoons \bigcup\limits_{s\in\omega} D_s$. Построение закончено.

Далее доказательство проводится аналогично доказательству случая (a) с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}(\omega+\eta)$ на $\mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$, идеала безатомных элементов Als на $\neg$F — множество элементов, не принадлежащих идеалу Фреше. Также вместо предложения 1 нужно использовать предложение 3.

Лемма 2 доказана. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с конечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше, т. е. $\left|\mathrm{At}\left(\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)\right| < \omega$. $\mathfrak{B}$ $\Delta^0_2$-категорична тогда и только тогда, когда она относительно $\Delta^0_2$-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже упоминалось во введении, легко понять, что если $\mathfrak{B}$ относительно $\Delta^0_2$-категорична, то она $\Delta^0_2$-категорична, поэтому нам нужно доказать только то, что любая $\Delta^0_2$-категоричная булева алгебра с конечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше является относительно $\Delta^0_2$-категоричной.

Предположим, что $\mathfrak{B}$ — $\Delta^0_2$-категоричная вычислимая булева алгебра такая, что $\left|\mathrm{At}\left(\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)\right| < \omega$. Если множество атомов $\mathrm{At}(\mathfrak{B})$ конечно, то $\mathfrak{B}$ относительно вычислимо категорична, а следовательно, и относительно $\Delta^0_2$-категорична, поэтому всюду в дальнейшем можно считать, что $\mathrm{At}(\mathfrak{B})$ бесконечно.

**Случай 1.** Предположим, что $\mathfrak{B}$ — атомная алгебра.

Пусть $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)\times\mathfrak{B}(m)$, где $m\in\omega$. Тогда $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}(\omega\times\eta)\times\mathfrak{B}(\omega\times m)$, следовательно, по лемме 2, $\mathfrak{B}$ не может быть $\Delta^0_2$-категоричной.

Пусть $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(m)$, где $m\in\omega\setminus\{0\}$. В этом случае $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}(\omega\times m)$, и, согласно теореме 3, $\mathfrak{B}$ относительно $\Delta^0_2$-категорична, так как существуют $(c_1,\ldots,c_m \mid 1_{\mathfrak{B}})$ такие, что $(\forall i\leqslant m)(\widehat{c_i}\cong\mathfrak{B}(\omega))$.

**Случай 2.** Предположим, что $\mathfrak{B}$ разложима на атомную и ненулевую безатомную части, т. е. $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}(\eta)\times\mathfrak{B}_1$, где $\mathfrak{B}_1$ — атомная алгебра.

С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, приведенным выше, легко показать, что $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}(\eta)\times\mathfrak{B}(\omega\times m)$, где $m\in\omega\setminus\{0\}$, поэтому, согласно теореме 3, $\mathfrak{B}$ относительно $\Delta^0_2$-категорична.

**Случай 3.** В $\mathfrak{B}$ есть безатомный элемент, и $\mathfrak{B}$ не разложима на атомную и безатомную части.

Можно считать, что $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)\times\mathfrak{B}(m)$, где $m\in\omega$. Следовательно, $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_1\times$ $\times\,\mathfrak{B}(\omega\times m)$, где $\mathfrak{B}_1/_{\mathrm{F}}\cong\mathfrak{B}(\eta)$, $\mathfrak{B}_1$ не разложима на атомную и безатомную части, и множество $\mathrm{At}(\mathfrak{B}_1)$ бесконечно.

Если существует $a\in\mathfrak{B}$ такой, что $\widehat{a}\cong\mathfrak{B}(\omega+\eta)$ или $\widehat{a}\cong\mathfrak{B}(\omega\times\eta)$, то, согласно лемме 2, $\mathfrak{B}$ не может быть $\Delta^0_2$-категоричной.

Предположим, что $(\forall a\in\mathfrak{B})(\widehat{a}\ncong\mathfrak{B}(\omega+\eta)\ \&\ \widehat{a}\ncong\mathfrak{B}(\omega\times\eta))$. В этом случае, согласно предложению 3, $\mathfrak{B}_1\cong\mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$, поэтому, согласно лемме 2, $\mathfrak{B}$ не может быть $\Delta^0_2$-категоричной.

Итак, случай 3 не реализуется. Лемма 3 доказана. $\square$

## 3. Случай булевых алгебр с бесконечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше

**Предложение 4.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетная булева алгебра такая, что* $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}_2} \cong \mathfrak{B}(1)$. *Тогда* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega^2)$.

**Предложение 5.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетная 2-атомная булева алгебра такая, что* $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}_2} \cong \cong \mathfrak{B}(\eta)$. *Тогда* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega^2 \times \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложения 4 и 5 являются простыми следствиями следующего известного факта: две счетные $\alpha$-атомные булевы алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, если соответствующие фактор-алгебры $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}_\alpha}$ и $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}_\alpha}$ изоморфны и не одноэлементны.

**Предложение 6.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— счетная булева алгебра такая, что*

$$(\forall x \in \mathfrak{A})(\widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega + \eta) \ \&\ \widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega \times \eta) \ \&\ \widehat{x} \ncong \mathfrak{B}((2 + \eta) \times \eta)). \tag{3}$$

*Тогда*

(a) *если* $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\omega + \eta)$, *то* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(\omega^2 + \eta)$;

(b) *если* $\mathfrak{A}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}((2 + \eta) \times \eta)$, *то* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}((\omega + 1 + \eta) \times \eta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
**Случай (а)**. Будем обозначать $\mathfrak{B} \leftrightharpoons \mathfrak{B}(\omega^2 + \eta)$. Заметим, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (3). Рассмотрим следующее множество:

$$\begin{gathered} V \leftrightharpoons \{(a,b) \mid a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B},\ \widehat{a}/_{\mathrm{F}} \cong \widehat{b}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta),\ |\mathrm{At}(\widehat{a})| = |\mathrm{At}(\widehat{b})| < \omega\} \cup \\ \cup \{(a,b) \mid a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B},\ |\widehat{a}| = |\widehat{b}| < \omega\} \cup \\ \cup \{(a,b) \mid a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B},\ \widehat{a}/_{\mathrm{F}} \cong \widehat{b}/_{\mathrm{F}},\ \widehat{a}/_{\mathrm{F}} \ncong \mathfrak{B}(\eta),\ \widehat{a}/_{\mathrm{F}} \text{ — ненулевая}\}. \end{gathered}$$

Покажем, что $V$ является условием изоморфизма. Очевидно, что $(0_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{B}}), (1_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{B}}) \in \in V$. Кроме того, если $(a, 0_{\mathfrak{B}}) \in V$, то $a = 0_{\mathfrak{A}}$; если $(0_{\mathfrak{A}}, b) \in V$, то $b = 0_{\mathfrak{B}}$.

Зафиксируем $(a, b) \in V$ и $a_1$ — элемент $\mathfrak{A}$, такой, что $a_1 \leqslant a$. Нам необходимо доказать, что существует $b_1 \in \mathfrak{B}$, такое, что $b_1 \leqslant b$ и $(a_1, b_1), (a \wedge \mathrm{C}(a_1), b \wedge \mathrm{C}(b_1)) \in V$. В качестве примера приведем доказательство для следующего случая: $\widehat{a}/_{\mathrm{F}} \cong \widehat{b}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\omega + \eta)$ и $\widehat{a}_1/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)$.

Заметим, что в силу условия (3) и предложения 3 булева алгебра $\widehat{a}_1$ содержит только конечное число атомов, следовательно, $\widehat{a}_1 \cong \mathfrak{B}(\eta) \times \mathfrak{B}(m)$ для некоторого $m \in \omega$. Выберем $b_1 \leqslant b$, такое, что $\widehat{b}_1 \cong \mathfrak{B}(\eta) \times \mathfrak{B}(m)$. Тогда пары $(a_1, b_1)$ и $(a \wedge \mathrm{C}(a_1), b \wedge \mathrm{C}(b_1))$ попадут в $V$, так как

$$\widehat{a \wedge \mathrm{C}(a_1)}/_{\mathrm{F}} \cong \widehat{b \wedge \mathrm{C}(b_1)}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\omega + \eta).$$

Аналогично показывается, что если $(a, b) \in V$ и $b_1 \leqslant b$, то существует $a_1 \leqslant a$, такое, что $(a_1, b_1), (a \wedge \mathrm{C}(a_1), b \wedge \mathrm{C}(b_1)) \in V$.

Итак, по теореме Воота об изоморфизме [16. Следствие 1.5.3], $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{B}$.

**Случай (b)**. Обозначим $\mathfrak{B} \leftrightharpoons \mathfrak{B}((\omega+1+\eta)\times\eta)$. Определяя множество $V$ точно так же, как в случае (a), и используя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались в доказательстве случая (a), можно показать, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Предложение 6 доказано. □

**Лемма 4.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра. Предположим, что выполнено любое из следующих условий:*

(a) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2)$;
(b) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2 \times \eta)$;
(c) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2 + \eta)$;
(d) $(\exists x \in \mathfrak{A})\ \widehat{x} \cong \mathfrak{B}((\omega + 1 + \eta) \times \eta)$.

*Тогда $\mathfrak{A}$ не $\Delta^0_2$-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приведем только набросок доказательства (подробности легко восстановить, опираясь на доказательство леммы 2).

**Случай (a)**. Доказательство проводится аналогично доказательству случая (a) леммы 2 с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}(\omega+\eta)$ на $\mathfrak{B}(\omega^2)$, идеала безатомных элементов Als на $\neg$F — множество элементов, не принадлежащих идеалу Фреше, предложения 1 на предложение 4 и условия (2) на следующее условие:

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (\exists y \in D_s)(x = L(y))\ \& \\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\}.$$

**Случай (b)**. Доказательство проводится аналогично доказательству случая (c) леммы 2 с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}((2 + \eta) \times \eta)$ на $\mathfrak{B}(\omega^2 \times \eta)$ и предложения 3 на предложение 5.

Также меняется построение в. п. дерева $D^2$: на шаге $s + 1 = 2k + 2$ полагаем

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ L(L(x)),\ R(L(x)),\ R(x),\ L(R(x)),\ R(R(x)) \mid (x \in D_s)\ \& \\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (p_s(x)\downarrow= 0)\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\} \cup \\ \cup\{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (p_s(x)\downarrow= 1)\ \& \\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\}.$$

Пусть $y \in D_{s+1} \setminus D_s$. Если $H(y) \in D_s$, $L(y) \notin D_{s+1}$ и $y = R(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$. Если $H(y) \notin D_s$, $H(H(y)) \in D_s$ и $y = L(H(y))$, полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 0$. Если $H(y) \notin D_s$, $H(H(y)) \in D_s$ и $y = R(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$.

**Случай (c)**. Доказательство проводится аналогично доказательству случая (b) с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}(\omega^2 \times \eta)$ на $\mathfrak{B}(\omega^2 + \eta)$, $\neg$F на Als, предложения 5 на пункт (a) предложения 6.

Дерево $D^2$ строится так же, как и в случае (b), за исключением того, что на шаге $s + 1$ в случае, если $s + 1 = 2k + 2$, полагаем

$$D_{s+1} \leftrightharpoons D_s \cup \{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (p_s(x)\downarrow= 0)\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\} \cup \\ \cup\{L(x),\ R(x) \mid (x \in D_s)\ \&\ (L(x) \notin D_s)\ \&\ (p_s(x)\downarrow= 1)\ \& \\ \&\ (\mathrm{anc}(x) > 0)\ \&\ (P_0(\mathrm{anc}(x) - 1, k))\}.$$

Пусть $y \in D_{s+1} \setminus D_s$. Легко понять, что в этом случае $H(y) \in D_s$ и $p_s(H(y)) \downarrow$. Если $p_s(H(y)) = 0$ и $y = L(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 0$, иначе $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$.

**Случай (d)**. Доказательство проводится аналогично доказательству случая (c) леммы 2 с соответствующими заменами в рассуждениях: $\mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$ на $\mathfrak{B}((\omega+1+\eta)\times\eta)$ и предложения 3 на пункт (b) предложения 6.

Дерево $D^2$ строится аналогично уже упоминавшемуся случаю (c) леммы 2 со следующими изменениями: частичная функция $p_s$ действует из $D_s$ в $\{0,1,2\}$, и функция $p_{s+1}$ на шаге $s+1 = 2k+2$ определяется так, как указано ниже.

Пусть $y \in D_{s+1} \setminus D_s$. Если $H(y) \in D_s$, $L(y) \notin D_{s+1}$ и $p_s(H(y)) = 2$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 2$. Если $H(y) \in D_s$, $L(y) \notin D_{s+1}$, $p_s(H(y)) = 1$ и $y = L(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$. Если $H(y) \notin D_s$, $H(H(y)) \in D_s$ и $y = L(H(y))$, то полагаем $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 0$. Если $H(H(y)) \notin D_s$ и $y = L(H(y))$, то $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 1$. Если $H(H(y)) \notin D_s$ и $y = R(H(y))$, то $p_{s+1}(y) \leftrightharpoons 2$.

Лемма 4 доказана. □

**Лемма 5.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше, т. е. $\left|\mathrm{At}\left(\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)\right| = \omega$. Тогда $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что благодаря лемме 2 в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что

$$(\forall x \in \mathfrak{B})(\widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega+\eta) \;\&\; \widehat{x} \ncong \mathfrak{B}(\omega\times\eta) \;\&\; \widehat{x} \ncong \mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)).$$

Также заметим, что $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}_2}$ — ненулевая алгебра (так как $\left|\mathrm{At}\left(\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)\right| = \omega$).

Предположим, что в $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}_2}$ есть атомы, т. е. существует $x \in \mathfrak{B}$ такой, что $\widehat{x}/_{\mathrm{F}_2} \cong \mathfrak{B}(1)$. Тогда, согласно предложению 4, $\widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2)$, и, по лемме 4, $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична. Всюду далее считаем, что $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}_2} \cong \mathfrak{B}(\eta)$.

**Случай 1**. $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}$ — атомная алгебра.

В этом случае, согласно предложению 5, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\omega^2\times\eta)$ — не $\Delta^0_2$-категоричная алгебра.

**Случай 2**. $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}} \cong \mathfrak{B}(\eta)\times\mathfrak{B}_1$, где $\mathfrak{B}_1$ — бесконечная атомная алгебра.

Легко понять, что $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}(\omega\times\eta)$, поэтому $(\exists x \in \mathfrak{B})(\widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2\times\eta))$. Согласно лемме 4, $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична.

**Случай 3**. $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}$ не разложима на атомную и безатомную части.

Если $\left(\exists y \in \mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)(\widehat{y} \cong \mathfrak{B}(\omega\times\eta))$, то $(\exists x \in \mathfrak{B})(\widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2\times\eta))$, и, по лемме 4, $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична.

Если $\left(\exists y \in \mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)(\widehat{y} \cong \mathfrak{B}(\omega+\eta))$, то, согласно пункту (a) предложения 6, $(\exists x \in \in \mathfrak{B})(\widehat{x} \cong \mathfrak{B}(\omega^2+\eta))$, и, по лемме 4, $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична.

Если же $\left(\forall y \in \mathfrak{B}/_{\mathrm{F}}\right)(\widehat{y} \ncong \mathfrak{B}(\omega\times\eta) \;\&\; \widehat{y} \ncong \mathfrak{B}(\omega+\eta))$, то, по предложению 3, $\mathfrak{B}/_{\mathrm{F}} \cong \cong \mathfrak{B}((2+\eta)\times\eta)$, следовательно, по пункту (b) предложения 6, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}((\omega+1+\eta)\times\eta)$, и, по лемме 4, $\mathfrak{B}$ не $\Delta^0_2$-категорична.

Лемма 5 доказана. □

**Теорема 4.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра. $\mathfrak{B}$ $\Delta^0_2$-категорична тогда и только тогда, когда она относительно $\Delta^0_2$-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное следствие теоремы 3, лемм 3 и 5. (Достаточно заметить, что, согласно теореме 3, любая вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов в факторе по идеалу Фреше не относительно $\Delta^0_2$-категорична).

**Следствие 1.** *Пусть вычислимая булева алгебра $\mathfrak{B}$ не вычислимо категорична и $\mathbf{d}$-вычислимо категорична для некоторой тьюринговой степени $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{0}'$. Тогда $\mathbf{d} = \mathbf{0}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{B}$ $\mathbf{d}$-вычислимо категорична для тьюринговой степени $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{0}'$, то $\mathfrak{B}$ $\Delta^0_2$-категорична. Следовательно, согласно теоремам 3 и 4 (учитывая, что $\mathfrak{B}$ не вычислимо категорична), $\mathfrak{B}$ изоморфна одной из следующих алгебр: $\mathfrak{B}(\omega \times m)$ или $\mathfrak{B}(\eta) \times \mathfrak{B}(\omega \times m)$ для некоторого $m \in \omega \setminus \{0\}$. Для определенности будем считать, что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(\eta) \times \mathfrak{B}(\omega \times m)$.

Используя вычислимые представления линейных порядков $\eta$ и $\omega \times m$, легко построить вычислимую алгебру $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ такую, что множество атомов $\mathrm{At}(\mathfrak{A})$ будет вычислимым. Согласно теореме 1, $\mathbf{0}' \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{At})$, т. е. существует вычислимая булева алгебра $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ такая, что $\deg_T(\mathrm{At}(\mathfrak{C})) = \mathbf{0}'$.

Пусть $\varphi \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ — $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм. Ясно, что

$$\mathrm{At}(\mathfrak{C}) \leqslant_T \mathrm{At}(\mathfrak{A}) \oplus \varphi \implies \mathbf{0}' \leqslant \mathbf{0} \cup \mathbf{d} = \mathbf{d} \leqslant \mathbf{0}',$$

следовательно, $\mathbf{d} = \mathbf{0}'$. Следствие доказано. □

**Следствие 2.** *Пусть $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ — тьюрингова степень, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра. $\mathfrak{B}$ $\mathbf{d}$-вычислимо категорична тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ вычислимо категорична.*

Автор благодарит своего научного руководителя С. С. Гончарова за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку, а также П. Е. Алаева, чьи замечания помогли существенно улучшить качество работы.

## Список литературы

1. *Fröhlich A., Shepherdson J.* Effective Procedures in Field Theory // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1956. Vol. 248. No. 950. P. 407–432.

2. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры, I // Усп. мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.

3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. кн., 1999.

4. *Goncharov S. S.* Computability and Computable Models // Mathematical Problems from Applied Logic II / Eds. D. M. Gabbay, S. S. Goncharov, M. Zakharyaschev. N. Y.: Springer, 2006. P. 99–216.

5. *Goncharov S., Khoussainov B.* Open Problems in the Theory of Constructive Algebraic Systems // Computability Theory and its Applications / Eds. P. A. Cholak, S. Lempp, M. Lerman, R. A. Shore. Providence: Am. Math. Soc., 2000. P. 145–170.

6. *Гончаров С. С.* О числе неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 3. С. 257–282.

7. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in Computable Structure Theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. Vol. 136. No. 3. P. 219–246.

8. *Chisholm J., Fokina E. B., Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., Quinn S.* Intrinsic Bounds on Complexity and Definability at Limit Levels // J. Symb. Logic. 2009. Vol. 74. No. 3. P. 1047–1060.

9. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость и вычислимые семейства конструктивизаций // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 6. С. 647–680.

10. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.

11. *Remmel J. B.* Recursive Isomorphism Types of Recursive Boolean Algebras // J. Symb. Logic. 1981. Vol. 46. No. 3. P. 572–594.

12. *McCoy C.* $\Delta^0_2$-Categoricity in Boolean Algebras and Linear Orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 2003. Vol. 119. No. 1–3. P. 85–120.

13. *Мак-Кой Ч. Ф. Д.* О $\Delta^0_3$-категоричности для линейных порядков и булевых алгебр // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 531–552.

14. *Ash C. J.* Categoricity in Hyperarithmetical Degrees // Ann. Pure Appl. Logic. 1987. Vol. 34. No. 1. P. 1–14.

15. *Баженов Н. А.* О категоричности булевых алгебр типа $\mathfrak{B}(\omega^\alpha \times \eta)$ в гиперарифметической иерархии // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 35–45.

16. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. кн., 1996.

17. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество, 2000.

18. *Ash C. J., Khight J.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Amsterdam: Elsevier Science, 2000.

19. *Montalbán A.* On the Triple Jump of the Set of Atoms of a Boolean Algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136. No. 7. P. 2589–2595.

20. *Sacks G. E.* Recursive Enumerability and the Jump Operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 108. No. 2. P. 223–239.

21. *Гончаров С. С.* Некоторые свойства конструктивизаций булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 264–278.

*Материал поступил в редколлегию 23.07.2010*

**Адрес автора**

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: nickbazh@yandex.ru