А. Н. Кириллов, Н. Ю. Решетихин, Классификация струнных решений уравнений Бете в XXZ модели произвольного спина, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 146, 31–46

А.Н.Кириллов, Н.Ю.Решетихин

КЛАССИФИКАЦИЯ СТРУННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕТЕ В XXZ МОДЕЛИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Введение

Развитие теории интегрируемых квантовых моделей теории поля [I] позволило построить многие интересные обобщения известных модельных систем. В частности, в [2 - 7] получены обобщения магнетиков Гайзенберга с различными типами анизотропии на случай произвольной величины взаимодействующих спинов. Все эти модели описывают цепочки взаимодействующих магнитных атомов. При конечной длине цепочки спектр гамильтонианов таких моделей выражается через решения системы алгебраических уравнений, так называемой системы уравнений Бете. Для описания спектра возбуждений и структуры основного состояния модели в термодинамическом пределе необходимо прежде всего найти классификацию решений этой системы в пределе бесконечной длины цепочки. В случае полностью изотропного (XXX) магнетика Гайзенберга решение этой задачи хорошо известно - образуются конфигурации струнного типа (см. § I) с произвольной длиной струны и с произвольным расположением центра струны на вещественной оси. Ситуация намного усложняется, если анизотропия XXZ типа. Уже в случае спина $1/2$ разрешенными являются только струны с длинами, определенным образом соизмеримыми с параметром анизотропии [8, I0].

Настоящая работа посвящена классификации струнных решений уравнений Бете в XXZ модели произвольного спина. Обнаружено следующее интересное явление: только при спинах определенным образом соизмеримых с параметром анизотропии не возникает никаких ограничений на центры струн.

На основе результатов полученных для цепочки спина $1/2$ сформулировано феноменологическое правило, показывающее, на центры каких струн получаются ограничения. Это правило проверено численно на ряде примеров. В последней части работы нами получены неравенства, позволяющие понять структуру струнных решений в пределе, когда длина цепочки стремится к бесконечности при фиксированной плотности возбуждений.

Авторы благодарны Л.Д.Фаддееву, В.Е.Корепину, Е.К.Склянину за обсуждения и А.Ю.Волкову за помощь в проведении численных экспериментов.

§ I. Структура струнных решений над ферромагнитным вакуумом

Уравнения Бете в XXZ модели спина S будем записывать в следующем виде [7]:

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda_j+2is)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda_j-2is)\right)}\right)^N=\prod_{k\neq j}^{M}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda_j-\lambda_k+2i)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda_j-\lambda_k-2i)\right)}. \tag{I.I}$$

Здесь γ - параметр анизотропии, S - спин магнетика, N - длина цепочки, M - количество возбуждений над ферромагнитным вакуумом. Это система уравнений на числа λ_j.

В этом разделе мы изучим структуру решений системы уравнений (I.I) над ферромагнитным вакуумом, т.е. при $N\to\infty$, M - фиксированном. Решения системы (I.I) в этом пределе группируются в так называемые струнные конфигурации - комплексы эквидистантно расположенных чисел λ_j :

$$\lambda_{\alpha,j}^{(n)}=\lambda_{\alpha}^{(n)}+i(n+1-2j)+\delta_{j,\alpha}^{(n)}+\frac{i}{2}p_0(1-v_n v_{2s}),\quad j=1,\dots,n,\qquad v_{2s}=\exp\left(i\pi\left[\frac{2s-1}{p_0}\right]\right) \tag{I.2}$$

где

$$\delta_{j,\alpha}^{(n)}=O\left(\exp(-\beta N)\right),\quad \beta>0,\quad p_0=\frac{\pi}{\gamma} \tag{I.3}$$

Величина $\lambda_{\alpha}^{(n)}$ называется центром струны, n - ее длиной, $v_n=\pm 1$ - четность струны, $v_{2s}=\pm 1$ - четность спина.

Чтобы получить условия образования струнных комплексов, перемножим уравнения (I.I) для $\lambda_{\alpha,j}^{(n)}$ с номерами $j=1,\dots,k$ при этом получается следующая система уравнений:

$$\left(f_k^{(n,s)}(\lambda_{\alpha}^{(n)})\right)^N=\prod_{m\geq 1}\ \prod_{\lambda_{\beta}^{(m)}\neq\lambda_{\alpha}^{(n)}} S_k^{(n,m)}(\lambda_{\alpha}^{(n)}-\lambda_{\beta}^{(m)})\times$$

$$\times\ \mathrm{const}\ \frac{1}{\delta_{\alpha,k}^{(n)}-\delta_{\alpha,k+1}^{(n)}}, \tag{I.4}$$

где

$$f_k^{(n,s)}(\lambda)=\prod_{l=1}^{k}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}\left(\lambda+i(n+1+2s-2l)+i\frac{p_0}{2}(1-v_n v_{2s})\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma}{2}\left(\lambda+i(n-1+2s-2l)-i\frac{p_0}{2}(1-v_n v_{2s})\right)\right)}, \tag{I.5}$$

$$S_k^{(n,m)}(\lambda)=\prod_{l=1}^{k}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda+i(n+m-2l+\frac{p_0}{2}(1-v_n v_m)))\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda-i(n-m-2l+\frac{p_0}{2}(1-v_n v_m)))\right)}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{k}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda+i(n+m-2l+2+\frac{p_0}{2}(1-v_n v_m)))\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\gamma}{2}(\lambda-i(n-m-2l+2+\frac{p_0}{2}(1-v_n v_m)))\right)}. \tag{I.6}$$

Через const в (I.4) обозначен вклад от чисел $\lambda_{\alpha,j}^{(n)}$ с $j>k$. При $k=n$ последний множитель в (I.4) отсутствует и сы получаем систему уравнений на центры струн.

Если $N\longrightarrow\infty$, M - фиксировано, то необходимым и достаточным условием существования струнного решения с центром $\lambda_\alpha^{(n)}$ длиной n, четностью v_n будет возрастание левой части в (I.4) при $N\longrightarrow\infty$ и при всех $k=1,\dots,n-1$. Иными словами, должны выполняться следующие неравенства:

$$\left|f_k^{(n,s)}(\lambda)\right|>1,\quad k=1,\dots,n-1 \tag{I.7}$$

Перейдем к изучению этой системы неравенств. Введем новую переменную

$$z=\mathrm{ch}(\gamma\lambda)$$

В этих обозначениях неравенства (I.7) записываются в виде

$$\prod_{l=1}^{k}\frac{z-\cos\gamma(y+2s-2l)}{z-\cos\gamma(y-2s-2l)}>1,\quad k=0,\dots,n-2, \tag{I.8}$$

где $y=n-1+\pi\frac{1-v_n v_{2s}}{2\gamma}$. Переменная z меняется в области$(1,\infty)$.

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить выполнены ли эти неравенства при всех $z\geqslant1, n, k\geqslant1$, или же они нарушаются.

Пусть сначала $s=1/2$. В этом случае неравенства (I.8) существенно упрощаются:

$$\frac{z-\cos\gamma(y+1)}{z-\cos\gamma(y-1-2k)}>1,\quad k=0,\dots,n-2 \tag{I.9}$$

Написанные неравенства эквивалентны условиям Такахаши - Корепина [8, 9]

Определим функцию

$$Q_k(z)=\prod_{\ell=0}^{k}(z-\cos\gamma(y+2s-2\ell))-\prod_{\ell=0}^{k}(z-\cos\gamma(y-2s-2\ell)) . \qquad (\text{П}1)$$

Ясно, что неравенства (I.8) эквивалентны неравенствам

$$Q_k(z)>0 , \quad k=0,1,\dots, n-2 . \qquad (\text{П}2)$$

При $k=0$, $Q_0(z)=2\sin\gamma_y \sin(2s\gamma)=2\sin\gamma(n-1)\cdot v_n\cdot v_{2s}$. Условие $Q_0(z)>0$ определяет слагаемое $\frac{i}{2}p_0(1-v_n v_{2s})$ в струнной конфигурации (I.2). Здесь $y=n-1+\frac{\pi}{2\gamma}(1-v_n v_{2s})$ Несложные вычисления показывают, что

$$Q_1(z)=\frac{2}{\sin\gamma}\left[v_{2s}\sin(2s\gamma)\right]\left[\sin 2\gamma\cdot\sin(\gamma(n-2))\,v_n\right]\times$$

$$\times\left\{z-\cos\gamma(y-1)\frac{\cos\gamma s}{\cos\gamma}\right\}=\frac{2}{\sin\gamma}\left[v_{2s}\cdot\sin(2s\gamma)\right]\times$$

$$\times\left[\sin 2\gamma\cdot\sin\gamma(n-2)v_n\right]\left\{z-\cos\gamma(y-2s)+\frac{\left[\sin\gamma y\cdot\sin 2sy\right]\left[\sin 2s\gamma\cdot\sin(2s-1)\gamma\right]}{(\sin 2s\gamma)^2\cos\gamma}\right\} \qquad (\text{П}3)$$

Многочлен $Q_k(z)$ имеет степень k по переменной z . Коэффициент при z^k у многочлена $Q_k(z)$ равен

$$\sum_{\ell=0}^{k}\left[\cos\gamma(y-2s-2\ell)-\cos\gamma(y+2s-2\ell)\right]=2\sin(2s\gamma)\sum_{\ell=0}^{k}\sin\gamma(y-2\ell)=$$

$$=2\sin(2s\gamma)\frac{\sin(\gamma(y-k))\sin(\gamma(k+1))}{\sin\gamma}=2\frac{\left[v_{2s}\sin(2s\gamma)\right]}{\sin\gamma}\sin(\gamma(k+1))\sin(\gamma(n-k-1))v_n .$$

Неравенства (П2) выполняются для достаточно больших z тогда и только тогда, когда коэффициент при z^k больше нуля. Это означает, что

$$v_n\sin(\gamma k)\sin(\gamma(n-k))>0 \qquad \text{для } k=1,\dots,n-1 .$$

Если $p_0\in\mathbb{Q}$, то надо заметить, что как длины струн, так и удвоенный спин строго меньше числителя несократимой дроби $p_0=\frac{u}{v}$ (см. [8], [7]).

Теорема I полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При вычислении других коэффициентов многочлена $Q_k(z)$ используются красивые тождества для сумм синусов. Приведем одно из таких тождеств

$$\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_p\le k}\sin\gamma(pz-2(j_1+\dots+j_p))=\sin(p\gamma(z-k))\prod_{j=1}^{p}\frac{\sin\gamma(k+2-j)}{\sin(\gamma j)} \qquad (\text{П}4)$$

$$\vartheta_n \sin(\gamma(n-j))\sin(\gamma j) > 0\,,\ j=1,\ldots,n-1\,. \tag{I.10}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для выполнения (I.9) при всех $z \geqslant 1$, помимо этого они приводят к соизмеримости допустимых длин струн с параметром анизотропии γ.

При заданной анизотропии γ допустимые числа n описываются следующим образом. Разложим $p_0 = \frac{\pi}{\gamma}$ в цепную дробь:

$$p_0 = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}\,. \tag{I.11}$$

Определим последовательности y_i и m_i

$$y_{-1}=0,\ y_0=1,\ y_1=b_0\,,\ y_{i+1}=y_{i-1}+b_i y_i\,,\quad i \geqslant 0 \tag{I.12}$$

$$m_0=0,\ m_1=b_0\,,\ m_{i+1}=m_i+b_i\,,\quad i\geqslant 0\,. \tag{I.13}$$

Длины разрешенных неравенствами (I.10) струн образуют серии Такахаши [8]:

$$n_j = y_{i-1}+(j-m_i)y_i\,,\ m_i \leqslant j < m_{i+1}\,,\quad i \geqslant 0 \tag{I.14}$$

Четности этих струн определяются по формуле

$$\vartheta_{n_j} = \exp\left(i\pi\left[\frac{n_j-1}{p_0}\right]\right),\ j \neq m_1\,,\ \vartheta_{n_{m_1}} = -1\,. \tag{I.15}$$

Перейдем к случаю произвольного спина. Рассмотрим неравенства (I.8) при $z \to \infty$. Справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА I. Для выполнения неравенств (I.8) при $z \to \infty$ необходимо и достаточно чтобы числа n являлись числами Такахаши (I.14).

Доказательство этой теоремы дано в Приложении. Отметим, что в области $z \to \infty$ никаких ограничений на спин не возникло.

Прежде чем рассматривать неравенства (I.8) во всей области изменения переменной z, исследуем случай простейшей нетривиальной анизотропии $p_0 = 3 + 1/3$. В этом случае числа Такахаши принимают следующие значения:

j	I	2	3	4	5	6
n_j	I	2	I	4	7	3
ϑ_j	+	+	−	+	−	+

Табл.I

Пусть спин $s=\frac{5}{2}$, таким образом, $m=2s+1=6$ не является числом Такахаши. Легко проверить, что $\nu_m=-1$, $y=6$

ЛЕММА. Для струн длины $n_j=\gamma$ в области

$$1\leqslant z\leqslant\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

неравенства (I.8) не выполняются при $k=2,3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае рациональные функции (1.8) имеют следующий вид

$$R_k(z)=\prod_{\ell=0}^{k}\frac{z+\cos\frac{3\pi}{10}(2\ell-1)}{z-\cos\frac{3\pi}{10}(2\ell-1)}\,,\quad k=0,1,2,3,4,5\,.$$

Легко проверить, что

$$R_2(z)=R_3(z)=\left(\frac{z+\cos\frac{3\pi}{10}}{z-\cos\frac{3\pi}{10}}\right)^2\frac{z-\cos\frac{\pi}{10}}{z+\cos\frac{\pi}{10}}\,.$$

Рассмотрим разность между числителем и знаменателем рациональной функции $R_2(z)$. Обозначим ее через $Q_2(z)$. После несложных вычислений для $Q_2(z)$ получаем следующее выражение

$$Q_2(z)=z^2\left[2\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}\right]-\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos^2\frac{3\pi}{10}\,.$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\cos\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}\,,\qquad \cos^2\frac{3\pi}{10}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}\,,$$

Следовательно,

$$Q_2(z)=(\sqrt{5}-2)\cos\frac{\pi}{10}\left(z^2-\frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right)$$

Лемма доказана.

Подробный анализ этого примера приводит к следующему выводу: неравенства (I.8) выполняются при всех $z\geqslant 1$ для спинов $s=(m-1)/2$, где $m=1,2,3,4,5,7,9$,
некоторые из неравенств (I.8) не выполняются на промежутке $[1,\infty)$ для спинов $s=\frac{m-1}{2}$, где $m=6,8$.

Приведенный пример показывает, что существуют спины, для которых появляются ограничения на расположение центров струн. Следующая теорема показывает, что существует естественный класс спинов, для которых таких ограничений не возникает.

ТЕОРЕМА 2. Если $2S+1$ является числом Такахаши, то неравенства (I.8) выполняются при всех $z \geqslant 1$.

Доказательство дано в Приложении.

Мы получили достаточное условия выполнения неравенств (I.8). Однако, как видно из рассмотренного выше примера, они не являются необходимыми.

Для выяснения необходимых и достаточных условий выполнения неравенств (I.8). при всех $z \geqslant 1$, приведем результаты численных экспериментов. Укажем те наборы чисел $(m; n_1, n_2 ...)$, где $m = 2S+1$, n_i - длины рассматриваемых струн, для которых некоторые из неравенств (I.8) не выполняются во всей области $z \geqslant 1$.

$p_0 = 3+\frac{1}{4}$, $(6;7,10)$, $(9;7,10)$

$p_0 = 4+\frac{1}{3}$, $(6;9)$, $(8;9)$

$p_0 = 4+\frac{1}{4}$, $(6;9,13)$, $(8;9,13)$, $(10;9,13)$, $(12;9,13)$

$p_0 = 3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}$, $(6;7,13,23,10)$, $(9;7,13,23,10)$, $(12;7,13,23,10)$, $(14,23)$, $(16;7,13,23,10)$, $(18;23)$, $(19;7,13,23,10)$, $(20;23)$, $(22;7,13,23,10)$.

Существует простое правило, объясняющее распределение "плохих" и "хороших" спинов в Табл.2. Оно обобщает на случай произвольного спина феноменологическое правило Такахаши, полученное им для спина $1/2$.

В работе [8] получено следующее правило, позволяющее классифицировать разрешенные длины струн n_i (I.14). Оно основано на следующем предположении. Рассмотрим такое состояние в термодинамическом пределе [8], которое характеризуется нулевыми плотностями дырок $\rho^h_{n,v_n}(\lambda) = 0$, а единственной ненулевой плотностью распределения частиц является $\rho_{n,v_n}(\lambda)$. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{n,v_n}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2n}\,, \qquad (I.16)$$

тогда из системы уравнений для ρ^h и ρ (ур. (5.4) из 8), следует, что числа n и четности v_n должны иметь вид (I.14), (I.15).

Сформулируем естественное обобщение этого правила на случай произвольного спина S. Заметим, что из Теоремы I следует, что длины всех разрешенных струн являются числами Такахаши (I.14), поэтому обобщение сформулированного выше правила будет условием на спин S

Предположим, что струны длины n_j существуют при всех значениях $\lambda_\alpha^{(n_j)}$ и $n = n_j \geqslant 2S+1$. Рассмотрим снова состояние в котором единственной ненулевой плотностью распределения частиц является $\rho_{n,v_n}(\lambda)$, а плотности $\rho^h_{n,v_n}(\lambda)$ равны нулю. Потребуем выполнения следующих равенств:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{n,v_n}(\lambda)\, d\lambda = \frac{S}{n}, \quad n = n_j \geqslant 2S+1. \qquad (I.17)$$

Из системы интегральных уравнений для ρ и ρ^h (ф-ла (2.16) из [7]) следует, что выполняются следующие равенства:

$$\sum_{l=1}^{m-1} \left(\left(\frac{n-m+2l}{2p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\right)\right) = -\frac{q_n}{2p_0}\,(m-1), \quad \text{для всех}$$

$$n = n_j \geqslant m = 2S+1. \qquad (I.18)$$

Здесь $((x))$ - функция Дедекинда,

$$((x)) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ - целое число} \\ \{x\} - \frac{1}{2}, & \text{если } x \text{ - нецелое число,} \end{cases} \qquad (I.18a)$$

$\{x\}$ - дробная часть числа

Числа q_n определяются из равенства

$$\frac{q_n}{p_0} = 1 - \frac{1}{p_0} - \left\{\frac{n-1}{p_0}\right\}.$$

Условие (I.18) будем называть феноменологическим правилом отбора спинов.

Можно проверить, см. [7], что условие (I.18) выполняется, если $m = 2S+1$ является числом Такахаши (I.14). Значения спинов, для которых равенства (I.18) выполняются или не выполняются, совпадают со значениями спинов, для которых выполняются или не выполняются неравенства (I.8) во всех рассмотренных численных примерах. Для анизотропии, которая описывается двухшаговой дробью $p_0 = b_0 + \frac{1}{b_1}$, удается получить простое правило (I.19) - (I.20), эквивалентное феноменологическому правилу отбора спинов, и доказать, что выполнение равенств (I.18) гарантирует выполнение всех неравенств (I.8) при всех $z \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 3.

1. Если $m = 2s+1$ является числом Такахаши (I.14), то справедливы равенства (I.18).

2. Пусть m не является числом Такахаши. Если выполнено сравнение

$$b_0\left(\left\{\frac{m-1}{b_0}\right\}-1\right) \equiv 0 \pmod 2, \tag{I.19}$$

то справедливы равенства (I.18).

3. Пусть m не является числом Такахаши. Если выполнено сравнение

$$b_0\left(\left\{\frac{m-1}{b_0}\right\}-1\right) \equiv 1 \pmod 2, \tag{I.20}$$

то для некоторых $n = n_j \geqslant m$ равенства (I.18) не выполняются.

4. Если m не является числом Такахаши, но выполнено сравнение (I.19), то неравенства (I.8) справедливы для всех $z \geqslant 1$

Доказательство приведено в Приложении.

В случае, если m не является числом Такахаши и выполнено сравнение (I.20), мы предполагаем, что неравенства (I.8) нарушаются для некоторых K в области $z \geqslant 1$.

Полученные результаты позволяют сформулировать гипотезу

ГИПОТЕЗА I. Неравенства (I.8) при всех $z \geqslant 1$ и фиксированном спине s выполняются тогда и только тогда, когда $m = 2s+1$ удовлетворяет феноменологическому правилу (I.18). Интересной задачей представляется явное описание всех чисел $m = 2s+1$, для которых выполнено условие (I.18). На этом мы закончим классификацию струнных решений при $N \longrightarrow \infty$, M - фиксированном и перейдем к описанию струнных конфигураций в термодинамическом пределе.

§ 2. Описание струнных конфигураций в термодинамическом пределе с конечной плотностью возбуждений

В этом разделе мы получим систему неравенств, которая определяет струнные конфигурации решений системы (I.4) при $N, M \to \infty$ и фиксированном отношении M/N. В этом пределе вместо (I.7), из условия $\delta^{(n)}_{j,\alpha} \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty$ мы получаем из системы (I.4) следующие неравенства:

$$\left| f_k^{(n,s)}(\lambda_\alpha^{(n)})\right|^{2N} \prod_{m\geq 1} \prod_{\lambda_\beta^{(m)}\neq\lambda_\alpha^{(n)}} \left| S_k^{(n,m)}(\lambda_\alpha^{(n)}-\lambda_\beta^{(m)})\right|^2 = a^N, \quad a>1 . \tag{2.I}$$

При $N\to\infty$ центры струн $\lambda_\alpha^{(n)}$ заполняют вещественную ось с плотностями $\rho_n(\lambda)$. Из теоремы I следует, что числа являются числами Такахаши. Уравнение (I.4) при $k=n$ приводит к системе интегральных уравнений на плотности $\rho_n(\lambda)$

$$a_{j,2s}(\lambda)=(-1)^{r(j)}\rho_{n_j}^h(\lambda)+\sum_{k\geq 1}\int_{\sigma_{n_k}} A_{jk}(\lambda-\mu)\rho_{n_k}(\mu)\,d\mu, \quad \lambda\in\sigma_{n_j} \tag{2.2}$$

Здесь $\rho_n^h(\lambda)>0$ – плотность дырок [8], ядра A_{jk} и функции $a_{j,2s}$ описаны в [7], $r(j)=i$, если $m_i\leq j<m_{i+1}$. Множества σ_n по определению являются областями, где существуют струны длины n.

Переходя к пределу $N\to\infty$ в (2.I), получим следующую систему неравенств:

$$\ln\left|f_k^{(n,s)}(\lambda)\right|^2-\sum_{m\geq 1}\int_{\sigma_m}\ln\left(\left|S_k^{(n,m)}(\lambda-\mu)\right|^2\right)\rho_{n_m}(\mu)\,d\mu>0, \quad \lambda\in\sigma_n \tag{2.3}$$

Выполнение этой системы неравенств будет означать, что образуются струны длины с центрами

Функции $\ln|f|^2$ и $\ln|S|^2$ в (2.3) можно описать через их преобразования Фурье. Пусть

$$F_k^{(n,s)}(\lambda)=\ln\left|f_k^{(n,s)}(\lambda)\right|^2, \tag{2.4}$$

$$\Phi_k^{(n,m)}(\lambda)=\ln\left|S_k^{(n,m)}(\lambda)\right|^2, \tag{2.5}$$

тогда

$$\hat{F}_k^{(n,s)}(x)=-\frac{2\pi}{x\,sh(p_0x)}\sum_{\ell=1}^{k}\left\{ ch\left[2p_0x\left(\left(\frac{n+1+2s-2\ell}{2p_0}+\frac{1-v_nv_{2s+1}}{4}\right)\right)\right]-ch\left[2p_0x\left(\left(\frac{n+1-2s-2\ell}{2p_0}+\frac{1\ v_nv_{2s+1}}{4}\right)\right)\right]\right\} \tag{2.6}$$

$$\hat{\Phi}_k^{(n,m)}(x) = -\frac{2\pi}{x\,\mathrm{sh}(p_0 x)} \sum_{\ell=1}^{k} \Big\{ \mathrm{ch}\Big[2p_0 x\Big(\Big(\frac{n+m-2\ell}{2p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\Big)\Big)\Big] +$$
$$+\mathrm{ch}\Big[2p_0 x\Big(\Big(\frac{n+m-2\ell+2}{2p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\Big)\Big)\Big] - \mathrm{ch}\Big[2p_0 x\Big(\Big(\frac{n-m-2\ell}{2p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\Big)\Big)\Big]$$
$$-\mathrm{ch}\Big[2p_0 x\Big(\Big(\frac{n-m-2\ell+2}{2p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\Big)\Big)\Big]\Big\}, \qquad (2.7)$$

где $((x))$ – функция Дедекинда (I.I8a).

Мы используем следующие обозначения для преобразования Фурье:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\lambda} f(\lambda)\,d\lambda, \quad f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \hat{f}(x) \frac{dx}{2\pi}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, мы получили условия существования струнных решений в пределе $N, M \to \infty$, с фиксированной плотностью возбуждений M/N. Они состоят в следующем: неравенства (2.3) должны выполняться при условии, что плотности $\rho_n(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (2.2).

При целом параметре анизотропии γ доказательство неравенств (2.3) приведено в работе [II]. В изотропном случае это сделано Годеном [I2].

Если анизотропия и спин магнетика произвольные, то анализ этой системы является довольно сложной задачей и к настоящему времени нерешенной.

Наибольший интерес представляет интерес определить те значения спина, для которых ограничения на центры струн не возникают ни при каких значениях плотностей струн ν_n :

$$\nu_n = \int_{\sigma_n} \rho_n(\lambda)\,d\lambda. \qquad (2.9)$$

К настоящему времени имеется ряд аргументов в пользу следующей гипотезы:

ГИПОТЕЗА 2. На центры струн $\lambda_\alpha^{(n)}$ при $N \to \infty$ не возникает ограничений ни при каких значениях ν_n только если $2s+1$ является числом Такахаши (I.I4).

Заключение

Отсутствие ограничений на центры струн важно для описания и вычисления значений физических величин в термодинамическом пределе. Если же ограничения имеются, то области σ_n, в которых существуют струны длины n, будут зависеть от плотностей

ν_n . А это, в свою очередь, лишает задачу ее привлекательности – возможности получить сколько-нибудь явные выражения, описывающие антиферромагнитные основное состояние и термодинамику модели.

Сформулируем теперь полученные результаты и перечислим некоторые нерешенные задачи. Мы дали классификацию струнных решений над ферромагнитным вакуумом (неравенства (I.8)). Получен ряд достаточных условий существования струнных решений (теорема I) и сформулировано феноменологическое правило (см.(I.8)) для отбора спинов, для которых не возникает ограничений на расположение всех допустимых теоремой I центров струн. Доказано, что если спин s удовлетворяет условию: $2s+1 = m$ является числом Такахаши (I.I4), то спин s удовлетворяет феноменологическому правилу отбора спинов (теорема 2). Более детально рассмотрен случай, когда параметр анизотропии описывается двухшаговой дробью $p_0 = b_0 + \frac{1}{b_1}$ (теорема 3). Получена система неравенств, выполнение которых является необходимым и достаточным условием существования струнных решений над физическим вакуумом (неравенства (2.3)).

Из нерешенных задач наибольший интерес, на наш взгляд, представляет доказательство гипотез I, 2. Отметим, что неравенства (I.8) равносильны утверждению о положительной определенности функций $\hat{F}_k^{(n,s)}(x)$ (см.(2.4)) для всех допустимых теоремой I значений n и всех $k = 0, \dots, n-2$. Определение положительно определенных функций см., например, в [I4]. В теореме 2 положительная определенность функций $\hat{F}_k^{(n,s)}(x)$ (при тех же ограничениях на n и k) доказана для тех спинов, s , для которых число $m = 2s+1$ является числом Такахаши (I.I4). В гипотезе I утверждается, что все спины s , для которых функции $\hat{F}_k^{(n,s)}(x)$ являются положительно определенными для всех допустимых значений n и всех $k = 0, \dots, n-2$, описываются феноменологическим правилом (I.I8). В гипотезе 2 утверждается, что в термодинамическом пределе, над физическим вакуумом, остаются не запрещенными только те спины s , для которых $m = 2s+1$ является числом Такахаши (I.I4).

Представляет также интерес классификация струнных решений алгебраических уравнений Бете и для других точно решаемых моделей, например, анизотропного $SU(n)$ -магнетика Гайзенберга. Авторы предполагают рассмотреть эти вопросы в последующих публикациях.

Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сформулированных теорем.

Равенство (П4) следует из тождества (П5) для биномиальных коэффициентов Гаусса

$$\sum_{0\le j_1<j_2<\ldots<j_p\le k} x^{j_1+\ldots+j_p} = x^{\frac{p(p-1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ p \end{bmatrix}_x . \qquad (\text{П}5)$$

Биномиальный коэффициент Гаусса $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_x$ определяется по формуле

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_x = \frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}{(1-x)\ldots(1-x^p)(1-x)\ldots(1-x^{n-p})} .$$

Доказательство равенства (П5) можно найти в книге [I3].

Используя равенство (П4), можно показать, что

$$Q_k(z) = 2\sin(2s\gamma)\sin(\gamma(y-k))\frac{\sin\gamma(k+1)}{\sin\gamma}\left\{z^k - \frac{\sin\gamma_k}{\sin\gamma}\cos\gamma(y-k)\frac{\cos 2s\gamma}{\cos\gamma}z^{k-1} + O(z^{k-2})\right\}.$$

К сожалению, нам не удалось доказать теорему 2 используя явное выражение для многочленов $Q_k(z)$. Мы используем другой метод, подсказанный формулой (П3) для многочлена $Q_1(z)$

ТЕОРЕМА 4. Имеет место следующее равенство

$$R_k(z) = 1 + \sum_{l=0}^{k-1}\prod_{p=0}^{l} \frac{2v_n v_{2s}\sin\gamma(2s-p)\sin\gamma(n+p-k)\sin\gamma(k-p)}{\sin\gamma(p+1)\{z - v_n v_{2s}\cos\gamma(n+1+2p-2s-2k)\}} . \qquad (\text{П}6)$$

Теорема 2 есть следствие теоремы 4. Действительно, если n и $2s+1$ являются числами Такахаши (I.I4), то в области каждое слагаемое в правой части равенства (П6) положительно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_k)$. Рассмотрим разложение

$$\frac{f(x)}{(x-b_1)\ldots(x-b_k)} = 1 + \frac{c_1^{(k)}}{x-b_k} + \frac{c_2^{(k)}}{(x-b_k)(x-b_{k-1})} + \ldots + \frac{c_k^{(k)}}{(x-b_k)(x-b_{k-1})\ldots(x-b_1)} . \qquad (\text{П}7)$$

Мы хотим вычислить коэффициенты $c_l^{(k)}$ через последовательности $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$. Ясно, что $c_k^{(k)} = f(b_1)$. Пусть $1\le p\le k$. Используя индукцию, легко показать, что

$$c_{k-p}^{(k)} = \Delta_{p+1}(b_1,\ldots,b_{p+1}; f(b)) / \Delta_{p+1}(b_1,\ldots,b_{p+1}) ,$$ где

$$\Delta_{p+1}(b_1,\ldots,b_{p+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & \ldots & b_{p+1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_1^p & \ldots & b_{p+1}^p \end{vmatrix}, \quad \Delta_{p+1}(b_1\ldots b_{p+1}, f(b)) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & \ldots & b_{p+1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_1^{p-1} & \ldots & b_{p+1}^{p-1} \\ f(b_1) & \cdots & f(b_{p+1}) \end{vmatrix} . \qquad (\text{П}8)$$

Для доказательства равенства (П6) положим в (П7)

$x = v_n v_{2s} z, \quad a_j = \cos\gamma(n+2s-1-2j), \quad b_j = \cos\gamma(n-2s-1-2j)$.

Для этих значений $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$ вычисление определителей (П8) дает следующий ответ

$$\Delta_{p+1}(b_1,\dots,b_{p+1}) = \prod_{1\le i<j\le p+1} \left[2\sin\gamma(n+1-2s-i-j)\sin\gamma(j-i)\right]$$

$$C^{(k)}_{k-p} = 2^{k\,p} \prod_{j=p+1}^{k} \sin\gamma(n-j) \prod_{j=1}^{k-p} \sin\gamma(2s+1-j) \prod_{j=1}^{p} \frac{\sin\gamma(k-j+1)}{\sin\gamma j} =$$

$$= \prod_{j=0}^{k-p-1} \frac{2\sin\gamma(2s-j)\sin\gamma(n-k+j)\sin\gamma(k-j)}{\sin\gamma(j+1)} .$$

Теорема 4 полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда параметр анизотропии описывается двухшаговой дробью $p_0 = b_0 + \frac{1}{b_1}$. В этом случае числа Такахаши (I.I4) принимают следующие значения

$$n_j = j, \quad 1 \le j < b_0 = m_1 \;, \quad v_j = 1,$$
$$n_{m_1} = 1, \quad v_{m_1} = -1,$$
$$n_j = 1 + (j-b_0)b_0, \quad m_1 \le j < m_2 = b_0 + b_1, \quad v_j = (-1)^{j-b_0-1},$$
$$n_{m_2} = b_0, \quad v_{m_2} = 1 .$$

Пусть $2s+1 = m = kb_0 + 1 + \lambda$, $0 \le \lambda \le b_0 - 1$, $v_m = (-1)^{k-1}$, если $\lambda \ne 0$. Число m не является числом Такахаши только при $\lambda \ne 0$. Пусть $\ell = pb_0 + q$, $0 \le q < b_0$. В сумме, стоящей в левой части формулы (I.I8), рассмотрим слагаемые соответствующие ℓ и $m = \ell$.

Пусть $n = n_j$. Имеем

$$\left(\!\left(\frac{n-m}{2p_0} + \frac{\ell}{p_0} + \frac{1-v_n-v_m}{4}\right)\!\right) = \left(\!\left(\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)} + \frac{b_1(2q-\lambda-1-b_0)+k-2p-1}{2(b_0b_1+1)}\right)\!\right),$$

$$\left(\!\left(\frac{n+m}{2p_0} - \frac{\ell}{p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\right)\!\right) = \left(\!\left(\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)} - \frac{b_1(2q-\lambda-1-b_0)+k-2p-1}{2(b_0b_1+1)}\right)\!\right).$$

Следовательно,

$$\left(\!\left(\frac{n-m}{2p_0} + \frac{\ell}{p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\right)\!\right) + \left(\!\left(\frac{n+m}{2p_0} - \frac{\ell}{p_0} + \frac{1-v_n v_m}{4}\right)\!\right) =$$

$$=\left(\left(\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}+\left|\frac{b_1(2q-b_0-\lambda-1)+k-2p-1}{2(b_0b_1+1)}\right|\right)\right)+\left(\left(\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}-\left|\frac{b_1(2q-b_0-\lambda-1)+k-2p-1}{2(b_0b_1+1)}\right|\right)\right). \quad (П9)$$

Сравнение (I.I9) эквивалентно сравнению $\lambda+1+b_0\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$. Следовательно,

$$\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}-\left|\frac{b_1(2q-\lambda-1-b_0)}{2(b_0b_1+1)}\right|\leqslant\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}-\frac{b_1-(k-2p-1)}{2(b_0b_1+1)}=$$

$$=\frac{k-2p-1-(j-b_0)}{2(b_0b_1+1)}<0, \qquad \text{т.к. } n\geqslant m \text{ , или } j-b_0\geqslant k .$$

Поэтому сумма в правой части равенства (П9) вычисляется следующим способом

$$\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}+|\ldots|-\frac{1}{2}+\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}+1-|\ldots|-\frac{1}{2}=\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}=-\frac{q_n}{p_0} .$$

Этим доказан пункт 2 теоремы 3.

Если $\lambda+1+b_0\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то положим в равенстве (П9)

$$q=\frac{\lambda+1+b_0}{2}<b_0 .$$

Тогда

$$\left(\left(\frac{b_0+b_1-j}{2(b_0b_1+1)}-|\ldots|\right)\right)=\left(\left(\frac{b_0+b_1-j-k+2p+1}{2(b_0b_1+1)}\right)\right).$$

Если $b_0+b_1-j-k+2p+1\geqslant 0$, то сумма в правой части равенства (П9) равна $-\frac{q_m}{p_0}-1$. При фиксированном k неравенство $b_0+b_1-j-k+2p+1\geqslant 0$ выполняется всегда при $p=\left[\frac{k}{2}\right]$. Следовательно, при выполнении сравнения (I.20) имеем

$$\sum_{t=1}^{m-1}\left(\left(\frac{n-m}{2p_0}+\frac{t}{p_0}+\frac{1-v_nv_m}{4}\right)\right)=-\frac{q_n}{2p_0}(m-1)-\frac{1}{2}\ \#\left\{p\left|\frac{j+k-b_0-b_1-1}{2}\leqslant p\leqslant\frac{k}{2}\right.\right\}<-\frac{q_m}{2p}(m-1).$$

Этим доказан пункт 3 теоремы 3.

Литература

1. F a d d e e v L.D. Integrable Models in 1+1 dimensional Quantum Field Theory. - In: Les Houches Lectures 1982, Elsevier Sci.Publ. (1984).
2. С к л я н и н Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга-Бакстера.П. Представления квантовой алгебры. - Функц.анализ, 1983, т.17, вып.4, с.34-48.

3. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu., S k l y a n i n E.K. Yang-Baxter equation and represen - tation theory: I. - Lett.Math.Phys., 1981, v.5, N 5, p.393-403.
4. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Quantum Spectral Transform Method. Recent Developments. - Lect.Notes in Physics, 1982, v.151, p.61-119.
5. T a k h t a j a n L.A. The picture of Low-lying excitations in isotropic Heisenberg chain of arbitrary spin. - Phys. Lett.A, 1982, v.87A, N 9, p.479-482.
6. B a b u j i a n H.M. Exact solution of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spin S . - Phys. Lett.A, v.90A, N 9,p.479-482.
7. К и р и л л о в А.Н., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Точное решение XXZ модели Гайзенберга спина S . - Зап.научн.семин. ЛОМИ, т.I45, с.I09-I33.
8. T a k a h a s h i M., S u z u k i M. One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Model at Finite Temperatures. - Progress of Theoretical Physics 1972, v.48, N 6B, p.2187-2209.
9. К о р е п и н В.Е. Непосредственное вычисление - матрицы в массивной модели Тирринга. - ТМФ, I979, т.4I, № 2, с.I69-I89.
10. H i d a K. Rigorous derivation of the distribution of the eigenstates of quantum Heisenberg-Ising chain with XY-like anisotropy, Sapporo University preprint, 1984, Japan.
11. T s v e l i k A.M., W i e g m a n n P.B. Exact results in the theory of magnetic alloys. - Adv.in Physics, 1983, v. 32, N 4, p.453-713.
12. G a u d i n M. La fonction d'onde de Bethe pour les modeles exacts de la mècanique statistique. Collection du "Commissariat a l energie atomiqu" Sèrie scientifique, 1983, prix public TTC an 15.02.83.
I3. Э н д р ю с Г. Теория разбиений. - Москва, "Наука", I982.
I4. Р и д М., С а й м о н Б. Методы математической физики. т.2. - Москва, "Мир", I978.