Ю. Г. Никоноров, Инвариантные метрики Эйнштейна на пространствах Леджера–Обаты,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 3, 169–185

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 3

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ ЭЙНШТЕЙНА НА ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕДЖЕРА–ОБАТЫ

© Ю. Г. Никоноров

Пусть F – простая компактная группа Ли, $G_n = F\times F\times\cdots\times F$ (n множителей), и $H_n = \mathrm{diag}(F) \subset G_n$. Доказывается, что если $n = 3$ ($n \geqslant 4$), то, с точностью до изометрии и гомотетии, пространство Леджера-Обаты G_n/H_n допускает в точности (по крайней мере) две G-инвариантные метрики Эйнштейна.

Введение

Рассмотрим простую компактную группу Ли F, пусть $G = F\times F\times\cdots\times F$ (n множителей, $n \geq 2$) и пусть $H = \mathrm{diag}(F) \subset G$. В настоящей работе изучаются G-инвариантные метрики Эйнштейна на пространстве Леджера–Обаты G/H. Эти пространства были исследованы в [3]. Снабженные стандартной римановой метрикой, они являются естественным обобщением симметрических пространств.

Напомним, что риманова метрика g называется *эйнштейновой*, если кривизна Риччи $\mathrm{Ric}(g)$ метрики g удовлетворяет условию

$$\mathrm{Ric}(g) = C \cdot g$$

для некоторой константы C. Хорошо известно, что стандартная риманова метрика на пространствах Леджера–Обаты всегда эйнштейнова [5, предложение 5.5].

При $n = 2$ мы по существу получаем неприводимые симметрические пространства, т.е. каждая G-инвариантная риманова метрика на G/H подобна стандартной римановой метрике. Если $n \geqslant 3$, то это уже не так. Основными результатами нашей работы являются две следующие теоремы.

Ключевые слова: риманово многообразие, многообразие Эйнштейна, однородное пространство, скалярная кривизна, алгебра Ли, форма Киллинга.

Работа поддержана грантами РФФИ 99-01-00543, 00-15-96165 и 01-01-06224 и грантом Министерства образования РФ 97-0-1.3-63.

Теорема 1. *С точностью до изометрии и гомотетии пространство Леджера–Обаты $G/H = F \times F \times F/\operatorname{diag}(F)$ допускает ровно две G-инвариантные метрики Эйнштейна.*

Теорема 2. *Пусть $G/H = F \times F \times \dots \times F/\operatorname{diag}(F)$ (n множителей). Если $n \geqslant 4$, то, с точностью до изометрии и гомотетии, пространство Леджера–Обаты G/H допускает по крайней мере две G-инвариантные метрики Эйнштейна.*

§1. Предварительные сведения

Обозначения. Обозначим через $[\cdot,\cdot]$ скобку Ли. Пусть $\mathfrak{f}$ — алгебра Ли группы Ли F, положим $s = \dim \mathfrak{f}$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \dots \oplus \mathfrak{f}$ — алгебра Ли группы G и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли, соответствующая H.

Обозначим через $B_{\mathfrak{g}}(\cdot,\cdot)$ форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим $\langle\cdot,\cdot\rangle := -B_{\mathfrak{g}}(\cdot,\cdot)$, и пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp}$ — ортогональное ($\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантное) дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

При доказательстве теорем 1 и 2 будем применять язык алгебр Ли, используя тот факт, что вся информация о кривизне G-инвариантных метрик на G/H может быть получена в терминах соответствующих алгебр Ли [1]. Более точно, каждое $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{p}$ однозначно определяет G-инвариантную риманову метрику $\widetilde{g}$ на G/H (т.е. G действует на $(G/H,\widetilde{g})$ изометриями) и обратно [1, 7.24].

Для удобства выберем ограничение $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$ в качестве выделенного скалярного произведения на $\mathfrak{p}$. (Соответствующая риманова метрика на G/H является стандартной.)

Обозначим через $\mathcal{M}_n$ множество $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантных скалярных произведений на $\mathfrak{p}$, имеющих объем 1 относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$. Нетрудно снабдить $\mathcal{M}_n$ структурой гладкого многообразия. (Здесь и далее под *гладкостью* подразумевается C^{∞}-гладкость.)

Определим *функционал скалярной кривизны*

$$S\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$$

следующим образом. Для $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$ положим $S\big((\cdot,\cdot)\big)$ равным скалярной кривизне S G-инвариантной римановой метрики на G/H, определяемой скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Хорошо известно, что G-инвариантные метрики Эйнштейна G/H в точности соответствуют критическим точкам функционала скалярной кривизны S [1, 2, 4]. Соответствующие скалярные произведения также будем называть *эйнштейновыми*.

Подмодули модуля $\mathfrak{p}$. Относительно присоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{h}$ модуль $\mathfrak{p}$ разлагается в сумму $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_m$ неприводимых подмодулей, попарно ортогональных относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$. Если некоторые подмодули изоморфны друг другу, то соответствующее разложение неединственно [4]. В случае пространств Леджера–Обаты *все* подмодули попарно изоморфны, чем и осложняется описание G-инвариантных метрик на этих пространствах.

Поскольку модуль $\mathfrak{p}$ содержит $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантные неприводимые подмодули вида

$$\{(0,0,\ldots,0,\mathbf{x},0,\ldots,0,-\mathbf{x},0,\ldots 0)\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}},$$

из леммы Шура следует, что каждый $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантный неприводимый подмодуль $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}$ имеет размерность s.

Мы опишем структуру $\widetilde{\mathfrak{p}}$ в следующей лемме.

Лемма 1.1. *Существует вектор* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\widetilde{\mathfrak{p}} = \{(\alpha_1\mathbf{x}, \alpha_2\mathbf{x}, \ldots, \alpha_n\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0, \quad \|\alpha\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим проекцию $P_i \colon \widetilde{\mathfrak{p}} \to \mathfrak{f}$ на i-е слагаемое $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{f}$. (Эта проекция ортогональна относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$.)

Поскольку $\dim\widetilde{\mathfrak{p}} = s = \dim\mathfrak{f}$, то одно из отображений P_i взаимнооднозначно. Действительно, обозначим через A_i образ отображения P_i. Понятно, что $A_i \subset \mathfrak{f}$. Из $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантности модуля $\widetilde{\mathfrak{p}}$ следует, что $[A_i, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$. Следовательно, A_i — идеал в простой алгебре Ли $\mathfrak{f}$, т.е. либо $A_i = 0$, либо $A_i = \mathfrak{f}$. Если для всех индексов выполняется равенство $A_i = 0$, то модуль $\widetilde{\mathfrak{p}}$ тривиален, что невозможно. Следовательно, для некоторого индекса $A_i = \mathfrak{f}$, и из совпадения размерностей $\mathfrak{f}$ и $\widetilde{\mathfrak{p}}$ получаем, что отображение P_i взаимнооднозначно.

Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$. Определим теперь отображения

$$Q_j = P_j \circ P_1^{-1} \colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Утверждение. *Для каждого* $j = 2, 3, \ldots, n$ *оператор* Q_j *коммутирует с операторами* $\mathrm{ad}_{\mathbf{y}} \colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{f}$ $(\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{y}, \mathbf{x}])$ *присоединенного действия.*

Доказательство. Очевидно, что $\widetilde{\mathfrak{p}} = \{(\mathbf{x}, Q_2(\mathbf{x}), Q_3(\mathbf{x}), \ldots, Q_n(\mathbf{x}))\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$.

Поскольку $\widetilde{\mathfrak{p}}$ является $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантным и $(\mathbf{y},\mathbf{y},\dots,\mathbf{y}) \in \mathfrak{h}$, получаем

$$[(\mathbf{y},\mathbf{y},\dots,\mathbf{y}),(\mathbf{x},Q_2(\mathbf{x}),Q_3(\mathbf{x}),\dots,Q_n(\mathbf{x}))] \in \widetilde{\mathfrak{p}},$$

т.е. $[\mathbf{y},Q_j(\mathbf{x})] = Q_j([\mathbf{y},\mathbf{x}])$ при $2 \leq j \leq n$, что и требовалось.

Для простой алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{f}}$ нетрудно показать, что оператор $Q\colon \tilde{\mathfrak{f}} \to \tilde{\mathfrak{f}}$, коммутирующий со всеми операторами присоединенного действия, пропорционален тождественному [2]. Следовательно, для некоторых констант c_i $(c_1 = 1)$ имеем $\widetilde{\mathfrak{p}} = \{(c_1\mathbf{x},c_2\mathbf{x},\dots,c_n\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$.

Поскольку $\widetilde{\mathfrak{p}}$ ортогонален к $\mathfrak{h} = \{(\mathbf{x},\dots,\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 0$. Таким образом, в качестве вектора α можно взять вектор с координатами

$$\alpha = \frac{(c_1,c_2,\dots,c_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}. \quad \bullet$$

Замечание. Здесь использован тот очевидный факт, что два модуля

$$\mathfrak{p}_1 = \{(\alpha_1\mathbf{x},\alpha_2\mathbf{x},\dots,\alpha_n\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{p}_2 = \{(\beta_1\mathbf{x},\beta_2\mathbf{x},\dots,\beta_n\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$$

ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n = 0.$$

Скалярные произведения на $\mathfrak{p}$. Пусть $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Рассмотрим одновременную диагонализацию $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$.

Лемма 1.2. *Для каждого $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$ существуют попарно ортогональные относительно $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантные неприводимые подмодули $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_{n-1} \subset \mathfrak{p}$ и положительные числа $x_1, \dots, x_{n-1}$ такие, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{p}_{n-1}$ и*

$$(\cdot,\cdot) = x_1 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1} \oplus x_2 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2} \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_{n-1}}. \qquad (*)$$

Кроме того, $x_1x_2\dots x_{n-1} = 1$ и $\mathfrak{p}_i = \{(\alpha_1^i\mathbf{x},\alpha_2^i\mathbf{x},\dots,\alpha_n^i\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$, где

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i\alpha_k^j = 0, \quad i \neq j,$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i = 0.$$

Также удобно предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^i)^2 = 1.$$

Одновременная диагонализация $(*)$ не всегда однозначно определена, поскольку в случае совпадения некоторых x_i существует свобода в выборе неприводимых подмодулей $\mathfrak{p}_i$.

§2. Доказательство теоремы 1

Пусть $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_3$. Рассмотрим одновременную диагонализацию $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{p}$. По лемме 1.2 существуют ортогональные $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантные неприводимые подмодули $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$ и положительные числа u и v такие, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ и

$$(\cdot,\cdot) = u \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1} \oplus v \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2}.$$

По условию $u, v > 0$, $uv = 1$ и

$$\mathfrak{p}_1 = \{(\alpha_1\mathbf{x}, \alpha_2\mathbf{x}, \alpha_3\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}, \quad \mathfrak{p}_2 = \{(\beta_1\mathbf{x}, \beta_2\mathbf{x}, \beta_3\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}},$$

где

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \quad ||\alpha|| = ||\beta|| = 1. \quad \bullet$$

Зафиксируем в алгебре Ли $\mathfrak{f}$ базис $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1}^{s}$, ортонормированный относительно $-B_{\mathfrak{f}}$. Тогда векторы

$$\{X_i = (\alpha_1\mathrm{e}_i, \alpha_2\mathrm{e}_i, \alpha_3\mathrm{e}_i)\}, \quad \{Y_i = (\beta_1\mathrm{e}_i, \beta_2\mathrm{e}_i, \beta_3\mathrm{e}_i)\}, \quad \{Z_i = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_i)\}$$

образуют ортонормированные базисы относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{h}$ соответственно.

Рассмотрим величины

$$\sum_{i,j,k} B_{\mathfrak{g}}([X_i, X_j], X_k)^2 = s \cdot \overline{A},$$
$$\sum_{i,j,k} B_{\mathfrak{g}}([X_i, X_j], Y_k)^2 = s \cdot \overline{B},$$
$$\sum_{i,j,k} B_{\mathfrak{g}}([Y_i, Y_j], X_k)^2 = s \cdot \overline{C},$$
$$\sum_{i,j,k} B_{\mathfrak{g}}([Y_i, Y_j], Y_k)^2 = s \cdot \overline{D},$$

где

$$\overline{A} := (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3)^2, \qquad \overline{B} := (\alpha_1^2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_2 + \alpha_3^2\beta_3)^2,$$
$$\overline{C} := (\alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_2^2 + \alpha_3\beta_3^2)^2, \quad \overline{D} := (\beta_1^3 + \beta_2^3 + \beta_3^3)^2.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{i,j} B_{\mathfrak{g}}([Z_i, X_j], [Z_i, X_j]) = c_1 = \frac{s}{3},$$
$$\sum_{i,j} B_{\mathfrak{g}}([C_i, Y_j], [C_i, Y_j]) = c_2 = \frac{s}{3}.$$

Используя определение формы Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$, получаем соотношения

$$s = \sum_i B_{\mathfrak{g}}(X_i, X_i) = s(\overline{A} + 2\overline{B} + \overline{C}) + 2c_1,$$
$$s = \sum_i B_{\mathfrak{g}}(Y_i, Y_i) = s(\overline{D} + 2\overline{C} + \overline{B}) + 2c_2.$$

Таким образом,

$$\overline{A} + 2\overline{B} + \overline{C} = \overline{D} + 2\overline{C} + \overline{B} = \frac{1}{3}.$$

Применяя формулу 7.39 из [1], получаем выражение для функционала скалярной кривизны S: для $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_3$ имеет место равенство

$$S((\cdot,\cdot)) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{u} + \frac{s}{v}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{s\overline{A}}{u} + \frac{s\overline{D}}{v} + s\overline{B}\left(\frac{2}{v} + \frac{v}{u^2}\right) + s\overline{C}\left(\frac{2}{u} + \frac{u}{v^2}\right)\right)$$
$$= \frac{s}{12}\left(\frac{5 + 6\overline{B} - 3\overline{C}}{u} + \frac{5 + 6\overline{C} - 3\overline{B}}{v} - 3\overline{B}\frac{v}{u^2} - 3\overline{C}\frac{u}{v^2}\right).$$

Параметризуем пары ортогональных векторов

$$(\alpha, \beta) \in L = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

следующим образом:

$$\alpha = \cos\varphi\big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\big) + \sin\varphi\big(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\big),$$
$$\beta = -\sin\varphi\big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0\big) + \cos\varphi\big(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\big).$$

Прямые вычисления показывают, что $\overline{B} = \frac{4a^3-3a+1}{12}$ и $\overline{C} = \frac{-4a^3+3a+1}{12}$, где $a = \cos 2\varphi$.

Поскольку инвариантные эйнштейновы скалярные произведения на $\mathfrak{p}$ являются критическими точками функционала скалярной кривизны $S\colon \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$, то получаем следующее уравнение:

$$S'_\varphi = -\frac{s}{4}(u-v)^2 \left(\frac{\overline{B}'_\varphi}{u^2 v} + \frac{\overline{C}'_\varphi}{u v^2}\right) = 0.$$

Так как

$$\overline{B}'_\varphi + \overline{C}'_\varphi = 0,$$

необходимо, чтобы $u = v$ или $\overline{B}'_\varphi = 0$. Если $u = v = 1$, то получаем $(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$, что соответствует стандартной римановой метрике на G/H.

Теперь рассмотрим случай $\overline{B}'_\varphi = 0$. Нетрудно показать, что последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi = \pi n/6$ при $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $(\overline{B}, \overline{C}) = (1/6, 0)$ или $(\overline{B}, \overline{C}) = (0, 1/6)$.

Остановимся лишь на первом случае (поскольку во втором случае получаются лишь метрики, изометричные метрикам, соответствующим первому случаю). Функционал скалярной кривизны принимает вид

$$S = \frac{s}{12}\left(\frac{6}{u} + \frac{9}{2v} - \frac{v}{2u^2}\right).$$

Так как $v = u^{-1}$, то

$$24S = s(12u^{-1} + 9u - u^{-3})$$

и

$$24S' = s(-12u^{-2} + 9 + 3u^{-4}) = 0.$$

Таким образом, $u = 1$ или $u = 1/\sqrt{3}$. В первом случае опять приходим к стандартной римановой метрике, в то время как во втором случае получаем новую G-инвариантную метрику Эйнштейна со скалярной кривизной $S = s\sqrt{3}/2$. Теорема 1 доказана. •

§3. Две леммы

Пусть $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Одновременно диагонализуем $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{p}$. Используя лемму 1.2, получаем, что существуют положительные числа $x_1,\dots,x_{n-1}$, связанные соотношением $x_1x_2\dots x_{n-1} = 1$ (условие сохранения объема) и такие, что

$$(\cdot,\cdot) = x_1 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1} \oplus x_2 \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2} \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_{n-1}}, \qquad (*)$$

где $\mathfrak{p}_i = \{(\alpha_1^i \mathbf{x}, \alpha_2^i \mathbf{x}, \dots, \alpha_n^i \mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$ суть $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантные неприводимые подмодули,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i \alpha_k^j = 0 \quad \text{для } i \neq j,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^i)^2 = 1.$$

Напомним, что одновременная диагонализация $(*)$ не всегда определена однозначно, поскольку в случае совпадения некоторых из x_i существует свобода в выборе неприводимых подмодулей $\mathfrak{p}_i$.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость L, ортогональную вектору $(1,1,\dots,1)$. Очевидно, L изометрично евклидовому пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.

Далее рассмотрим многообразие Штифеля $\Omega = V(n-1,n-1)$ ортонормированных $(n-1)$-базисов в L. Точки Ω являются ортонормированными базисами вида

$$(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}),$$

где $\alpha^i \in \mathbb{R}^n$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i = 0.$$

(Здесь используется изометрия между L и $\mathbb{R}^{n-1}$.) Каждый такой базис соответствует „диагональному“ семейству скалярных произведений из $\mathcal{M}_n$ вида $(*)$, и мы получаем естественное гладкое отображение

$$F : \Omega \times \Lambda \to \mathcal{M}_n, \qquad (**)$$

где

$$\Lambda = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 1, \ x_i > 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

(таким образом, Λ — это гиперповерхность, диффеоморфная $\mathbb{R}^{n-2}$), и для каждого $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$ прообраз $F^{-1}((\cdot,\cdot))$ состоит из всех „диагональных“ разложений $(\cdot,\cdot)$. Отметим, что из компактности Ω следует, что $F^{-1}((\cdot,\cdot))$ компактно в естественной топологии.

Как отмечалось выше, эйнштейновы скалярные произведения являются критическими точками функционала скалярной кривизны

$$S\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}.$$

Для поиска соответствующих критических точек нам будут полезны следующие две леммы.

Обозначения. Для гладкого многообразия N и $x \in N$ обозначим через $T_x(N)$ касательное пространство к N в точке x. Если N_1 и N_2 — гладкие многообразия, а $G\colon N_1 \to N_2$ — гладкое отображение, то обозначим через $DG_x\colon T_x(N_1) \to T_{G(x)}(N_2)$ индуцированное отображение касательных пространств. В частности, если $f\colon N \to \mathbb{R}$ - гладкая функция и $x \in N$, то Df_x обозначает дифференциал f в точке x.

Лемма 3.1. *Отображение $F\colon \Omega \times \Lambda \to \mathcal{M}_n$ имеет следующее свойство: для любого $U \in \mathcal{M}_n$ линейная оболочка образов отображений DF_V, где $V \in F^{-1}(U)$, совпадает с касательным пространством $T_U(\mathcal{M}_n)$.*

Доказательство. При доказательстве будем отождествлять $\mathcal{M}_n$ с множеством положительно определенных матриц U размера $(n-1) \times (n-1)$ с единичным определителем.

Обсудим это более подробно. Поскольку каждое скалярное произведение из $\mathcal{M}_n$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$-инвариантно, то оно однозначно определяется своим ограничением на множество векторов

$$\tilde{L} = \{(\alpha_1 \mathbf{x}, \alpha_2 \mathbf{x}, \dots, \alpha_n \mathbf{x})\},$$

где α_i — вещественные числа с $\sum\limits_i^n \alpha_i = 0$, а $\mathbf{x}$ — некоторый вектор из $\mathfrak{f}$ с $-B_{\mathfrak{f}}(x,x) = 1$. Естественно отождествить $\tilde{L}$ с гиперплоскостью L. Далее, используя изометрию между гиперплоскостью L и $\mathbb{R}^{n-1}$, отождествим $\mathcal{M}_n$ с множеством скалярных произведений на $\mathbb{R}^{n-1}$ объема 1 относительно стандартной евклидовой метрики, которой соответствует стандартное скалярное произведение из $\mathcal{M}_n$. В свою очередь, любое скалярное произведение на $\mathbb{R}^{n-1}$ объема 1 относительно стандартной евклидовой метрики задается некоторой положительно определенной симметричной матрицей с единичным определителем, и наоборот. Отметим, что стандартному скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}}$ соответствует единичная матрица E.

Мы также отождествляем $\Omega\times\Lambda$ с матрицами вида QL, где $Q\in O(n-1)$ (т.е. Q — ортогональная матрица), а L — диагональная матрица с единичным определителем и положительными элементами на диагонали. Строки матрицы $(QL)^{-1}$ образуют ортонормированный базис для некоторого скалярного произведения. (Отметим, что $\mathcal{M}_n$ и $\Omega\times\Lambda$ — гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^{(n-1)^2}$.) По определению F получаем

$$F(QL)=QLL^TQ^T.$$

(Здесь и далее A^T обозначает матрицу, транспонированную к A.)

Для каждой матрицы $U\in\mathcal{M}_n$ ее собственные числа $x_1,\dots,x_{n-1}$, упорядоченные по возрастанию, можно разделить на q групп, каждая из которых состоит из равных чисел. Более точно, существуют неотрицательные целые числа $0=i_0$, i_1, $\dots$, i_q с $i_0+i_1+\dots+i_q=n-1$ и положительные числа $l_1,l_2,\dots,l_q$ такие, что

$$x_j=(l_{k+1})^2,\quad j\in(i_0+\dots+i_k,i_0+\dots+i_k+i_{k+1}].$$

Рассмотрим матрицу $\widetilde{Q}\in O(n-1)$ такую, что ее строки образуют базис в $\mathbb{R}^{n-1}$, в котором матрица U принимает диагональный вид (собственные числа упорядочены по возрастанию). Обозначим через $\widetilde{L}$ блочно-диагональную матрицу с блоками $\widetilde{L}_1$, $\dots$,$\widetilde{L}_q$ размеров $i_1\times i_1,\dots,i_q\times i_q$ соответственно, где k-й блок имеет вид $\widetilde{L}_k=l_kE$.

Очевидно, $\widetilde{Q}\widetilde{L}\in F^{-1}(U)$. Далее, получаем, что

$$F^{-1}(U)=\{Q\widetilde{Q}\widetilde{L}\mid Q\in O(i_1)\times O(i_2)\times\dots\times O(i_q)\}.$$

(В частности, $F^{-1}(U)$ диффеоморфно $O(i_1)\times O(i_2)\times\dots\times O(i_q)$.) Заметим, что U — регулярное значение F тогда и только тогда, когда собственные числа U попарно различны.

Опишем теперь касательное пространство $T_U(\mathcal{M}_n)$. Пусть $U(t)$ — гладкая кривая в $\mathcal{M}_n$ с $U(0)=U$. Тогда $W=U'(0)\in T_U(\mathcal{M}_n)$, и каждый элемент

$\widetilde{W} \in T_U(\mathcal{M}_n)$ представи́м в таком виде. Поскольку $U(t) = U + tW + o(t)$ при $t \to 0$, то W — симметричная матрица. Далее, получаем

$$\begin{aligned}1 &= \det(U(t)) = \det(U + tW) + o(t) = \det(U)\det(E + tU^{-1}W) + o(t)\\ &= 1 + t \cdot \operatorname{trace}(U^{-1}W) + o(t)\end{aligned}$$

при $t \to 0$, и, таким образом, $\operatorname{trace}(U^{-1}W) = 0$. (Здесь и ниже через $\operatorname{trace}(A)$ обозначен след матрицы A.) Таким образом, $T_U(\mathcal{M}_n)$ состоит из симметричных матриц W с условием $\operatorname{trace}(U^{-1}W) = 0$.

Как отмечалось выше, $F^{-1}(U)$ состоит из матриц вида $Q\widetilde{Q}\widetilde{L}$. Без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{Q}$ — единичная матрица. (Достаточно выбрать соответствующий базис, ортонормированный относительно евклидовой метрики.) Отметим, что при этом U принимает диагональный вид. В каждой точке $Q\widetilde{L} \in \Omega \times \Lambda$ рассмотрим два типа однопараметрических вариаций:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= Qe^{t\omega}\widetilde{L},\\ \psi(t) &= Qe^{td}\widetilde{L},\end{aligned}$$

где ω — произвольная кососимметричная матрица, а d — диагональная матрица с условием $\operatorname{trace}(d) = 0$. Очевидно, $\varphi(t), \psi(t) \in \Omega \times \Lambda$. Рассмотрим вариации

$$\begin{aligned}g(t) &= F(\varphi(t)) = Qe^{t\omega}\widetilde{L}\widetilde{L}^T e^{-t\omega}Q^T = Qe^{t\omega}Ue^{-t\omega}Q^T,\\ h(t) &= F(\psi(t)) = Qe^{td}\widetilde{L}\widetilde{L}^T e^{td}Q^T = Qe^{2td}UQ^T.\end{aligned}$$

Матрицы $g'(0) = Q(\omega U - U\omega)Q^T$ и $h'(0) = Q \cdot 2dUQ^T$ принадлежат образу DF_V, где $V = Q\widetilde{L}$.

Обозначим через T_{ij} квадратную матрицу такую, что ее ij-й и ji-й элементы равны 1, а остальные элементы — нулевые. Также рассмотрим квадратную матрицу S_{ij} такую, что ее ij-й элемент равен 1, ji-й элемент равен -1, а все остальные — равны 0.

Для доказательства утверждения леммы 3.1 достаточно доказать следующий факт.

Утверждение. 1) *Каждая симметричная блочно-диагональная матрица W, имеющая блоки размеров $i_1 \times i_1, \ldots, i_q \times i_q$ и удовлетворяющая условию $\operatorname{trace}(U^{-1}W) = 0$, лежит в образе DF_V для некоторого $V \in F^{-1}(U)$.*

2) *Если $x_i \neq x_j$, то матрица вида T_{ij} лежит в образе DF_V нужным образом подобранного $V \in F^{-1}(U)$.*

Доказательство. 1) Существуют матрица $P \in O(i_1)\times\cdots\times O(i_q)$ и диагональная матрица $\widetilde{D}$ такие, что $W = P\widetilde{D}P^{-1} = P\widetilde{D}P^T$. Таким образом, достаточно положить $Q = P$ и $d = \frac{1}{2}\widetilde{D}U^{-1}$. Получаем, что $\mathrm{trace}(d) = 0$, поскольку

$$2 \cdot \mathrm{trace}(d) = \mathrm{trace}(\widetilde{D}U^{-1}) = \mathrm{trace}(U^{-1}\widetilde{D}) = \mathrm{trace}(PU^{-1}\widetilde{D}P^{-1})$$
$$= \mathrm{trace}(PU^{-1}P^{-1}P\widetilde{D}P^{-1}) = \mathrm{trace}(U^{-1}W) = 0.$$

2) Рассмотрим $Q = E$ и $\omega = aS_{ij}$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$Q(\omega U - U\omega)Q^T = \omega U - U\omega = a(x_i - x_j)T_{ij},$$

и достаточно положить $a = (x_i - x_j)^{-1}$. •

Лемма 3.1 доказана. •

Лемма 3.2. *Отображение* $F\colon \Omega \times \Lambda \to \mathcal{M}_n$ *(см. (**)) обладает следующим свойством:* $U \in \mathcal{M}_n$ *является критической точкой гладкой функции* $f\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда каждая точка* $V \in F^{-1}(U)$ *является критической точкой композиции* $f \circ F\colon \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Пусть U — критическая точка f, т.е. $Df_U = 0$. Тогда для любого $V \in F^{-1}(U)$ имеем

$$D(f \circ F)_V = Df_U \circ DF_V = 0,$$

т.е. V — критическая точка для $f \circ F$.

2) Теперь предположим, что U не является критической точкой f, т.е. $Df_U \neq 0$. По лемме 3.1 существует $V \in F^{-1}(U)$ такой, что $Df_U \circ DF_V \neq 0$. Но тогда $D(f \circ F)_V \neq 0$, т.е. V не является критической точкой функции $f \circ F$. Лемма 3.2 доказана. •

§4. Доказательство теоремы 2

Согласно леммам 3.1 и 3.2, достаточно исследовать критические точки функционала скалярной кривизны $S\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ на „диагональных“ семействах скалярных произведений $(\cdot,\cdot) \in \mathcal{M}_n$. Однако для доказательства того, что скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ эйнштейново, необходимо проверить *все* содержащие его „диагональные“ семейства.

Зафиксируем подмодули $\mathfrak{p}_i = \{(\alpha_1^i\mathbf{x}, \alpha_2^i\mathbf{x}, \ldots, \alpha_2^i\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathfrak{f}}$ в разложении (*).

Следуя [4], для $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ определим

$$\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \langle [e^i_\alpha, e^j_\beta], e^k_\gamma \rangle^2,$$

где через e^i_α, e^j_β, e^k_γ обозначены векторы ортонормированных относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базисов в модулях $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_k$ соответственно. Используя то, что формы Киллинга $B_\mathfrak{g}$ и $B_\mathfrak{f}$ бииивариантны, легко получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} &= A_{ijk} \cdot \sum_{\alpha,\beta,\gamma} B_\mathfrak{f}([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma)^2 = A_{ijk} \cdot \sum_{\alpha,\beta} B_\mathfrak{f}([e_\alpha, e_\beta], [e_\alpha, e_\beta])^2 \\ &= -A_{ijk} \cdot \sum_{\alpha,\beta} B_\mathfrak{f}(e_\beta, [e_\alpha [e_\alpha, e_\beta]])^2 = sA_{ijk}, \end{aligned}$$

где

$$A_{ijk} = \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha^i_l \alpha^j_l \alpha^k_l \right)^2.$$

Из бииивариантности формы Киллинга также следует, что символы $\begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix}$ симметричны относительно всех трех индексов. Кроме того, из результатов работы [4] следует равенство

$$\sum_{j,k} \begin{bmatrix} k \\ i\,j \end{bmatrix} = s(1 - 2c_i),$$

где через c_i обозначена константа Казимира присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{h}$ на модуле $\mathfrak{p}_i$. В нашем случае

$$c_i = \sum_j B_\mathfrak{g}(e^i_j, [h_j, [h_j, e^i_j]]) = \frac{B_\mathfrak{f}(e_i, e_i)}{n} = \frac{1}{n},$$

таким образом,

$$\sum_{j,k} A_{ijk} = 1 - \frac{2}{n}.$$

Применяя формулу 7.39 из [1], получаем

$$S(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \frac{s}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} - \frac{s}{4} \sum_{i,j,k} A_{ijk} \frac{x_k}{x_i x_j}.$$

Таким образом, нам предстоит исследовать критические точки функции

$$S_* = \frac{4S}{s} = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} - \sum_{i,j,k} A_{ijk} \frac{x_k}{x_i x_j}$$

при ограничении $x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 1$.

В гиперплоскости $L \subset \mathbb{R}^n$, ортогональной вектору $(1, 1, \dots, 1)$, рассмотрим следующий специальный ортонормированный базис $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}) \in \Omega$:

$$\alpha^k = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}}_{k}, \frac{-k}{\sqrt{k^2+k}}, 0, \dots, 0\Bigg), \quad 1 \le k \le n-1.$$

В этом случае имеем

$$A_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \neq k \neq i \text{ или } i < j = k, \\ (j^2+j)^{-1}, & \text{если } i > j = k, \\ (1-i)^2/(i^2+i), & \text{если } i = j = k. \end{cases}$$

Таким образом,

$$S_* = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k x_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x_k}{k^2+k} \sum_{l<k} \frac{1}{x_l^2} \right).$$

Поскольку $x_{n-1} = (x_1 x_2 \dots x_{n-2})^{-1}$, то мы должны найти критические точки функции

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{k x_k} + \frac{n}{n-1} (x_1 x_2 \dots x_{n-2}) \\ &\quad\quad - \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{x_k}{k^2+k} \sum_{l<k} \frac{1}{x_l^2} \right) - \frac{(x_1 x_2 \dots x_{n-2})^{-1}}{n^2-n} \left(\sum_{l=1}^{n-2} \frac{1}{x_l^2} \right). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} f'_{x_k} = &-\frac{k+1}{k} x_k^{-2} + \frac{n}{n-1} (x_1 x_2 \dots x_{n-2}) x_k^{-1} - \frac{1}{k^2+k} \sum_{l<k} \frac{1}{x_l^2} + \frac{2}{x_k^3} \sum_{l>k} \frac{x_l}{l^2+l} \\ &+ \frac{(x_1 x_2 \dots x_{n-2})^{-1} x_k^{-1}}{n^2-n} \sum_{l=1}^{n-2} \frac{1}{x_l^2} + 2 \frac{(x_1 x_2 \dots x_{n-2})^{-1}}{n^2-n} x_k^{-3}. \end{aligned}$$

Допущение. Сделаем следующее допущение (т.е. перейдем к исследованию подсемейства): $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = t$.

В этом случае для каждого $k = 1, \ldots, n-2$ имеем

$$f'_{x_k} = -\frac{k+1}{k}t^{-2} + \frac{n}{n-1}t^{n-3} - \frac{k-1}{k^2+k}t^{-2} + 2\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n-1}\Big)t^{-2}$$
$$+ \frac{n-2}{n^2-n}t^{-n-1} + \frac{2}{n^2-n}t^{-n-1} = \frac{nt^{n-3}}{n-1} - \Big(1 + \frac{2}{n-1}\Big)t^{-2} + \frac{t^{-n-1}}{n-1},$$

и уравнение $f'_{x_k} = 0$ принимает вид

$$nt^{2n-2} - (n+1)t^{n-1} + 1 = 0,$$

откуда $t = 1$ или $t = n^{-1/(n-1)}$.

В первом случае получаем $(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$; во втором случае скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ гипотетически является новым эйнштейновым скалярным произведением из $\mathcal{M}_n$. Отметим, что в последнем случае справедливо соотношение $x_{n-1} = n^{1-1/(n-1)}$.

Утверждение. *Полученное выше скалярное произведение* $(\cdot,\cdot)$ *эйнштейново.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2, достаточно показать, что $(\cdot,\cdot)$ является критической точкой для ограничения $S\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ на каждое „диагональное“ семейство, содержащее $(\cdot,\cdot)$, а также — что вариация S по многообразию Ω равна нулю.

Рассмотрим в гиперплоскости L произвольный ортонормированный базис $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}) \in \Omega$ с

$$\alpha^{n-1} = \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}}_{n-1}, \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}}\Big),$$

а также порождаемые им модули $\mathfrak{p}_i$. Ясно, что

$$A_{ij(n-1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \neq n-1 \neq i, \\ (n^2-n)^{-1}, & \text{если } i = j < n-1, \\ (n-2)^2/(n^2-n), & \text{если } i = j = n-1. \end{cases}$$

Так как

$$S_* = \frac{4S}{s} = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i} - \sum_{i,j,k} A_{ijk}\frac{x_k}{x_i x_j},$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = n^{-1/(n-1)}$ и $x_{n-1} = n^{1-1/(n-1)}$, то вариация $\delta(S)$ по многообразию Ω равна нулю:

$$\begin{aligned}
\delta(S_*) &= \delta\left(\frac{4S}{s}\right) = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}\cdot 0 - \sum_{i,j,k}\delta(A_{ijk})\frac{x_k}{x_ix_j} \\
&= \delta\Bigg(\sum_{i,j,k<n-1} A_{ijk}\Bigg)\cdot n^{1/(n-1)} + \delta\Bigg(\sum_{i<n-1} A_{ii(n-1)}\Bigg)\left(\frac{2}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_i^2}\right) \\
&\quad + \delta(A_{(n-1)(n-1)(n-1)})\frac{1}{x_{n-1}} = \delta(\mathrm{const}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{j,k<n-1} A_{ijk} = \sum_{j,k} A_{ijk} - 2A_{ii(n-1)} = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2-n} = \frac{n-3}{n-1}.$$

Теперь рассмотрим вариацию относительно переменных x_i при нашем ограничении на объем. Для этой цели введем функцию Лагранжа

$$g(x_1,\ldots,x_{n-1}) = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i} - \sum_{i,j,k} A_{ijk}\frac{x_k}{x_ix_j} - \lambda(x_1x_2\ldots x_{n-1} - 1)$$

и найдем ее частные производные. Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned}
g'_{x_i}\cdot x_i &= -\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{t} + \frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{x_{n-1}}{t^2} - \lambda, \\
g'_{x_{n-1}}\cdot x_{n-1} &= -\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{n-2}{n(n-1)}\cdot\frac{x_{n-1}}{t^2} - \lambda,
\end{aligned}$$

где $t = x_1 = \cdots = x_{n-2}$.

Все частные производные обращаются в нуль при некотором значении λ тогда и только тогда, когда $g'_{x_i}\cdot x_i = g'_{x_{n-1}}\cdot x_{n-1}$ или, что то же самое, $(n-1)g'_{x_i}\cdot x_ix_{n-1} = (n-1)g'_{x_{n-1}}\cdot x_{n-1}^2$, т.е. справедливо равенство

$$\left(\frac{x_{n-1}}{t}\right)^2 - (n+1)\frac{x_{n-1}}{t} + n = 0,$$

откуда $x_{n-1} = t$ или $x_{n-1} = nt$.

Поскольку наше скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет последнему условию, оно действительно является критической точкой S на каждом содержащем его „диагональном“ семействе. •

Теорема 2 доказана. •

Список литературы

[1] Бессе А. Л., *Многообразия Эйнштейна*, Мир, М., 1990.

[2] Никоноров Ю. Г., *Функционал скалярной кривизны и эйнштейновы однородные метрики на группах Ли*, Сиб. мат. ж. **39** (1998), №3, 583–589.

[3] Ledger A. J., Obata M., *Affine and Riemannian s-manifolds*, J. Differential Geom. **2** (1968), 451–459.

[4] Wang M., Ziller W., *Existence and nonexistence of homogeneous Einstein metrics*, Invent. Math. **84** (1986), 177–194.

[5] Wang M., Ziller W., *On normal homogeneous Einstein manifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 563–633.

Рубцовский индустриальный институт
Алтайского государственного технического
университета им. И. И. Ползунова
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6
Россия

E-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru

Поступило 1 декабря 1999 г.