Известия вузов. Математика
2013, № 3, с. 40–46

http://old.kpfu.ru/journals/izv_ vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.Н. МАХРОВА

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПОДКОВЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЕНДРИТОВ

Аннотация. Пусть непрерывное отображение f на дендрите X имеет подкову (A, B), где A, B — непустые непересекающиеся подконтинуумы в X. В работе получены условия на структуру множеств A, B, при выполнении которых некоторая итерация отображения f имеет линейную подкову.

Ключевые слова: дендрит, подкова, линейная подкова.

УДК: 517.9

1. Введение

Пусть X — континуум (компактное связное метрическое пространство), $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что f *имеет подкову, если существуют непересекающиеся подконтинуумы* $A, B \subset X$ *такие, что*

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B. \tag{1}$$

Подкову отображения f будем обозначать через (A, B).

Хорошо известно, что если некоторая итерация отображения f имеет подкову, то топологическая энтропия отображения f положительна (см., например, [1]).

Пусть X — одномерный континуум. Будем говорить, что *отображение* $f : X \to X$ *имеет линейную подкову, если* f *имеет подкову* (A, B)*, где* A*,* B *— дуги, т. е. гомеоморфны замкнутому промежутку на прямой.*

В [2] показано, что для непрерывного отображения f, заданного на графе (одномерном компактном связном многограннике), положительность топологической энтропии f эквивалентна существованию линейной подковы для некоторой итерации f. В [3], [4] построены примеры непрерывных отображений на дендритах с положительной топологической энтропией, у которых есть подкова, но никакая итерация заданного отображения не имеет линейной подковы.

В данной работе изучаются условия на структуру подковы (A, B) у непрерывного отображения $f : X \to X$ на дендрите X, при выполнении которых некоторая итерация отображения f имеет линейную подкову. Кроме этого, выделяется класс дендритов, допускающих существование линейной подковы. Будем говорить, что *дендрит* X *допускает существование линейной подковы, если для любого непрерывного отображения* $f : X \to X$*, имеющего подкову, существует натуральное число* $n \geq 1$ *такое, что* f^n *имеет линейную подкову.*

Поступила 31.01.2012

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Кадры”, № 14.B37.21.0361.

Возникший интерес к изучению динамических систем на дендритах связан, например, с тем, что дендриты появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах (см., например, [5], с. 14). С другой стороны, дендриты являются примерами континуумов Пеано со сложной топологической структурой (см., например, [6], с. 165–187).

2. Предварительные сведения

Начнем с необходимых определений и обозначений.

Определение 1. Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности.

Из определения дендрита следует, что он является одномерным континуумом.

В работе будем использовать определение порядка точки в смысле Менгера–Урысона (см., например, [7], § 51).

Определение 2. Пусть X — дендрит, а n — кардинальное число $\leq c$ или порядковое число ω множества всех неотрицательных целых чисел в их естественном порядке. Будем говорить, что порядок точки $x \in X$ не превосходит n ($\operatorname{ord} x \leq n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $\operatorname{card}(\partial U_\delta(x)) \leq n$, где $\partial U_\delta(x)$ — граница δ-окрестности точки x, $\operatorname{card}(\cdot)$ — мощность множества $(\cdot)$. Равенство $\operatorname{ord} x = n$ означает, что $\operatorname{ord} x \leq n$ и соотношение $\operatorname{ord} x \leq m$ не имеет места ни при каком $m < n$.

Точки, порядок которых больше двух, называются точками ветвления. Точки, порядок которых равен единице, называются концевыми точками. Множество концевых точек дендрита X будем обозначать через $E(X)$.

Отметим некоторые свойства дендритов.

Лемма 1 ([7], § 51)**.** *Пусть X — дендрит. Тогда*

(1) *любые две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки x и y,*

(2) *X имеет не более чем счетное множество точек ветвления,*

(3) *любая точка $x \in X$ имеет порядок $\leq \omega$,*

(4) *всякий подконтинуум дендрита — дендрит.*

Определение 3. Дендрит с конечным множеством точек ветвления конечного порядка называется конечным деревом или просто деревом.

Очевидно, что дуга или дерево являются элементарными примерами дендритов. Поэтому для удобства будем называть континуум деревом, если он не является дугой, дендритом, если он не является деревом.

Сформулируем основные результаты данной работы. Напомним, что производным множеством множества E называется множество всех предельных точек этого множества.

Теорема 1. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B). Тогда если хотя бы одно из множеств A или B имеет не более чем счетную производную множества концевых точек, то существует натуральное число n такое, что f^n имеет линейную подкову.*

Теорема 1 позволяет выделить класс дендритов, допускающих существование линейной подковы.

Следствие 1. Пусть X — дендрит, у которого производная множества концевых точек не более чем счетна. Тогда X допускает существование линейной подковы.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения и обозначения.

Пусть E — множество, лежащее в пространстве со счетной базой. Обозначим через $E^{(1)}$ производную множества E. Если дано $E^{(\alpha)}$, то определяем $E^{(\alpha+1)}$ как производную множества $E^{(\alpha)}$, т. е. $E^{\alpha+1} = (E^{\alpha})^{(1)}$. Если λ — предельное трансфинитное число, то полагаем $E^{(\lambda)} = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} E^{(\alpha)}$. Определенное таким образом для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ замкнутое множество $E^{(\alpha)}$ называется производной порядка α от множества E (где ω_1 — первое несчетное трансфинитное число). Очевидно, для любого порядкового числа α $E^{(\alpha)} \supseteq E^{(\alpha+1)}$. Имеет место

Теорема 2 ([8], с. 162)**.** *Семейство производных множеств множества E счетно, т. е. существует наименьшее порядковое число $\alpha < \omega_1$ такое, что $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \dots$, E^{α} есть совершенное множество (быть может, пустое).*

Отметим, что $E^{(\alpha)}$ может быть пустым лишь в случае не более чем счетного E. В случае же несчетного E множество $E^{(\alpha)}$ есть несчетное совершенное множество.

Лемма 2. *Пусть X — континуум, множество $E \subset X$ таково, что $E^{(1)}$ не более чем счетно. Тогда существует порядковое число $\alpha < \omega_1$ такое, что $E^{(\alpha)} = \varnothing$, а $E^{(\alpha-1)}$ конечно.*

Доказательство. Утверждение леммы справедливо, если $E^{(1)}$ конечно, в этом случае $\alpha = 2$. Поэтому рассмотрим случай, когда $E^{(1)}$ счетно. В силу теоремы 2 существует наименьшее порядковое число $\alpha < \omega_1$ такое, что $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \dots = \varnothing$. В силу теоремы Кантора любая последовательность непустых убывающих замкнутых множеств компактного метрического пространства имеет непустое пересечение. Поэтому α не является предельным порядковым числом. Отсюда следует, что $E^{(\alpha-1)}$ конечно. □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть A — непустое подмножество дендрита X. Обозначим через $[A]$ наименьшее замкнутое связное множество, содержащее A. В силу свойства (4) леммы 1 $[A]$ — подконтинуум в X, причем множество его концевых точек принадлежит замыканию множества A, т. е. $E([A]) \subseteq \overline{A}$.

Символом $[x, y]$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y, содержащую эти точки.

Лемма 3. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B), у которой $m = \operatorname{card} E(A) < \operatorname{card} E(B)$, где m — натуральное число, $m \geq 2$. Тогда отображение f^2 имеет подкову (A, C) такую, что $\operatorname{card} E(C) \leq m$.*

Доказательство. Обозначим через $a_1, \dots, a_m$ точки множества $E(A)$. В силу условия (1) для каждой точки $e_i \in E(A)$ найдется точка $y_i \in f^{-1}(e_i) \cap B$ такая, что $f(e_i) = y_i$, $1 \leq i \leq m$. Положим $C = [y_1, y_2, \dots, y_m]$. Тогда $C \subset B$, $f(C) \supseteq A$ и $\operatorname{card} E(C) \leq m$. В силу (1) $f^2(C) \supset A \cup B \supset A \cup C$. Таким образом, f^2 имеет подкову (A, C), где $\operatorname{card} E(C) \leq m$. □

Отметим, что в условиях леммы 3 подконтинуум B произвольный, он может быть как деревом, так и дендритом.

Лемма 4. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, f имеет подкову (A, B), где A, B — деревья, у которых $\operatorname{card} E(A) = \operatorname{card} E(B) = m$, $m \geq 3$. Тогда при некотором натуральном n отображение f^n имеет подкову (C, D) такую, что $\operatorname{card} E(C), \operatorname{card} E(D) \leq m - 1$.*

Доказательство. Обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_m$ точки множества $E(A)$, через $b_1, b_2, \dots, b_m$ — точки множества $E(B)$. В силу условия (1) для любых точек a_i и b_i, $1 \le i \le m$, найдутся точки $a_i^A \in f^{-1}(a_i) \cap A$, $a_i^B \in f^{-1}(a_i) \cap B$, $b_i^A \in f^{-1}(b_i) \cap A$, $b_i^B \in f^{-1}(b_i) \cap B$. Положим $a^A = \{a_1^A, \dots, a_m^A\}$, $Y_1 = [a^A]$; $a^B = \{a_1^B, \dots, a_m^B\}$, $Y_2 = [a^B]$; $b^A = \{b_1^A, \dots, b_m^A\}$, $Y_3 = [b^A]$; $b^A = \{b_1^B, \dots, b_m^B\}$, $Y_4 = [b^B]$. Отметим, что Y_j — дерево для любого $1 \le j \le 4$, $Y_1, Y_3 \subseteq A$, $Y_2, Y_4 \subseteq B$.

Рассмотрим два случая.

1. Существует натуральное число $1 \le j_0 \le 4$ такое, что $\operatorname{card} E(Y_{j_0}) \le m-1$.

Тогда $f(Y_{j_0}) \supset A$, если $j_0 = 1$ или 3, либо $f(Y_{j_0}) \supset B$, если $j_0 = 2$ или 4. В силу (1) $f^2(Y_{j_0}) \supset A \cup B$. Поэтому f^2 имеет либо подкову (Y_{j_0}, B), либо (Y_{j_0}, A). Положим $C = Y_{j_0}$. Применяя лемму 3, получим, что отображение f^4 имеет подкову (C, D), у которой $\operatorname{card} E(C)$, $\operatorname{card} E(D) \le m-1$. Таким образом, лемма 4 доказана.

2. Для любого числа $1 \le j \le 4$ $\operatorname{card} E(Y_j) = m$.

Тогда любая невырожденная дуга $[a_i, a_k]$ ($[b_i, b_k]$) содержит по две точки из каждого множества a^A и b^A (a^B и b^B), т.е. для произвольных $1 \le i, k \le m$, $i \ne k$, выполнены условия

$$\operatorname{card}([a_i, a_k] \cap \alpha^A) = \operatorname{card}([b_i, b_k] \cap \alpha^B) = 2, \quad \text{где} \quad \alpha \in \{a, b\}. \tag{2}$$

Следовательно, для любых $1 \le i, k \le m$, $i \ne k$,

$$\operatorname{card}(f([a_i, a_k]) \cap E(\beta)) = \operatorname{card}(f([b_i, b_k]) \cap E(\beta)) = 2, \quad \text{где} \quad \beta \in \{A, B\}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем, что для любых $\alpha \in \{a, b\}$, $\beta \in \{A, B\}$, $1 \le i, k \le m$, $i \ne k$, справедливы равенства

$$\operatorname{card}(f([a_i, a_k]) \cap \alpha^\beta) = \operatorname{card}(f([b_i, b_k]) \cap \alpha^\beta) = 2.$$

Значит, для любого множества $\beta \in \{A, B\}$ и произвольных $1 \le i, k \le m$, $i \ne k$,

$$\operatorname{card}(f^2([a_i, a_k]) \cap E(\beta)), \quad \operatorname{card}(f^2([b_i, b_k]) \cap E(\beta)) \ge 2.$$

Отсюда и из (2) получаем, что при любом натуральном $j \ge 2$ и для любого множества $\beta \in \{A, B\}$

$$\operatorname{card}(f^j([a_i, a_k]) \cap E(\beta)), \quad \operatorname{card}(f^j([b_i, b_k]) \cap E(\beta)) \ge 2.$$

Таким образом, учитывая (3), получаем, что для любого множества $\beta \in \{A, B\}$ справедливы неравенства

$$\operatorname{card}(f^j([a_i, a_k]) \cap E(\beta)), \quad \operatorname{card}(f^j([b_i, b_k]) \cap E(\beta)) \ge 2, \quad \text{где} \quad j \ge 1. \tag{4}$$

Положим $C = [a_1, a_2, \dots, a_{m-1}]$. Отметим, что C — дерево, у которого $\operatorname{card} E(C) = m-1$. В силу (4) для любого натурального числа $j \ge 1$

$$\operatorname{card}(f^j(C) \cap (E(A)), \quad \operatorname{card}(f^j(C) \cap E(B)) \ge m-1. \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{card}(f^j(C) \cap (E(A) \cup E(B)) \ge 2m-2.$$

Возможны следующие варианты:

1) существует такое натуральное число $j_1 \ge 2$, что

$$\operatorname{card}(f^{j_1}(C) \cap (E(A) \cup E(B))) \ge 2m-1;$$

2) для любого натурального числа $j \ge 1$

$$\operatorname{card}(f^j(C) \cap (E(A) \cup E(B))) = 2m-2.$$

Пусть выполнено условие 1). Тогда либо $f^{j_1}(C) \supset A$, либо $f^{j_1}(C) \supset B$. Отсюда, используя (1), получаем $f^{2j_1}(C) \supset A \cup B \supset C \cup B$. Таким образом, отображение f^{2j_1} имеет подкову

(C, B), удовлетворяющую условиям леммы 3. Применяя указанную лемму, получим справедливость утверждения настоящей леммы для $n = 4j_1$.

Пусть выполнено условие 2). Тогда в силу (5) для любого натурального числа $j \geq 1$

$$\operatorname{card}(f^j(C) \cap E(A)) = \operatorname{card}(f^j(C) \cap E(B)) = m - 1. \tag{6}$$

Поскольку $\operatorname{card} E(A) = m$, то из (6) следует существование натурального числа $1 \leq n \leq C_m^{m-1} = m$ такого, что $f^n(C) \cap E(A) = C \cap E(A)$. Отсюда получаем $f^n(C) \supset C$. Положим $D = f^n(C) \cap B$. Тогда $f^n(C) \supset C \cup D$. Отметим, что из условия (6) вытекает $\operatorname{card} E(D) = m - 1$.

Покажем, что $f^n(D) \supset C \cup D$. Заметим

$$f^n(D) = f^n(f^n(C) \cap B) \subseteq f^{2n}(C) \cap f^n(B) \subseteq f^{2n}(C).$$

Поэтому

$$f^n(D) \cap E(A) \subseteq f^{2n}(C) \cap E(A),\ f^n(D) \cap E(B) \subseteq f^{2n}(C) \cap E(B). \tag{7}$$

Следовательно,

$$\operatorname{card}(f^n(D) \cap E(A)) \leq \operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(A)),$$
$$\operatorname{card}(f^n(D) \cap E(B)) \leq \operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(B)).$$

В силу (6) для правых частей последних двух неравенств выполняются условия

$$\operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(A)) = \operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(B)) = m - 1.$$

С другой стороны, так как $\operatorname{card} E(D) = m - 1$, то из (4) следует, что для левых частей справедливы неравенства $\operatorname{card}(f^n(D) \cap E(A)), \operatorname{card}(f^n(D) \cap E(B)) \geq m - 1$. Отсюда получаем

$$\operatorname{card}(f^n(D) \cap E(A)) = \operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(A)) = m - 1,$$
$$\operatorname{card}(f^n(D) \cap E(B)) = \operatorname{card}(f^{2n}(C) \cap E(B)) = m - 1.$$

Из последних двух равенств и (7) имеем

$$f^n(D) \cap E(A) = f^{2n}(C) \cap E(A), \quad f^n(D) \cap E(B) = f^{2n}(C) \cap E(B).$$

Так как $f^n(C) \supset C \cup D$, то $f^{2n}(C) \supset C \cup D$. Поэтому

$$f^n(D) \cap E(A) \supset C \cap E(A), \quad f^n(D) \cap E(B) \supset D \cap E(B).$$

Отсюда и из определений множеств C и D получаем $f^n(D) \supset C \cup D$. Таким образом, отображение f^n имеет требуемую подкову (C, D). □

Из лемм 3 и 4 вытекает

Следствие 2. Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B), где A, B — деревья. Тогда существует натуральное число n такое, что отображение f^n имеет линейную подкову.

Лемма 5. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B), где B — дендрит, у которого существует порядковое число $\alpha < \omega_1$ такое, что $E^{(\alpha)}(B)$ конечно. Тогда при некотором натуральном n отображение f^n имеет подкову (A, C) такую, что $E^{(\alpha)}(C) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(B)=k$, где k — натуральное число. В силу (1) $f^{-1}(E(A))\cap B \neq \varnothing$. Положим $D = [f^{-1}(E(A)) \cap B]$. Так как $D \subseteq B$, то $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(D) \leq k$. Если $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(D) = 0$, то отображение f^2 имеет требуемую подкову (A, D) и лемма 5 доказана.

Рассмотрим два случая.

1) $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(D) = k$.

В силу (1) $f^{-1}(E(B))\cap B \neq \varnothing$. Положим $C = [f^{-1}(E(B))\cap B]$. Из определения множеств C и D и непрерывности f следует $f(E(D)) \subset A$, $f(E(C)) \subset B$. Так как A и B — замкнутые множества, f непрерывно, то $f(\overline{E(D)})\subset A$, $f(\overline{E(C)}) \subset B$. Поскольку $E^{(\alpha)}(C) \subset \overline{E(C)}$, а $E^{(\alpha)}(D) \subset \overline{E(D)}$, то $f(E^{(\alpha)}(D)) \subset A$, $f(E^{(\alpha)}(C)) \subset B$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то $E^{(\alpha)}(C) \cap E^{(\alpha)}(D) = \varnothing$. Учитывая условие случая 1), получим, что $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(C) = \varnothing$. Таким образом, отображение f^2 имеет подкову (A, C), где $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(C) = \varnothing$. Лемма 5 доказана.

2) $1 \leq \operatorname{card} E^{(\alpha)}(D) \leq k - 1$.

Тогда отображение f^2 имеет подкову (A, D), где D — дендрит, у которого $E^{(\alpha)}(D)$ конечно. Таким образом, выполнены условия настоящей леммы, причем $\operatorname{card} E^{(\alpha)}(D) < \operatorname{card} E^{(\alpha)}(B)$. Повторяя доказательство леммы 5 не более чем $k - 1$ раз, получим существование натурального числа $2 \leq n \leq 2^k$ такого, что отображение f^n имеет требуемую подкову. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 5*. Тогда при некотором натуральном n отображение f^n имеет подкову (A, C) такую, что $E^{(1)}(C) = \varnothing$.*

Доказательство проведем, используя трансфинитную индукцию.

Проверим истинность утверждения при $\alpha = 1$. Пусть $E^{(1)}(B)$ конечно. Тогда в силу леммы 5 при некотором натуральном n отображение f^n имеет подкову (A, C) такую, что $E^{(1)}(C) = \varnothing$.

Предположим истинность утверждения при любом $2 \leq \beta \leq \alpha$ и докажем при $\alpha + 1$. Пусть f имеет подкову (A, B), где $E^{(\alpha+1)}(B)$ конечно. В силу леммы 5 при некотором натуральном n_1 отображение f^{n_1} имеет подкову (A, C) такую, что $E^{(\alpha+1)}(C) = \varnothing$. Если C — дерево или дуга, то лемма 6 доказана. Поэтому рассмотрим случай, когда C — дендрит. Тогда из условия $E^{(\alpha+1)}(C) = \varnothing$ следует существование порядкового числа $1 \leq \beta \leq \alpha$ такого, что $E^{(\beta)}(C)$ конечно. В силу предположения при некотором натуральном n_2 отображение $f^{n_1 n_2}$ имеет подкову (A, D) такую, что $E^{(1)}(D) = \varnothing$. Таким образом, при $n = n_1 n_2$ отображение f^n имеет подкову (A, D), где $E^{(1)}(D) = \varnothing$. Следовательно, утверждение справедливо для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$. □

Лемма 7. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B). Тогда если $E^{(1)}(B)$ не более чем счетно, то существует натуральное число n такое, что f^n имеет линейную подкову.*

Доказательство. Пусть f имеет подкову (A, B), где A, B — подконтинуумы в X и $0 \leq \operatorname{card} E^{(1)}(B) \leq \aleph_0$, где $\aleph_0$ — мощность множества натуральных чисел. Если хотя бы одно из множеств A или B является дугой, то в силу леммы 3 отображение f^2 имеет линейную подкову. Поэтому рассмотрим случай, когда подконтинуумы A, B не являются дугами. Возможны следующие случаи:

1. B — дерево,
2. B — дендрит.

1. Если A — дерево, то утверждение данной леммы справедливо в силу следствия 2. Если A — дендрит, то применяя лемму 3 и следствие 2, получим справедливость утверждения леммы 7.

2. Так как B — дендрит, у которого $1 \le \operatorname{card} E^{(1)}(B) \le \aleph_0$, то в силу леммы 2 существует порядковое число $\alpha < \omega_1$ такое, что $E^{(\alpha)}(B) = \varnothing$, а $E^{(\alpha-1)}(B)$ конечно. Согласно лемме 6 при некотором натуральном n отображение f^n имеет подкову (A, C) такую, что $E^{(1)}(C) = \varnothing$. Тогда C — дерево или дуга. Если C — дуга, то в силу леммы 3 получаем справедливость настоящей леммы. Если C — дерево, то в силу доказанного случая 1 также получаем справедливость леммы 7. □

Из леммы 7 следует справедливость теоремы 1.

В заключении отметим, что в [3] построен пример непрерывного отображения дендрита, у которого есть подкова (A, B), но нет линейной подковы, причем $\operatorname{card} E(A) = \operatorname{card} E(B) = \operatorname{card} E^{(1)}(A) = \operatorname{card} E^{(1)}(B) = c$. Существование линейной подковы у непрерывных отображений дендритов, когда f имеет подкову (A, B) такую, что $\operatorname{card} E(A) = \operatorname{card} E(B) = \aleph_0$, а $\operatorname{card} E^{(1)}(A) = \operatorname{card} E^{(1)}(B) = c$ остается открытым.

Литература

[1] Block A., Teoh E. *How little is little enough*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (4), 969–978 (2003).

[2] Libre J., Misiurewicz M. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology **32** (3), 649–664 (1993).

[3] Махрова Е.Н. *Гомоклинические точки и топологическая энтропия непрерывного отображения дендрита*, Современная матем. и ее прилож. Тр. междунар. конф. по динамическим системам и дифференц. уравнениям. Суздаль, 79–86 (2008).

[4] Kocan Zd., Korneka-Kurkova V., Malek M. *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*, Ergodic theory & Dynam. Sys. **31** (1), 165–175 (2011).

[5] Peitgen H.O., Richter P.H. *The beauty of fractals* (Springer, Berlin, 1986).

[6] Nadler S.B. *Continuum Theory* (Marcel Dekker, N.Y., 1992).

[7] Куратовский К. *Топология*, Т. 2 (Мир, М., 1969).

[8] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* (Наука, М., 1977).

Е.Н. Махрова

доцент, кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, г. Н. Новгород, 603950, Россия,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

E.N. Makhrova

The existence of a linear horseshoe of continuous maps of dendrites

Abstract. Assume that a continuous map f defined on a dendrite X has a horseshoe (A, B), where A and B are nonempty disjoint subcontinua in X. In this paper we obtain conditions for the structure of sets A and B under which some iteration of f has a linear horseshoe.

Keywords: dendrite, horseshoe, linear horseshoe.

E.N. Makhrova

Associate Professor, Chair of Diferential Equations and Mathematical Analysis,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., N. Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru