Труды по дискретной математике
Том 4, с. 161 – 168
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

О ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ (ПЕРЕСЕЧЕНИИ) СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ

В.Г. МИХАЙЛОВ

Рассматривается задача о числе точек в объединении (пересечении) независимо выбранных случайных подмножеств конечного множества. Получены явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения исследуемой величины.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайно выбранные подмножества множества $\{1, \dots, N\}$, распределенные, вообще говоря, неодинаково. Изучается число точек основного множества $\{1, \dots, N\}$, не вошедших в $X_1 \cup \dots \cup X_n$ (не покрытых множествами $X_1, \dots, X_n$). Эта задача эквивалентна задаче о числе точек в пересечении $M_0 = Y_1 \cap \dots \cap Y_n$ дополнительных множеств $Y_i = \{1, \dots, N\} \setminus X_i$. Получены явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения случайной величины $\mu_0^J = |M_0 \cap J|$ при произвольном множестве $J \subseteq \{1, \dots, N\}$. Изложение ведется на языке теории случайных размещений (см. [1]). В доказательствах использован метод Чена-Стейна в комбинации с методом одного вероятностного пространства (см., например, [2]).

Рассматриваемая задача принадлежит кругу задач о покрытии конечного множества своими случайно выбранными подмножествами — одному из направлений современной вероятностной комбинаторики. В рамках этого направления с помощью вероятностных методов изучается число тех покрытий конечного множества своими подмножествами, которые обладают тем или иным интересующим исследователя свойством (см, книгу [3] и статьи [4, 5]). В нашем случае речь идет о покрытиях, оставляющих непокрытыми заданное число точек множества. В отличие от традиционных подходов мы рассматриваем выбор случайных подмножеств в соответствии с некоторыми произвольными распределениями на множестве всех подмножеств конечного множества, а не только равновероятные распределения на тех или иных классах подмножеств. Цель исследования при таком подходе — найти условия на распределения элементов покрытия, при которых число непокрытых точек имеет в пределе некоторое заданное (в нашем случае — пуассоновское) распределение. Эта постановка удаляет нас от комбинаторных истоков рассматриваемой задачи, но взамен упрощает использование чисто теоретико-вероятностных методов исследования.

Большинство вероятностных постановок задачи о числе точек в объединении (пересечении) случайных конечных множеств принадлежат теории случайных размещений. Поэтому мы сформулируем ее в терминах этой теории. Рассмотрим схему размещения частиц по ячейкам, определяемую следующим образом. Имеются N ячеек, занумерованных числами от 1 до N, в которые независимо бросают n комплектов частиц, причем i-му комплекту, $i = 1, \dots, n$, отвечает свой набор вероятностей $p_{iB}, B \in \mathbf{B}$, размещения частиц в ячейки. Здесь $\mathbf{B}$ — совокупность всех подмножеств $\mathbf{B} \subseteq \{1, \dots, N\}$. При размещении частиц i-го комплекта случайно в соответствии заданными выше вероятностями выбирается некоторое множество X_i и частицы комплекта помещаются во все ячейки этого множества по одной. Частицы различных комплектов размещаются независимо. Разумеется, наборы вероятностей, задающие размещение разных комплектов, могут и совпадать: $p_{1B} = \ldots = p_{nB} = p_B, B \subseteq \{1, \ldots, N\}$. При $p_{iB} = \binom{N}{s_i}^{-1}$, если $|B| = s_i$, и $p_{iB} = 0$ в противном случае, $i = 1, \ldots, n$, получаем равновероятную схему размещения частиц комплектами размеров $s_1, \ldots, s_n$, соответственно. В описанной схеме размещения величина μ_0^J интерпретируется как число пустых ячеек в множестве J.

Рассматриваемая общая схема размещения была введена и впервые изучена в работах автора [6, 7]. Результаты, касающиеся равновероятной схемы размещения частиц комплектами, можно найти в работах [1, 6–10]. В своей исходной теоретико-множественной постановке задача решалась в работах [11] и [12]. В последней из этих работ исследования были инициированы задачей о числе решений одной заведомо совместной системы случайных уравнений (см. [13]). Связь рассматриваемой задачи с теорией систем случайных уравнений описана в [5]. Необходимые ссылки на полученные в перечисленных работах результаты мы дадим по ходу изложения.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $J \subseteq \{1, \ldots, N\}$ — некоторый набор ячеек. Обозначим через μ_r^J число ячеек в J, содержащих после размещения частиц всех n комплектов ровно по r частиц каждая, а через $d(J, \lambda^J)$ обозначим расстояние по вариации между распределением случайной величины μ_0^J и распределением Пуассона с параметром $\lambda^J = \mathbf{E}\,\mu_0^J$. Вероятность a_{ik} попадания частицы i-го комплекта в k-ю ячейку равна

$$a_i(k) = \sum_{B:k\in B} p_{iB}.$$

Аналогично выражается вероятность $a_i(k,l)$ попадания частиц одного комплекта в k-ю и l-ю ячейки:

$$a_i(k,l) = \sum_{B:k,l\in B} p_{iB}.$$

Пусть q_k — вероятность события, состоящего в том, что k-я ячейка осталась пустой, тогда

$$q_k = \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i(k)). \tag{1.1}$$

Пусть b_i^J — вероятность события, состоящего в том, что i-я частица распределилась в ячейку из множества J и оказалась в ней одна, тогда

$$b_i^J = \sum_{k\in J} a_i(k) \prod_{t\neq i}(1 - a_t(k)).$$

Выполняются равенства

$$\sum_{k\in J} q_k = \mathbf{E}\,\mu_0^J, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i^J = \mathbf{E}\,\mu_1^J. \tag{1.2}$$

Введем также обозначение

$$r_k^J = \sum_{l\in J\setminus\{k\}} \Big(\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i(l) + a_i(k,l)) - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i(l))\Big).$$

Теорема 1. *Выполнено неравенство*

$$d(J,\lambda^J) < \min\left\{1, \frac{1}{\mathbf{E}\,\mu_0^J}\right\}\left(\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J + 2\sum_{k\in J} q_k r_k^J\right). \tag{1.3}$$

Полезно привести оценки для разности $\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J$.

Теорема 2. *Пусть при всех значениях параметров $i = 1,\dots,n$, $k,l \in J$, $k \neq l$ выполняется неравенство*

$$a_i(k) + a_i(l) < 1. \tag{1.4}$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J < \sum_{i=1}^n (b_i^J)^2 + \sum_{k\in J}(q_k)^2. \tag{1.5}$$

Этот результат можно несколько уточнить, если заменить условие (1.4) другим, в большинстве случаев более жестким.

Теорема 3. *Пусть при всех значениях параметров $i = 1,\dots,n$, $k,l \in J$, $k \neq l$, выполняется неравенство*

$$a_i(k)a_i(l) \geq a_i(k,l). \tag{1.6}$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J < \sum_{i=1}^n h_i^J + \sum_{k\in J}(q_k)^2, \tag{1.7}$$

где

$$h_t^J = \sum_{\substack{k,s\in J\\ k\neq s}} (a_t(k)a_t(s) - a_t(k,s)) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^n (1-a_i(k))(1-a_t(s)). \tag{1.8}$$

Нетрудно показать, что $h_i^J \leq (b_i^J)^2$. Иногда оценка (1.7) заметно точнее оценки (1.6) (см. замечание в конце статьи).

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи. Первое утверждение рассматривает случай размещения отдельных частиц.

Следствие 1. *Пусть каждый компонент состоит ровно из одной частицы. Тогда*

$$d(J,\lambda^J) \leq \min\{1, \mathbf{E}\,\mu_0^J\}\left(1 - \frac{\mathbf{D}\,\mu_0^J}{\mathbf{E}\,\mu_0^J}\right) < \min\left\{1, \frac{1}{\lambda^J}\right\}\left(\sum_{i=1}^n (b_j^J)^2 + \sum_{k\in J}(q_k)^2\right). \tag{1.9}$$

Эта оценка была получена автором в работе [14].

Другой интересный случай — это схема равновероятных комплектов.

Следствие 2. *Для равновероятной схемы размещения частиц комплектами одинакового размера s выполнено соотношение*

$$\begin{aligned} d(J,\lambda^J) < \min\{1,\lambda^J\}\Bigg\{&\left(\frac{|J|ns}{N^2}+1\right)\left(1-\frac{s}{N}\right)^{n-2} + \\ &+2|J|(|J|-1)\left(1-\frac{s}{N}\right)^{2n}\left(\left(1+\frac{s(s-1)}{(N-1)(N-s)}\right)^n - 1\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\lambda^J = |J|(1 - sN^{-1})^n$.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1. В своих рассуждениях следуем схеме доказательства теоремы 2 работы [14]. Обозначим через I_k индикатор случайного события, состоящего в том, что k-я ячейка осталась пустой. Тогда $\mu_0^J = \sum_{k\in J} I_k$ и

$$\mathbf{E}\, I_k = \mathbf{P}\{I_k = 1\} = q_k = \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i(k)). \tag{2.1}$$

Сначала изучим случай, когда

$$\max_{1\le i\le n, k\in J} a_i(k) < 1. \tag{2.2}$$

Рассмотрим случайные величины $\mu_0^J(k)$, $k \in J$, с распределениями $L(\mu_0^J(k)) = L(\mu_0^J - I_k | I_k = 1)$. Нетрудно понять, что распределение случайной величины $\mu_0^J(k)$ совпадает с распределением случайной величины μ_0^J в обобщенной схеме размещения n комплектов частиц по ячейкам $\{1, \ldots, N\}\backslash\{k\}$ с вероятностями

$$\left\{p_{iB}(k) = \frac{p_{iB}}{1 - a_i(k)}, B \subseteq \{1, \ldots, N\}\backslash\{k\}\right\}. \tag{2.3}$$

Пусть случайные величины $\mu_0^J(k)$ заданы на одном вероятностном пространстве с величиной μ_0^J. Тогда согласно оценке метода Чена-Стейна (см., например, неравенства (2.1.2) в [2])

$$d(J, \lambda^J) \le \min\left\{1, \frac{1}{\lambda^J}\right\} \sum_{k\in J} q_k\, \mathbf{E}\, |\mu_0^J - \mu_0^J(k)|. \tag{2.4}$$

Случайная величина $\mu_0^J(k)$ может быть реализована в нашей схеме размещения одновременно с величиной μ_0^J следующим образом. В процессе размещения частицы каждого комплекта, накрывшего k-ю ячейку, переразмещаются (независимо от всего предшествующего) по остальным ячейкам с зависящими от номера частицы вероятностями (2.3). После завершения размещения частиц всех комплектов наряду с μ_0^J считается число ячеек среди $\{1, \ldots, N\}\backslash\{k\}$, оказавшихся пустыми при осуществлении описанной дополнительной процедуры перераспределения частиц из ячейки k:

$$\mu_0^J(k) = \sum_{l\in J\backslash\{k\}} I_l(k). \tag{2.5}$$

Далее в доказательстве теоремы символы μ_0^J и $\mu_0^J(k)$ используются для обозначения именно так заданных случайных величин. Все построения производятся на этом же вероятностном пространстве.

Пусть φ_l — индикатор того, что l-я ячейка опустела в результате описанного выше перекладывания частиц. Тогда

$$\mu_0^J - \mu_0^J(k) = \sum_{l\in J\backslash\{k\}} (I_l - I_l(k)) = \sum_{l\in J\backslash\{k\}} = (I_l - I_l(k))\,(1-\varphi_l) + \sum_{l\in J\backslash\{k\}} (I_l - I_l(k))\,\varphi_l. \tag{2.6}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.6). В нем ненулевыми могут быть лишь слагаемые, относящиеся к неопустевшим ячейкам. Такие ячейки при перекладывании могут лишь перестать быть пустыми. Значит, в слагаемых первой суммы $I_l \geq I_l(k)$, и

$$\sum_{l \in J \setminus \{k\}} (I_l - I_l(k))\,(1 - \varphi_l) \geq 0. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) вытекают неравенства

$$\left|\mu_0^J - \mu_0^J(k)\right| \leq \sum_{l \in J \setminus \{k\}} (I_l - I_l(k))\,(1 - \varphi_l) + \left|\sum_{l \in J \setminus \{k\}} (I_l - I_l(k))\,\varphi_l\right| \leq$$

$$\leq \mu_0^J - \mu_0^J(k) + 2\left|\sum_{l \in J \setminus \{k\}} (I_l - I_l(k))\,\varphi_l\right|. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\left|\mu_0^J - \mu_0^J(k)\right| \leq \mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{E}\,\mu_0^J(k) + 2\sum_{l \in J \setminus \{k\}} \mathbf{E}\,\varphi_l. \tag{2.9}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (2.2). *Тогда*

$$\sum_{k \in J} q_k \left(\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{E}\,\mu_0^J(k)\right) = \mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J. \tag{2.10}$$

Доказательство. Из приведенных выше определений выводим равенства

$$\sum_{k \in J} q_k\,\mathbf{E}\,\mu_0^J = \left(\mathbf{E}\,\mu_0^J\right)^2, \quad \sum_{k \in J} q_k\,\mathbf{E}\,\mu_0^J(k) = \sum_{k,l \in J, k \neq l} q_k\,\mathbf{E}(I_l | I_k = 1) = \mathbf{E}\,\mu_0^J(\mu_0^J - 1).$$

Преобразуем правую часть (2.10) с помощью этих равенств и получим искомое выражение. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Оценим теперь выражение $\sum_{l \in J \setminus \{k\}} \mathbf{E}\,\varphi_l$. Обозначим через X_i множество ячеек, в которые размещены частицы i-го комплекта. Тогда

$$\{\varphi_l = 1\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (\{\{k,l\} \subseteq X_i\} \cup \{l \notin X_i\}) \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \{l \neq X_i\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\,\varphi_l = \mathbf{P}\{\varphi_l = 1\} \leq \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i(l) + a_i(k,l)) - \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i(l)).$$

Значит,

$$\sum_{l \in J \setminus \{k\}} \mathbf{E}\,\varphi_l \leq r_k^J. \tag{2.11}$$

Из (2.4), (2.9), (2.10) и (2.11) следует (1.3).

Рассмотрим теперь общий случай. Введем обозначение

$$K(J) = \{k \in J : \max_i a_i(k) < 1\}.$$

Для множества $K(J)$ условие (2.2) уже выполнено. По доказанному выше получаем неравенство (1.3) для величины $\mu_0^{K(J)}$. Теперь осталось заметить, что $\mu_0^{K(J)} = \mu_0^J$, $\mathbf{E}\,\mu_0^{K(J)} = \mathbf{E}\,\mu_0^J$ и $\mathbf{D}\,\mu_0^{K(J)} = \mathbf{D}\,\mu_0^J$, а последнее выражение в правой части неравенства (1.3) не уменьшится, если в нем множество $K(J)$ заменить множеством J. Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 2. Отметим сразу, что из условия (1.4) следует неравенство (2.2). Поэтому мы можем пользоваться введенным выше построением на одном вероятностном пространстве и леммой 1. Справедливы соотношения:

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J = \sum_{s\in J}\prod_{i=1}^n (1-a_i(s)),$$

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J(k) = \sum_{s\in J\setminus\{k\}}\prod_{i=1}^n \frac{1-a_i(k)-a_i(s)+a_i(s,k)}{1-a_i(k)} \geq \sum_{s\in J\setminus\{k\}}\prod_{i=1}^n \left(1-\frac{a_i(s)}{1-a_i(k)}\right) =$$
$$= \sum_{s\in J\setminus\{k\}}\prod_{i=1}^n (1-a_i(s))\left(1-\frac{a_i(s)a_i(k)}{(1-a_i(s))(1-a_i(k))}\right). \quad (3.1)$$

Используя эти формулы, получаем равенство

$$\sum_{k\in J} q_k\,\mathbf{E}\,\mu_0^J = \sum_{k\in J} q_k^2 + \sum_{\substack{k,s\in J\\ k\neq s}}\prod_{i=1}^n (1-a_i(k))(1-a_i(s)) \quad (3.2)$$

и оценки

$$\sum_{k\in J} q_k\,\mathbf{E}\,\mu_0^J(k) \geq \sum_{\substack{k,s\in J\\ s\neq k}}\prod_{i=1}^n (1-a_i(k))(1-a_i(s))\left(1-\frac{a_i(s)a_i(k)}{(1-a_i(s))(1-a_i(k))}\right) >$$
$$> \sum_{\substack{k,s\in J\\ s\neq k}}\prod_{i=1}^n (1-a_i(k))(1-a_i(s))\left(1-\sum_{t=1}^n \frac{a_t(s)a_t(k)}{(1-a_t(s))(1-a_t(k))}\right) >$$
$$> \sum_{\substack{k,s\in J\\ s\neq k}}\prod_{i=1}^n (1-a_i(k))(1-a_i(s)) - \sum_{t=1}^n \left(\sum_{k\in J} a_t(k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^n (1-a_i(k))\right)^2. \quad (3.3)$$

Выражение в скобках в вычитаемом в правой части последней цепочки неравенств равно b_t^J (см. формулу (2)). Поэтому, взяв разность оценок (3.2) и (3.3), приходим к неравенству

$$\sum_{k\in J} q_k\left(\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{E}\,\mu_0^J(k)\right) < \sum_{k\in J} q_k^2 + \sum_{t=1}^n (b_t^J)^2. \quad (3.4)$$

Осталось воспользоваться леммой 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим сначала, что выполняется условие (2.2). Пусть $\Delta_i(k,l) = a_i(k)a_i(l) - a_i(k,l)$. По условию (1.6) $\Delta_i(k,l) \geq 0$. Поэтому вместо (3.1) в выкладках (3.3) можно использовать выражение

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J(k) = \sum_{s\in J\setminus\{k\}} \prod_{i=1}^{n}(1-a_i(s))\left(1 - \frac{\Delta_i(s,k)}{(1-a_i(s))(1-a_i(k))}\right),$$

получаемое аналогично (3.1). Тогда вычитаемое в правой части (3.3) примет вид

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{k,s\in J,k\neq s} \Delta_t(k,s) \prod_{i=1,i\neq t}^{n} (1-a_i(k))(1-a_i(s)) = \sum_{t=1}^{n} h_t^J,$$

и вместо (3.4) мы придем к неравенству

$$\sum_{k\in J} q_k \left(\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{E}\,\mu_0^J(k)\right) < \sum_{k\in J} q_k^2 + \sum_{t=1}^{n} h_t^J. \tag{3.5}$$

В силу леммы 1 из (3.5) следует (1.7).

Рассмотрим теперь общий случай. Введем обозначение

$$K(J) = \{k \in J\colon \max_i a_i(k) < 1\}.$$

Для множества $K(J)$ условие (2.2) уже выполнено. По доказанному выше получаем неравенство (1.7) для величины $\mu_0^{K(J)}$. Теперь осталось заметить, что $\mu_0^{K(J)} = \mu_0^J$ (значит, и $\lambda^J = \lambda^{K(J)}$), а выражение в правой части неравенства (1.7) не уменьшится, если в нем множество $K(J)$ заменить множеством J. Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 1. Сначала снова накладывается условие (2.2). При размещении отдельных частиц все $a_i(k,l) = 0$ и, следовательно, все $r_k^J = 0$. Поэтому из теоремы 1 следует левое неравенство в (1.9). Кроме того, в этом случае из (2.2) следует (1.4). Используя теорему 2, получаем правое неравенство в (1.9). Осталось повторить заключительный фрагмент доказательства теоремы 1. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. В этом случае

$$\Delta_i(k,l) = \frac{s(N-s)}{N^2(N-1)} > 0.$$

Поэтому можно воспользоваться теоремой 3 и после элементарных вычислений получить неравенство

$$\mathbf{E}\,\mu_0^J - \mathbf{D}\,\mu_0^J < \min\{1,\lambda^J\}\left(\frac{|J|ns}{N^2}+1\right)\left(1-\frac{s}{N}\right)^{n-2}. \tag{3.6}$$

Кроме того, в этом случае

$$r_k^J = (|J|-1)\left(\left(1-\frac{s}{N}+\frac{s(s-1)}{N(N-1)}\right)^n - \left(1-\frac{s}{N}\right)^n\right).$$

Поэтому

$$\sum_{k\in J} q_k r_k^J = |J|(|J|-1)\left(1-\frac{s}{N}\right)^{2n}\left(\left(1+\frac{s(s-1)}{(N-1)(N-s)}\right)^n - 1\right). \tag{3.7}$$

Подставив (3.6) и (3.7) в (1.3), получим (1.10). Следствие доказано.

Замечание. Если в доказательстве последнего утверждения использовать теорему 2, а не теорему 3, то в правой части оценки (1.10) вместо $|J|nsN^{-2}+1$ будет стоять $|J|ns^2N^{-2}+1$. Это значительно ухудшит оценку при больших s и $|J|nsN^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения — М.: Наука, 1976.
2. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
3. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982.
4. *Сачков В. Н.* Случайные минимальные покрытия множеств. — Дискрет. матем., 1992, Т. 4, Вып. 3, С. 64–74.
5. *Сачков В. Н.* Асимптотическое поведение числа t-минимальных покрытий. — Дискрет. матем., 1993, Т. 5, Вып. 1, С. 36–44.
6. *Михайлов В. Г.* Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, Т. XXII, Вып. 1, С. 155–159.
7. *Михайлов В. Г.* Оценка скорости сходимости к распределению Пуассона при размещении частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, Т. XXII, Вып. 3, С. 566–574.
8. *Михайлов В. Г.* Асимптотическая нормальность числа пустых ячеек при размещении частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, Т. XXV, Вып. 1, С. 83–91.
9. *Михайлов В. Г.* Сходимость к многомерному нормальному закону в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. — Матем. сб., 1980, Т. 111(153), №2, С. 163–186.
10. *Ватутин В. А., Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, Т. XXVII, Вып. 4, С. 684–692.
11. *Зубков А. М.* Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. — Обозрение прикл. промышл. матем., 1994, Т. 1, Вып. 4, С. 638–666.
12. *Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для случайного покрытия конечного множества и для числа решений системы случайных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, Т. 41, Вып. 2, С. 272–283.
13. *Копытцев В. А.* О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, Т. 40, Вып. 2, С. 430–437.
14. *Михайлов В. Г.* О пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в неоднородной схеме размещения. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, Т. 42, Вып. 1, С. 184–189.
15. *Ивченко Г. И.* Сколько потребуется выборок, чтобы увидеть все шары в урне? — Матем. заметки, 1988, Т. 64, Вып. 1, С. 58–63.