

УДК 517.977

ОСЦИЛЛЯЦИИ ОКОЛО СЕПАРАТРИСЫ В УРАВНЕНИИ ДЮФФИНГА¹**О. М. Киселев**

Малое периодическое возмущение приводит к сложной динамике вблизи сепаратрис и седловых точек. Построено двухпараметрическое семейство асимптотических решений, долго находящихся вблизи сепаратрис. Решения из этого семейства негладко зависят от параметра возмущения. Приведен пример, когда значения параметра возмущения для такого семейства решений определяются множеством со структурой типа множества Кантора.

Ключевые слова: теория возмущений, сепаратриса, колебания.

O. M. Kiselev. Oscillations near a separatrix in the Duffing equation.

A small periodic perturbation results in a complicated dynamics near separatrices and saddle points. A two-parameter family of asymptotic solutions staying near separatrices for a long time is constructed. Solutions from this family depend nonsmoothly on the disturbance parameter. An example is given in which the values of the disturbance parameter for this family of solutions are determined by a set with structure of the type of the Cantor set.

Keywords: perturbation separatrix oscillations.

Введение

В работе изучаются свойства асимптотических решений уравнения Дюффинга

$$u'' + 2u - 2u^3 = \varepsilon \cos(\omega t + \Phi_0). \quad (0.1)$$

Здесь t — независимая переменная; ε — малый положительный параметр; ω и Φ_0 — вещественные постоянные.

Цель работы — построить асимптотические решения (0.1), которые длительное время осциллируют вблизи сепаратрис невозмущенного уравнения. Здесь асимптотическим решением называется асимптотический ряд

$$U(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(t), \quad (0.2)$$

который при подстановке в уравнение (0.1) дает невязку $o(\varepsilon^m) \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in (-T_0(\varepsilon), T_1(\varepsilon))$, где $T_i(\varepsilon) \rightarrow \infty, i = 0, 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нуль является предельной точкой множества значений параметра ε . Оказывается, в рассмотренной здесь задаче множество значений параметра ε зависит от параметров решения и устроено сложным образом.

Главный член искомого асимптотического решения — сепаратрисное решение невозмущенного уравнения

$$U_0(t) = \tanh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.3)$$

В ситуации общего положения существует альтернатива при продолжении решения, близкого к сепаратрисе, на большие времена (рис. 1). При $t = O(-\ln(\sqrt{\varepsilon}))$ траектория решения подходит к седловой точке $(1, 0)$. Здесь траектория может повернуть к нижней сепаратрисе и следовать вблизи нее к другой седловой точке $(-1, 0)$. Другая возможность — переход в окрестность сепаратрисы невозмущенного уравнения, проходящей от $(1, 0)$ к $(+\infty, +\infty)$. Такая же альтернатива есть и вблизи седловой точки $(-1, 0)$. Это проиллюстрировано на рис. 1.

¹Работа была поддержана РФФИ (проект 11-01-91330) и DFG TA 289/4-2.

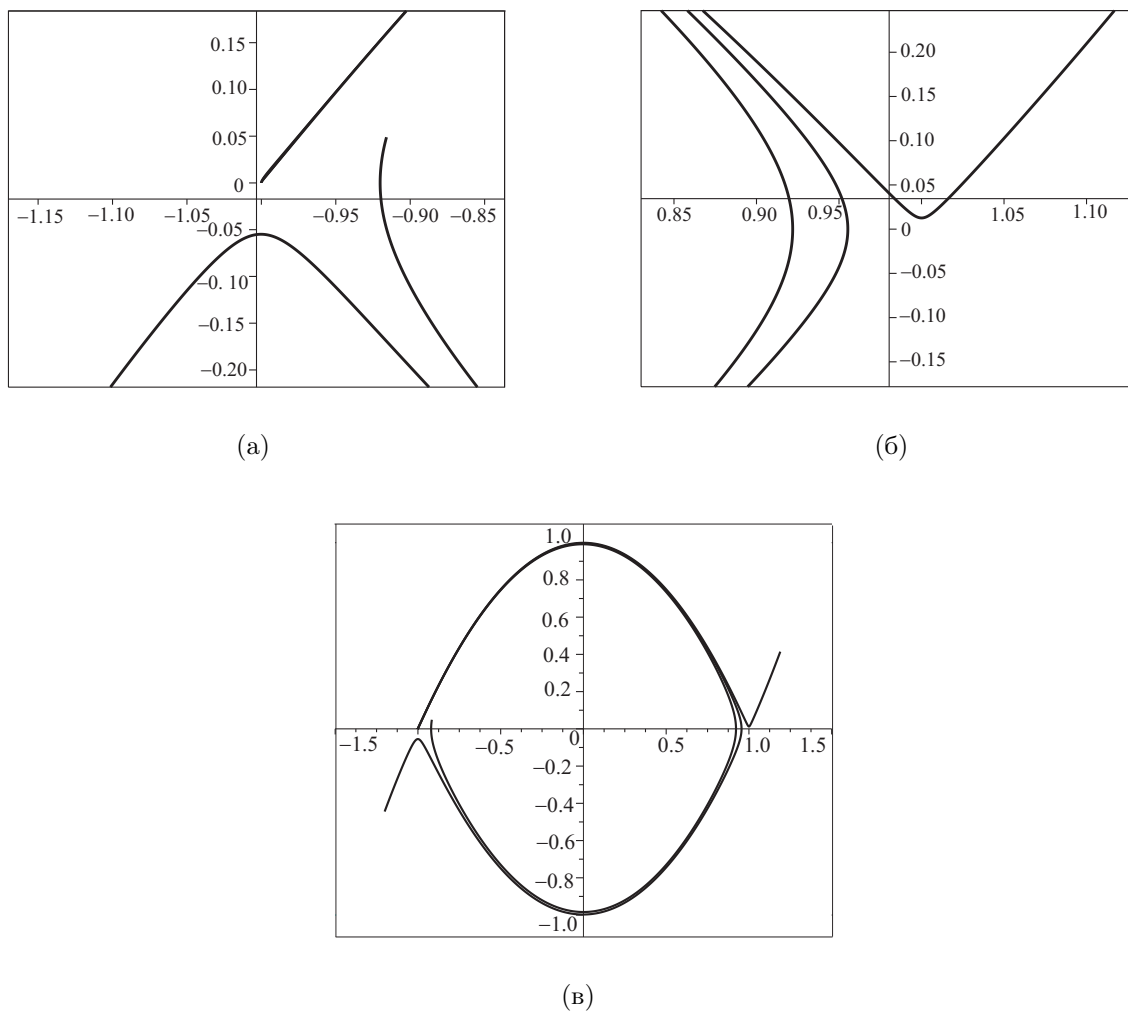


Рис. 1. Решения с начальным условием $(u, u')|_{t=0} = (-1, 0)$ при разных значениях параметра: $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.005$, $\varepsilon = 0.0015$ расходятся вблизи седловых точек на фазовой плоскости (u, u') . На рис. (а) показаны траектории в окрестности точки $(-1, 0)$, на рис. (б) — окрестность точки $(1, 0)$.

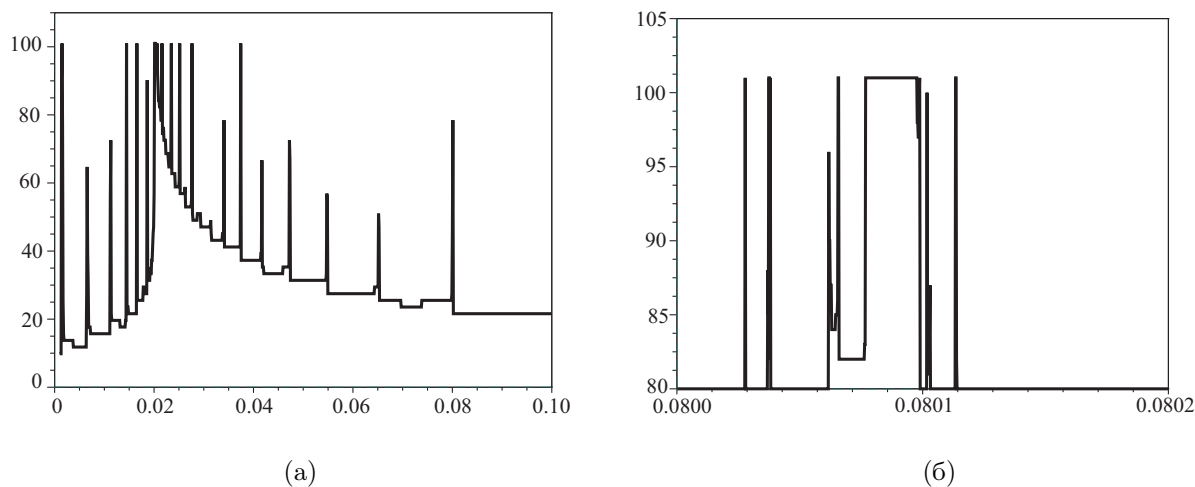


Рис. 2. На рис. (а) показана зависимость «времени жизни» осцилляционных решений от ε для решений задачи Коши $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ (0.1), где $\omega = 1$, $\Phi_0 = \pi$. Эти решения исследовались на интервале $t \in [0, 100]$ для значений параметра возмущения $\varepsilon \in [0.001, 0.1]$ с шагом $\Delta\varepsilon = 0.000099$. На рис. (б) можно видеть растянутую структуру в окрестности пика $\varepsilon = 0.08$ на отрезке $\varepsilon \in [0.08, 0.0802]$ с шагом $\Delta\varepsilon = 0.0000002$. Ступенчатый вид графиков объясняется интерполяцией горизонтальными отрезками участков для значений параметра ε между точками сетки.

Цель работы — исследовать свойства асимптотических решений, траектории которых не уходят на бесконечность, а осциллируют вблизи сепаратрис между седлами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Для этого нужно найти множество параметров решения и множество, в котором может лежать параметр возмущения ε . Эти множества имеют сложную структуру. Например, можно рассмотреть набор значений параметра возмущения ε , для которого при заданных начальных условиях численное решение осциллирует между седловыми точками, по крайней мере, в течение заданного времени. Результат подобных вычислений приведен на рис. 2. При малых временах $0 < t < -\log(\sqrt{\varepsilon})$ численное решение лежит в окрестности сепаратрисы невозмущенного уравнения на всем промежутке рассматриваемых значений ε . Далее большая часть решений уходит из окрестностей ограниченных сепаратрис. Остаются значения параметра ε , для которых решение ограничено. Такие значения видны на рис. 2(а) в виде пиков. В свою очередь, для части значений параметров из этих пиков траектории уходят из окрестностей сепаратрис на больших временах. Однако есть значения ε , для которых решение ограничено на всем приведенном здесь интервале $t \in [0, 100]$. На рис. 2(б) можно видеть тонкую структуру множества в окрестности пика вблизи $\varepsilon = 0.08$.

Исследование возмущений сепаратрисных решений имеет давнюю историю. Похожие задачи, относящиеся к специальному случаю взаимодействия трех тел, рассматривал А. Пуанкаре [1]. В. К. Мельников вычислил зазор при расщеплении сепаратрис возмущенного уравнения [2]. Результаты о хаотическом поведении решения в задаче трех тел (0.1) случае были получены В. М. Алексеевым [3]. Н. Н. Филоненко, Р. З. Сагдеев и Г. М. Заславский [4] ввели понятие сепаратрисного отображения для канонических переменных гамильтоновых систем. Вывод сепаратрисного отображения основан на анализе первого приближения теории возмущений (см., например, обзор [5]).

Задача о возмущении сепаратрисы занимает важное место при исследовании захвата в резонанс. В работе А. И. Нейштадта [6] вычислена мера траекторий, захватываемых в резонанс после перехода через сепаратрису. А. В. Тимофеев исследовал свойства сепаратрисных решений вблизи седловой точки [7]. Изменение переменных типа действие-угол при переходе через сепаратрису исследовалось, например, в работах [8; 9]. Д. Димини и Р. Хаберман исследовали пересечение сепаратрисы в окрестностях бифуркации седло-центр и бифуркации удвоения [10]. Для задачи о пересечении сепаратрисы около точки седло-центр были получены полные асимптотические разложения в [11; 12].

В этой работе построено полное асимптотическое решение для осциллятора Дюффинга в окрестности ограниченных сепаратрис невозмущенного уравнения. Специфика уравнения здесь используется только при выводе явных формул для асимптотик. Сами формальные построения можно обобщить на гамильтоновы системы с качественно таким же фазовым портретом, как у невозмущенного уравнения (0.1).

Приведенный анализ существенно отличается от подходов, обсуждавшихся в работах [5; 8; 9], во-первых, из-за устройства сепаратрис невозмущенного уравнения (0.2). Здесь сепаратрисы имеют усы, уходящие в бесконечность, а не устроены в виде восьмерки, как в [5; 8; 9]. Часть траекторий возмущенного уравнения из окрестностей ограниченных сепаратрис уходит вдоль усов в бесконечность (см. рис. 1). В результате множество параметров для осцилляций вблизи сепаратрис оказывается сложным, типа множества Кантора. Во-вторых, здесь строится асимптотическое решение в виде ряда по ε . В результате получено описание долговременной динамики возмущенной системы вблизи сепаратрис.

Основной технический прием, используемый в работе, лежит в русле ставшего во многом стандартным метода согласований асимптотических разложений, подробно изложенного в книге А. М. Ильина [13]. Этот прием — построение асимптотических разложений двух типов и последовательное согласование их параметров. Один тип разложений пригоден вблизи сепаратрисы, второй — в малой окрестности седловой точки невозмущенного уравнения. При согласовании часть асимптотик оказывается уходящей в окрестность усов сепаратрис, стремящихся к бесконечности. Таким образом выявляются щели в интервалах параметров, пригодных

для построения осциллирующей асимптотики.

В разд. 1 в формальном виде приведены основная задача и полученные результаты. Раздел 2 содержит вывод формул сепаратрисного отображения для описания траекторий. В разд. 3 обсуждаются следствия из полученных формул.

1. Постановка задачи и результаты

1.1. Затравочная асимптотика

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.1)

$$u|_{t=0} = \varepsilon y_0, \quad u'|_{t=0} = 1 + \varepsilon y_1, \quad (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует асимптотическое по ε решение задачи (0.1), (1.1) в виде (0.2) и (0.3) при*

$$\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) \ll t \ll -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon).$$

Высшие поправки в (0.2) при $t \rightarrow -\infty$ можно представить через их асимптотики

$$U_n(t) \sim A_n^- e^{2t} + B_n^- e^{-2t} + W_n^-(t),$$

где $W_n^-(t) = O(\exp(-2nt))$ — ряд из мономов вида $\exp(k_1 t) t^{l_1} \sin(m_1 \omega t)$ и $\exp(k_1 t) t^{l_1} \cos(m_1 \omega t)$, $\{k_i, l_i, m_i\} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, не содержащий слагаемых вида $C \exp(2t)$ и $C \exp(-2t)$, $C = \text{const}$. Такое представление однозначно определяет параметры A_n^- и B_n^- .

Данные задачи Коши (1.1) могут быть восстановлены по параметрам асимптотики

$$A^- = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n A_n^-, \quad B^- = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n^-.$$

В дальнейшем удобно вместо задачи Коши рассматривать асимптотическое решение с заданными параметрами $\{A_n^-\}_1^\infty$ и $\{B_n^-\}_n^\infty$. Асимптотическое представление, определенное в теореме 1, будем называть затравочной асимптотикой.

1.2. Результат

Затравочное асимптотическое решение, определенное в теореме 1, продолжается на большие времена. Продолжение имеет тот же вид асимптотики. Однако, вообще говоря, это возможно не для всех ε . Множество значений параметра ε лежит внутри интервала $(0, \varepsilon_0)$ и имеет сложную структуру. Поправочные члены в окрестности седловой точки невозмущенного уравнения $(u, u') = (1, 0)$ можно представить в виде

$$U_n(t) \sim A_n^+ e^{-2t} + B_n^+ e^{2t} + W_n^+(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $W_n^+(t) = O(\exp(2nt))$ — ряд того же вида, что и $W_n^-(t)$ из теоремы 1.

Из рис. 1 видно, что если в $B_1^+ < 0$, тогда асимптотическое решение (0.2), (0.3) продолжается в окрестность нижней сепаратрисы. В этом случае оно ограничено при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$ и, если $1 \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(t, \varepsilon) = -\tanh(t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t_1), \quad t_1 = t + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{1}{16} B_1^+\right),$$

где

$$u_n(t_1) \sim a_n^\mp e^{\pm 2t_1} + b_n^\mp e^{\mp 2t_1} + w_n^\mp(t_1), \quad t_1 \rightarrow \mp\infty.$$

Асимптотические свойства $w_n^\mp(t_1)$ те же самые, что и $W_n^\pm(t)$.

Продолжение асимптотического решения на бóльшие времена приводит к необходимости последовательности похожих вычислений.

В следующей теореме сформулированы условия для продолжения затравочного асимптотического решения на N осцилляций между седловыми точками невозмущенного уравнения.

Теорема 2. Для $\forall N \in \mathbb{N}$ существуют множество параметров уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$, в котором $\varepsilon = 0$ является предельной точкой для набора значений ε , и набор параметров асимптотического решения A^-, B^- , при котором затравочное асимптотическое решение из теоремы 1 может быть продолжено на интервал $1/2 \ln(\varepsilon) < t \ll -N \ln(\varepsilon)$. На последовательно интервалах $-(k-1)/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -(k+1)/2 \ln(\varepsilon)$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, асимптотическое решение имеет форму

$$u(t, \varepsilon) = (-1)^k \tanh(t_k) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^k(t_k), \quad t_0 = t, \quad t_{k+1} = t_k + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \psi(k),$$

где $u_n^k(t_k)$ при $t_k \rightarrow \pm\infty$ представима в виде

$$u_n^k(t_k) \sim \sum_{\kappa=\mp\infty}^{\pm n} e^{2\kappa t_k} \left(\sum_{l=0}^{2n} t_k^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} ((\tilde{u}_n^k)_{\kappa,l,m}^\pm \cos(m\omega t_k) + (\tilde{v}_n^k)_{\kappa,l,m}^\pm \sin(m\omega t_k)) \right] \right).$$

Условие продолжения $(-1)^k [B_1(k) + \Delta B_1(k)] < 0$ для $\forall k = 1, \dots, 2N-1$, $N \in \mathbb{N}$, определяет параметры решения A^-, B^- и множество параметров уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$.

Параметр $\Delta\sigma_1(k)$ из теоремы 2 выводится из дискретной динамической системы

$$\Delta B_1(k) = \frac{\pi}{16 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \cos(\Phi(k)),$$

где $\Phi(k)$ и $B_1(k)$ определены рекуррентно:

$$\begin{aligned} B_n(0) &= B_n^-, \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad A_n(0) = A_n^-, \\ B_n(k+1) &= -32 \frac{B_{n+1}(k) + \Delta B_{n+1}(k)}{B_1(k) + \Delta B_1(k)}, \\ \Phi(k+1) &= -\frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{(-1)^{k+1}}{16} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right] - \ln(2) \right) + \Phi(k), \\ A_1(k) &= -2, \quad A_n(k+1) = -\frac{1}{32} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) (A_{n-1}(k) + \Delta A_{n-1}(k)), \end{aligned}$$

здесь $\Delta B_n(k) = (\tilde{u}_n^k)_{1,0,0}^+ - (\tilde{u}_n^k)_{-1,0,0}^-$, $\Delta A_n(k) = (\tilde{u}_n^k)_{-1,0,0}^+ - (\tilde{u}_n^k)_{1,0,0}^-$.

В теореме 2 приведен вид асимптотического решения в окрестности верхней сепаратрисы невозмущенного уравнения. Похожие формулы верны и для асимптотического решения в окрестности нижней сепаратрисы невозмущенного уравнения.

В теореме 2 упомянуты параметры уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$ и параметры асимптотического решения A^-, B^- . Среди параметров уравнения особую роль в построениях играет параметр ε . Оказывается, что, манипулируя зависимостью параметров затравочного асимптотического решения и набором значений параметра ε , можно построить формальное разложение с произвольным количеством осцилляций около сепаратрисы.

Следствие 1. Главный член асимптотики для $u(t, \varepsilon)$ зависит от B_n^- , $n = 1, \dots, k$ при $t_k = O(1)$. Это означает, что число осцилляций асимптотического решения существенно зависит от малых поправок в затравочной асимптотике.

Следствие 2. Существует множество параметров $\{A_n^-\}_{n=1}^\infty, \{B_n^-\}_{n=1}^\infty$ такое, что асимптотическое решение осциллирует между седловыми точками невозмущенного уравнения, если $\delta = \omega \ln(\varepsilon)$ лежит в множестве со структурой типа множества Кантора.

2. Асимптотическое решение вблизи сепаратрисы

В этом разделе приведено доказательство теоремы 1. Построено асимптотическое решение вблизи сепаратрисы невозмущенного уравнения $u = \pm \tanh(t)$. Построено асимптотическое решение, пригодное около седловых точек $u = \pm 1$. Проведено согласование построенных асимптотик. В результате получено асимптотическое решение, равномерно пригодное как вблизи сепаратрисы, так и около седловых точек.

2.1. Построение затравочной асимптотики

Здесь построена затравочная асимптотика и тем самым доказана теорема 1. Построим асимптотическое решение в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(t). \quad (2.1)$$

Главный член разложения — сепаратрисное решение $U_0 = \tanh(t)$ невозмущенного уравнения $U_0'' + 2U_0 - 2U_0^3 = 0$. Задачи Коши для старших членов асимптотики

$$U_n'' + 2U_n - 6U_0^2 U_n = f_n, \quad U_n|_{t=0} = y_0, \quad U_n'|_{t=0} = y_1, \quad U_n|_{t=0} = U_n'|_{t=0} = 0, \quad n > 1, \quad (2.2)$$

где $f_1 = \cos(\omega t + \phi_0)$, если $n > 1$, тогда f_n — полином третьего порядка по u_j, u_k и u_l при $j + k + l = n$.

Однородная часть уравнения (2.2) $v'' + 2v - 6U_0^2 v = 0$ имеет два линейно независимых решения

$$v_1 = \frac{1}{\cosh^2(t)}, \quad v_2 = \frac{\sinh(4t)}{32 \cosh^2(t)} + \frac{\sinh(2t)}{4 \cosh^2(t)} + \frac{3t}{8 \cosh^2(t)}.$$

Вронскиан этих решений равен единице.

Решения (2.2) могут быть представлены в виде

$$U_1 = v_1(t) \int_0^t d\tilde{t} f_1(t) v_2(\tilde{t}) - v_2(t) \int_0^t d\tilde{t} f_1(t) v_1(\tilde{t}) + y_0 v_1(t) + y_1 v_2(t),$$

$$U_n = v_1(t) \int_0^t d\tilde{t} f_n(t) v_2(\tilde{t}) - v_2(t) \int_0^t d\tilde{t} f_n(t) v_1(\tilde{t}), \quad n > 1. \quad (2.3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$f_n \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm(n-1)} e^{2kt} \left(\sum_{l=0}^{2(n-1)} t^l \left[\sum_{m=0}^n (F_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t) + H_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t)) \right] \right), \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

тогда

$$U_n(t) \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm n} e^{2kt} \left(\sum_{l=0}^{2n} t^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} (\tilde{U}_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t) + \tilde{V}_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t)) \right] \right), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Для доказательства леммы нужно асимптотику для $v_{1,2}$ и формулу для f_n подставить в (2.3) и проинтегрировать.

Обозначим $A_n^\pm = \tilde{U}_{\mp 1,0,0}^\pm/4$ и $B_n^\pm = 16\tilde{U}_{\pm 1,0,0}^\pm$. Эти параметры определяют решение при больших значениях времени. Изменение параметров за переход по траектории от окрестностей одной седловой точки в окрестность другой седловой точки можно представить как

$$\Delta A_n = A_n^+ - A_n^-, \quad \Delta B_n = B_n^+ - B_n^-.$$

Значение ΔB_1 определяется интегралом Мельникова

$$\begin{aligned} \Delta B_1 &= B_1^+ - B_1^- = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t + \Phi_0)}{\cosh^2(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2(t)} (\cos(\omega t) \cos(\Phi_0) - \sin(\omega t) \sin(\Phi_0)) = \cos(\Phi_0) \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Для ΔA_1 справедлива формула

$$\Delta A_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[-\sin(\Phi_0) \left(\int_{-s}^s v_2(t) \sin(\omega t) dt - \frac{2 \sin(\omega s) - \omega \cos(\omega s)}{8(\omega^2 + 4)} e^{2s} \right) \right].$$

Ряд в (0.2) асимптотический при условии $\varepsilon U_{n+1}/U_n \ll 1$. Это условие дает ограничение для независимой переменной $\varepsilon \exp(2t) \ll 1$ или $|t| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$ и параметров решения A_n^+ и B_n^+ : $A_n^+ \ll \varepsilon$, $B_n^+ \ll \varepsilon \forall n \in N$. Теорема 1 доказана.

2.2. Асимптотическое разложение вблизи седловой точки

Вблизи седловых точек невозмущенного уравнения будем строить асимптотическое разложение в виде

$$u(t, \varepsilon) = \pm 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n^\pm(\tau), \quad \tau = t + \tau_0^\pm. \quad (2.4)$$

Коэффициенты разложения являются решениями уравнения $u_n^{\pm''} - 4u_n^\pm = f_n^\pm$, где $f_1^\pm \equiv 0$, $f_2^\pm = \cos(\omega\tau - \omega\tau_0 + \phi_0) \pm 6(u_1^\pm)^2$ и f_n^\pm — полином 3-го порядка, который определяется коэффициентами асимптотики с индексами j, k, l такими, что $j + k + l = n$ для $n \geq 3$. В общем случае f_n^\pm — конечная сумма по степеням e^τ , синусов, косинусов и независимой переменной τ . Общая формула для n -й поправки:

$$u_n^\pm = \alpha_n^\pm \exp(-2\tau) + \beta_n^\pm \exp(2\tau) + w_n^\pm(\tau). \quad (2.5)$$

Здесь $w_n^\pm(\tau)$ — квазимногочлен, который не содержит слагаемых $C_1 e^{2\tau}$ и $C_2 e^{-2\tau}$ для $\forall C_1, C_2 = \text{const}$.

Сформулируем первую и вторую поправки:

$$\begin{aligned} u_1^\pm &= \alpha_1^\pm \exp(-2\tau) + \beta_1^\pm \exp(2\tau); \\ u_2^\pm &= \alpha_2^\pm \exp(-2\tau) + \beta_2^\pm \exp(2\tau) + \frac{(\alpha_1^\pm)^2}{12} \exp(-4\tau) + \frac{(\beta_1^\pm)^2}{12} \exp(4\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_1^\pm \beta_1^\pm - \frac{1}{4 + \omega^2} \cos(\omega\tau + \phi_0 - \omega\tau_0). \end{aligned}$$

Поправка с номером n при больших значениях τ может быть представлена в виде

$$u_n^\pm = O(\exp(\pm 2n|\tau|)), \quad n > 1, \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Область пригодности асимптотического разложения вблизи седловой точки определяется неравенством $\varepsilon^{1/2} u_{n+1}^\pm / u_n^\pm \ll 1$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Это дает $|\tau| \ll -1/4 \ln(\varepsilon)$.

Сформулируем полученный результат.

Лемма 2. *Существует асимптотическое решение в виде (2.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $u_n(\tau)$ имеет вид (2.5) и $|\tau| \ll -1/4 \ln(\varepsilon)$.*

Согласование затравочной асимптотики и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности (1, 0). Согласуем параметры асимптотических решений $U(t, \varepsilon)$ и $u(\tau, \varepsilon)$. Для параметров с четными номерами получим $\alpha_{2n}^+ = 0$, $\beta_{2n}^+ = 0$.

Введем рекуррентные формулы для поправок с нечетными номерами

$$-2 \exp(-2t) = \varepsilon^{1/2} \alpha_1^+ \exp(-2\tau), \quad \alpha_1^+ = -2, \tau = t + \tau_0^+, \quad \tau_0^+ = \frac{1}{4} \ln(\varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{1}{16} B_1^+ \exp(2t) = \beta_1^+ \varepsilon^{-1/2} \exp(2\tau), \quad \beta_1^+ = \frac{1}{16} B_1^+.$$

Для высших поправок при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$4A_n^+ \exp(-2t) = \varepsilon^{1/2} \alpha_{2n+1}^+ \exp(-2\tau), \quad \alpha_{2n+1}^+ = 4A_n^+;$$

$$\frac{1}{16} B_n^+ \exp(2t) = \beta_{2n-1}^+ \varepsilon^{-1/2} \exp(2\tau), \quad \beta_{2n-1}^+ = \frac{1}{16} B_n^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Знак β_1^+ определяется параметром ϕ_0 :

$$\beta_1^+ = \frac{1}{16} B_1^+ = B_1^- + \frac{1}{16} \cos(\phi_0) \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}.$$

Если $\beta_1^+ > 0$ или, что то же самое, $\cos(\phi_0) > -16B_1^- \cosh(\pi\omega/2)$, то асимптотическое решение (0.1) неограничено, обратно, если $\cos(\phi_0) < -16B_1^- \cosh(\pi\omega/2)$, то асимптотическое решение (0.1) близко к сепаратрисе, которая идет от правого седла к левому.

Отсюда следует

Теорема 3. *Существует асимптотическое решение (0.1) в виде (0.2) при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$ и в виде (2.4) при $-1/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -3/4 \ln(\varepsilon)$.*

2.3. Асимптотическое решение в окрестности нижней ветви сепаратрисы

Пусть $\beta_1^+ < 0$. Тогда главный член асимптотического решения при $\tau \rightarrow \infty$ — нижняя сепаратриса, проходящая от седла (1, 0) к седлу (-1, 0). Формула для главного члена этого решения $u_0 = -\tanh(t_1)$. Асимптотическое разложение, пригодное около нижней сепаратрисы, опишем как

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t_1). \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что асимптотическое решение (2.6) имеет тот же вид (2.1) с независимой переменной t_1 вместо t .

Приведем уравнение для n -й поправки

$$u_n'' + 3u_n - 6u_0^2 u_n = f_n. \quad (2.7)$$

Здесь f_n — полином третьего порядка относительно u_j, u_k, u_l , где $j + k + l = n$ и

$$f_n \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm(n-1)} e^{2kt_1} \left(\sum_{l=0}^{2(n-1)} t_1^l \left[\sum_{m=0}^n (F_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t_1) + H_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t_1)) \right] \right), \quad t_1 \rightarrow \pm\infty.$$

Общей формулой для решения уравнения (2.7) является

$$u_n(t_1) \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm n} e^{2kt_1} \left(\sum_{l=0}^{2n} t_1^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} (\tilde{u}_{k,l,m}^{\pm} \cos(m\omega t_1) + \tilde{v}_{k,l,m}^{\pm} \sin(m\omega t_1)) \right] \right), \quad t_1 \rightarrow \pm\infty.$$

Обозначим $a_n^{\pm} = u_{\mp 1,0,0}^{\pm}/4$ и $b_n^{\pm} = \tilde{u}_{\pm 1,0,0}^{\pm}$. Эти параметры определяют параметры решения. Изменение этих параметров во время движения вдоль сепаратрисы опишем как $\Delta a_n = a_n^- - a_n^+$, $\Delta b_n = b_n^- - b_n^+$.

Асимптотическое решение в окрестности нижней сепаратрисы пригодно при $\varepsilon u_{n+1}/u_n \ll 1$, следовательно, $\varepsilon \exp(2t_1) \ll 1$ или $|t_1| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$. В результате справедлива

Лемма 3. *Существует асимптотическое решение (0.1) в виде (2.6) при $|t_1| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$.*

2.3.1. Согласование асимптотики вблизи вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности (1, 0). Согласование асимптотики вблизи седловой точки с асимптотикой в окрестности нижней сепаратрисы (2.6) дает

$$\varepsilon^{1/2} \beta_1^+ \exp(2\tau) = -2 \exp(2t_1) \quad \text{и} \quad \varepsilon^{1/2} \alpha_1^+ \exp(-2\tau) = \varepsilon 4a_1^+ \exp(-2t_1)$$

при $\tau \rightarrow \infty$ и $t_1 \rightarrow -\infty$. Здесь $\beta_1^+ < 0$. В результате

$$2\tau + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \ln(-\beta_1^+) = 2t_1 + \ln 2$$

или

$$t_1 = \tau + \frac{1}{4} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln(-\beta_1^+) - \frac{1}{2} \ln 2.$$

После подстановки t_1 и упрощений получается формула

$$\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \ln(\alpha_1^+) - 2\tau = \ln(\varepsilon) + 2 \ln 2 + \ln(a_1^+) - 2\tau - \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - \ln(-\beta_1^+) - \ln(2),$$

или

$$\alpha_1^+(-\beta_1^+) = 8a_1^+, \quad a_1^+ = \frac{1}{8} \alpha_1^+(-\beta_1^+).$$

Нетрудно видеть, что $\alpha_1^+ = -2$. Последовательные вычисления дают формулы для β_3^+ и b_1^+

$$\varepsilon^{3/2} \beta_3^+ \exp(2\tau) = \frac{1}{16} \varepsilon b_1^+ \exp(2t_1).$$

В результате получим $\ln(\beta_3^+) + 2\tau = -4 \ln 2 + \ln(b_1^+) + 2\tau + \ln(-\beta_1^+) - \ln(2)$ или

$$\beta_3^+ = \frac{1}{32} b_1^+(-\beta_1^+), \quad b_1^+ = 32 \frac{-\beta_3^+}{\beta_1^+}.$$

Для высших поправок $\varepsilon^{(2n+1)/2} \alpha_{2n-1}^+ \exp(-2\tau) = 4\varepsilon^n a_n^+ \exp(-2t_1)$, тогда

$$\alpha_{2n-1}^+(-\beta_1^+) = 8a_n^+, \quad a_n^+ = \frac{1}{8} \alpha_{2n-1}^+(-\beta_1^+).$$

Также $\varepsilon^{(2n+1)/2} \beta_{2n+1}^+ \exp(2\tau) = 1/16 \varepsilon b_n^+ \exp(2t_1)$, тогда

$$\frac{\beta_{2n+1}^+}{(-\beta_1^+)} = \frac{1}{32} b_n^+, \quad b_n^+ = -32 \frac{\beta_{2n+1}^+}{\beta_1^+}.$$

Удобно записать формулы связи для представления асимптотического решения в окрестности верхней и нижней сепаратрис:

$$\begin{aligned} a_1^+ &= \frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1), & a_{n+1}^+ &= -\frac{1}{32}(A_n^+ + \Delta A_n)(B_1^- + \Delta B_1), \\ b_n^+ &= -32 \frac{B_{n+1}^- + \Delta B_{n+1}}{B_1^- + \Delta B_1}, & n &\in \mathbb{N}; \\ t_1 &= t + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1)\right) - \frac{1}{2} \ln(2), \\ \phi &= -\frac{\omega}{2} \left[\ln(\varepsilon) + \ln\left(-\frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1)\right) - \ln(2) \right] + \Phi. \end{aligned}$$

2.3.2. Согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(-1, 0)$. Согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(-1, 0)$ проводится тем же способом, что согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(1, 0)$. Здесь приведены лишь необходимые формулы.

$$\begin{aligned} 2 \exp(-2t_1) &= \varepsilon^{1/2} \alpha_1^- \exp(-2\tau), & \varepsilon \frac{1}{16} b_1^- \exp(2t_1) &= \varepsilon^{1/2} \beta_1^- \exp(2\tau), \\ \varepsilon 4a_1^- \exp(-2t_1) &= \varepsilon^{3/2} \alpha_3^- \exp(-2\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, получены формулы для параметров асимптотики вблизи седловой точки:

$$-2t_1 = \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - 2\tau, \quad \tau_0^- = \frac{3}{4} \ln(\varepsilon), \quad \alpha_1^- = 2, \quad 4a_1^- = \alpha_3^-, \quad \beta_1^- = \frac{1}{16} b_1^-.$$

Определим формулы для согласования высших поправок

$$\varepsilon^{(2n+1)/2} (\alpha_{2n+1}^- \exp(-2\tau) + \beta_{2n+1}^- \exp(2\tau)) = \varepsilon^n \left(4a_n^- \exp(-2t_1) + \frac{1}{16} b_n^- \exp(2t_1) \right).$$

Они позволяют вывести формулы для параметров $\alpha_{2n-1}^- = 4a_n^-$, $16\beta_{2n+1}^- = b_n^-$.

Изменение коэффициента b_1 за время прохождения вблизи сепаратрисы имеет вид

$$\Delta b_1 = b_1^- - b_1^+ = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \cos\left(-\frac{\omega}{2}(\ln(\varepsilon) + \ln(-\beta_1^+) - \ln(2)) + \Phi\right).$$

Сформулируем полученное утверждение.

Теорема 4. Если $\beta_1^+ < 0$, тогда существует асимптотическое решение (0.1) в виде (0.2) при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$; в виде (2.4) с индексом “плюс” при $-1/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$; в виде (2.6) при $1 \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$ и в виде (2.4) с индексом “минус” при $-3/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -5/4 \ln(\varepsilon)$.

3. Осцилляции около сепаратрис

Рассмотрим асимптотические решения, колеблющиеся около ограниченных сепаратрис невозмущенного уравнения. Каждое колебание можно представить последовательно с помощью четырех асимптотических разложений: асимптотического решения в окрестности верхней сепаратрисы, асимптотического решения вблизи седловой точки в окрестности седла $(1, 0)$, асимптотического решения вблизи нижней сепаратрисы и асимптотического решения вблизи седловой точки в окрестности седла $(-1, 0)$. Параметры асимптотик согласуются в соответствии с полученными выше формулами согласования асимптотик разных типов. В результате получается дискретная динамическая система, отвечающая за преобразование параметров при колебаниях. Исходными параметрами такой динамической системы естественно считать сдвиг Φ_0 и набор параметров A^- и B^- .

Обозначим параметры асимптотического решения

$$t_0 = t, \quad A_n(0) = A_n^-, \quad B_n(0) = B_n^-, \quad \Phi(0) = \Phi_0.$$

Если $B_1^-(0) + \Delta B_1(0) < 0$, тогда асимптотическое решение продолжается в окрестность нижней сепаратрисы. Параметры асимптотики в окрестности нижней сепаратрисы на первом колебании будем обозначать как

$$A_n(1) = a_n^+(1), \quad B(1) = b_n^+, \quad \Phi(1) = \phi.$$

Если $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B_1(k)) < 0$ и $k \geq 2$, то параметры асимптотического решения на следующей осцилляции вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_m + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(-1)^{k+1}}{16} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right) - \frac{1}{2} \ln(2), \\ B_n(k+1) &= -32 \frac{B_{n+1}(k) + \Delta B_{n+1}(k)}{B_1(k) + \Delta B_1(k)}; \\ A_1(k+1) &= \frac{1}{32} (B_1^-(k) + \Delta B_1(k)), \\ A_n(k+1) &= -\frac{1}{32} (A_{n-1}(k) + \Delta A_{n-1}(k)) (B_1(k) + \Delta B_1(k)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

При заданном значении параметра $\Phi(0)$ получим $\Phi(k+1) = \omega(t_k - t_{k+1}) + \Phi(k)$ или

$$\Phi(k+1) = -\frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{(-1)^{k+1}}{32} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right] \right) + \Phi(k). \quad (3.2)$$

Полученные формулы определяют дискретную динамическую систему. Нелинейность исходного дифференциального уравнения спрятана в членах $\Delta B_n(k), \Delta A_n(k)$.

Значения параметров асимптотик для асимптотического решения с выбранной затравочной асимптотикой можно определить, воспользовавшись дискретной динамической системой. В частности, на N -м колебании значения индекса $k = 2N - 2$ соответствуют асимптотике вблизи верхней сепаратрисы, значения $k = 2N - 1$ — асимптотике в окрестности нижней сепаратрисы, где $b_n^+ = B_n(k), a_n^+ = A_n(k), \phi = \Phi(k)$.

Покажем, что существует набор значений A^- и B^- такой, что $\varepsilon = 0$ является предельной точкой множества значений ε для осциллирующих решений. Для этого рассмотрим переход от первой ко второй осцилляции. Этот переход определяется неравенством

$$B_1(1) + \frac{\pi \cos(\Phi(1))}{16 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} > 0. \quad (3.3)$$

Здесь

$$\Phi(1) = \frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{1}{32} (B_1(0) + \Delta B_1(0)) \right] \right) + \Phi(0).$$

Величина $B_1(1)$ при заданных значениях $B_1(0)$ и $\Phi(0)$ определяется исходя из значения $B_2(0)$. Это следует из формул для $B_1(1)$. Если $16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1) > 1$, тогда для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ асимптотическое решение продолжается на времена $t_2 = O(1)$. Если $16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1) < 1$, тогда для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ асимптотическое решение уходит на бесконечность за времена $t_2 = O(1)$. Пусть $|16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1)| < 1$, тогда для $\forall \varepsilon_0 > 0$ на интервале $(0, \varepsilon_0)$ существуют интервалы значений ε , для которых неравенство (3.3) выполнено. На таких интервалах существует последовательность значений ε , для которой $\varepsilon = 0$ — предельная точка. Такие же рассуждения можно распространить на произвольное число колебаний около сепаратрисы.

Пусть для некоторого номера M существует некоторый набор интервалов значений параметра ε , на котором асимптотическое решение продолжается до времен $t_M = O(1)$. Обозначим

такой набор интервалов \mathcal{E}_M . Покажем, что существует набор значений B_n^- , $N + M + 1 > n > M + 1$ такой, что асимптотическое решение ограничено на временах $t_{M+N} = O(1)$ для $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon = 0$ будет оставаться предельной точкой некоторой последовательности значений из интервалов ε , для которых выполнены условия продолжения ограниченного асимптотического решения до $t_{M+N} = O(1)$.

Параметры $B_1(k)$ определяются через B_j^- , $j = 0, \dots, k-1$. Поэтому для $M < k < M + N$ их можно выбрать так, что неравенства $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B_1(k)) < 0$ выполняются при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В этом случае асимптотическое решение остается ограниченным на временах $t_{M+N} = O(1)$, на том же множестве значений $\varepsilon \in \mathcal{E}_{M+N} = \varepsilon \in \mathcal{E}_M$, следовательно, и $\varepsilon = 0$ остается предельной точкой некоторой последовательности из \mathcal{E}_{M+N} .

Таким образом, получена

Лемма 4. *Существует последовательность $\{B_n^-\}_{n=0}^\infty$ такая, что для $\forall \varepsilon_0 = \text{const} > 0$ найдется последовательность значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ такая, что неравенство $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B(k)) < 0$ выполнено $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Из утверждения леммы вытекает

Теорема 5. *Существует постоянная $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$ такая, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует последовательность $\{B_n^-\}_{n=0}^\infty$ такая, что асимптотическое решение осциллирует при $t = O(N \ln(\varepsilon))$ для $\forall N \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2 выводится из теоремы 5 и полученных выше формул для формального асимптотического решения.

3.1. Обобщенный сдвиг Бернулли

Построенное отображение содержит аналог сдвига Бернулли для параметров. Из формул (3.1) и (3.2) видно, что $B_n(k+1)$ зависит от $B_{n+1}(k)$. Это означает, что n -я поправка в $(N+1)$ -й осцилляции зависит от $(n+2)$ -й поправки на N -й осцилляции. Это типичное свойство сдвига Бернулли. В результате происходит потеря точности при использовании конечного числа членов асимптотики.

3.2. Структура множества значений малого параметра

Здесь показано, что структура множества значений параметра ε , в котором лежат осциллирующие решения, в общем случае носит сложный характер.

Условие

$$\cos\left(\Phi(n) - \omega \frac{n-1}{2} \ln(\varepsilon)\right) < -16B_1(n) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \quad (3.4)$$

определяет продолжимость дискретной динамической системы на следующий, $(n+1)$ -й, шаг. Пусть $\delta = -\omega \ln(\varepsilon)$, тогда $\delta \in (\delta_0, \infty)$, где $\delta_0 = -\omega \ln(\varepsilon_0)$ и $0 < \varepsilon_0 < 1$. Пусть параметр $\sigma_1(n)$ таков, что

$$\arccos\left[-16\sigma_1(n) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\right] - \Phi(n) = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Тогда неравенство (3.4) определяет множество значений параметра δ . При этом значения целочисленного параметра k должны быть такими, что

$$k > K = \left\lceil \frac{\omega(n-1)}{4\pi} \ln(\varepsilon_0) \right\rceil + 1.$$

Рассмотрим значения δ из интервала $\frac{n-1}{2}\delta \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, тогда при $\frac{n-1}{2}\delta < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $\frac{n-1}{2}\delta > \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ дискретная динамическая система продолжима на следующий шаг.

Рассмотрим последовательность $\alpha \in \mathbb{N}$ такую, что

$$-16B_1(l) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) > 1 \quad \text{при } l > n_\alpha, \quad l < 3n_\alpha - 2$$

а при $n_{\alpha+1} = 3n_\alpha - 2$

$$\arccos\left[-16B_1(n_{\alpha+1}) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\right] - \Phi(n_{\alpha+1}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \forall k > \left[\frac{\omega(n_{\alpha+1} - 1)}{4\pi} \ln(\varepsilon_0)\right] + 1. \quad (3.5)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, тогда множество δ , для которого дискретная динамическая система продолжима для $\forall n \in \mathbb{N}$, образует структуру типа канторова множества на интервалах $(-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$ для k из (3.5).

4. Заключение

В работе приведен пример асимптотических построений для задачи, решение которой демонстрирует “детерминированный хаос”. Показано, что структура асимптотического решения в этой задаче существенно зависит как от параметров уравнения, так и от параметров решения. Оказывается, что построение регулярных асимптотик в таких задачах вполне возможно. Однако такие регулярные асимптотики пригодны, вообще говоря, на нерегулярных множествах параметров.

Выражаю признательность проф. Л. А. Калякину и Б. И. Сулейманову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Poincare H.** *Lés méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Т. III. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
2. **Mel'nikov V.K.** On the stability of the center for time periodic perturbations // Trans. Moscow Math. Soc. 1963. Vol. 12. P. 1–57.
3. **Алексеев В.М.** Квазислучайные динамические системы I, II, III // *Мат. сб.* 1968. Т. 76, № 1. С. 72–134; 1968. Т. 77, № 4. С. 545–601; 1969. Т. 78, № 1. С. 3–50.
4. **Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavskii G.M.** Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // *Nuclear Fusion.* Vol. 7. 1967. P. 253–266.
5. **Пифганкин Г.Н., Трещёв Д.В.** Сепаратрисное отображение в гамильтоновых системах // *Успехи мат. наук.* 2007. Т. 62. С. 3–108.
6. **Neishtadt A.I.** Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter // *J. Appl. Math. Mech.* 1975. Vol. 39, no. 4. P. 594–605.
7. **Timofeev A.V.** On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of motion changes // *Soviet Physics JETP.* 1978. Vol. 48. P. 656–659.
8. **Sary J.R., Scodje R.T.** Phase change between separatrix crossing // *Physica D.* 1989. Vol. 36, no. 3. P. 287–316.
9. **Neishtadt A., Vasiliev A.** Phase change between separatrix crossings in slow-fast Hamiltonian systems // *Nonlinearity.* 2005. Vol. 18, no. 3. P. 1393–1406.
10. **Diminnie D.C., Haberman R.** Slow passage through a saddle-center bifurcation // *J. Nonlinear Sci.* 2000. Vol. 10, no. 2. P. 197–221.
11. **Kiselev O.M.** Hard loss of stability in Painleve-2 equation // *J. Nonlinear Math. Phys.* 2001. Vol. 8, no. 1. P. 65–95.
12. **Kiselev O.M., Glebov S.G.** An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle-centre bifurcation point // *Nonlinearity.* 2003. Vol. 16, no. 1. P. 327–362.
13. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

Киселев Олег Михайлович

д-р физ. мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

e-mail: olegkiselev@matem.anrb.ru

Поступила 01.10.2011