



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ф. Коробейник, О представляющих системах подпространств,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 741–755

<https://www.mathnet.ru/mzm5587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

20 мая 2025 г., 12:40:27



О ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Ю. Ф. Коробейник

§ 1. Пусть H — линейное топологическое пространство (л.т.п.) над полем скаляров Φ . Последовательность его элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется представляющей системой (п.с.) в H , если любой элемент x из H можно представить в виде сходящегося в H ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k \in \Phi \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется абсолютно-представляющей системой (а.п.с.) в отделимом локально выпуклом пространстве (л.в.п.) H , если любой элемент x из H можно представить в виде ряда (1), абсолютно сходящегося в H . Изложение результатов, полученных для а.п.с. элементов, см. [1].

Пусть теперь $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность подпространств л.т.п. H . Назовем эту последовательность п.с. подпространств в H , если любой элемент x можно представить в виде сходящегося в H ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad y_k \in H_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Далее, назовем последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ а.п.с. (подпространств) в л.в.п. H , если любой элемент x из H можно представить в виде ряда (2), абсолютно сходящегося в H .

Во всех известных нам примерах п.с. и а.п.с. подпространств выполняется одно из двух (частично пересекающихся) условий: 1) для любого $x \in H$ разложение в ряд (2) единственно; тогда $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис подпространств в H — понятие, хорошо изученное, особенно в банаховых и гильбертовых пространствах;

2) все H_n одномерны: $H_n = \alpha x_n$, $\alpha \in \Phi$; в этом случае $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — п.с. или а.п.с. подпространств тогда и только тогда, когда $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — п.с. или а.п.с. элементов в H .

В настоящей статье строятся довольно общие классы п.с. и а.п.с. подпространств, для которых не выполняется ни одно из этих двух условий. Все рассуждения проводятся в пространстве $H(\mathcal{G})$ аналитических в области \mathcal{G} функций с топологией равномерной сходимости на компактах \mathcal{G} ($\Phi = \mathbb{C}$).

§ 2. Изложению основных результатов работы предположим две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\gamma(r)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty)$, $a > 1$ и такова, что $\gamma(r) \geq r/\ln r$, $\gamma(r) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Положим

$$v(r) = \sup_{u \geq r} \frac{\gamma(u)}{u} \quad \text{и} \quad v(r) = v(a), \quad 0 \leq r \leq a;$$

$$\mu(r) = 2 \int_0^r \frac{du}{u} \int_0^u v(v^2) dv; \quad s_n = [\mu(n)];$$

$$\tilde{\gamma}(r) = \int_0^{\sqrt{r}} \mu(u) \ln \frac{r}{u^2} du;$$

$$U_{Q,c} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{Q,c}^n;$$

$$U_{Q,c}^n = \{r : n^2 - c \cdot n^{-2Q} < r < n^2 + c \cdot n^{-2Q}\}, \quad c > 0, Q > 1.$$

Тогда функция $L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{n^2} \right)^{s_n} \right]$ обладает следующими свойствами:

1) $L_1(\lambda) \in [1, 0]$;

2) $\ln |L_1(re^{i\varphi})| = \tilde{\gamma}(r) + o(\tilde{\gamma}(r))$ при $r \rightarrow \infty$, $r \notin U_{Q,c}$ ($Q > 1$ и $c > 0$ произвольно зафиксированы). При этом $\forall r \geq a$ $\tilde{\gamma}(r) \geq \gamma(r)$ и $\tilde{\gamma}(r) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

Эта лемма является частью леммы 1 [2] (доказательство соответствующей части см. [2, с. 644–647]).

ЛЕММА 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество точек комплексной плоскости, такое, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$ и $\exists c > 0$,

$\exists Q > 1: \Lambda \cap U_{Q,c} = \emptyset$. Пусть, далее, d_n — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| \leq 0$. Тогда можно так выбрать функцию $\gamma(r)$ со свойствами, указанными в предыдущей лемме, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|d_n|}{|L_1(\lambda_n)|} < \infty$, где $L_1(\lambda)$ — функция из леммы 1, построенная по $\gamma(r)$.

Доказательство. Пусть $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность всех попарно различных членов последовательности $\{|\lambda_n|\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого m существует конечное число номеров q_m ($q_m \geq 1$), таких, что $q_m = n_{m+1} - n_m$,

$$|\lambda_{n_{m+1}}| = |\lambda_{n_{m+2}}| = \dots = |\lambda_{n_{m+1}+q_m}| = \mu_m,$$

$n_m \uparrow \infty, n_1 = 0$. Пусть

$$\beta_m = \sup \{ |d_k| : n_m + 1 \leq k \leq n_{m+1} \}.$$

Тогда $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \beta_m}{\mu_m} \leq 0$. Построим теперь функцию $\gamma(r)$ следующим образом. В точках $r = \mu_l$ положим

$$\hat{\gamma}(\mu_l) = \max \left\{ 2 \ln \beta_l + 4 \ln l, \frac{\mu_l}{|\ln \mu_l|} \right\}, \quad l \geq 1.$$

Очевидно, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\hat{\gamma}(\mu_l)}{\mu_l} = 0$. Соединив отрезками прямых

точки $(0, 0), \left(\mu_l, \frac{\hat{\gamma}(\mu_l)}{\mu_l} \right) (l = 1, 2, \dots)$, получим график функции $y = v(r)$. Положим $\gamma(r) = r \cdot \max \{v(r), 1/\ln r\}$,

$r > 1$. Тогда $\gamma(r) \geq r/\ln r, \gamma(\mu_l) = \hat{\gamma}(\mu_l), l \geq l_0, \gamma(r) = o(r)$ при $r \rightarrow \infty$. По лемме 1 построим функцию $L_1(\lambda)$, для которой вне $U_{Q,c}$

$$\ln |L_1(re^{i\varphi})| = \tilde{\gamma}(r) + o(\tilde{\gamma}(r)).$$

Отсюда

$$\forall n > N_1 \quad \ln |L_1(\lambda_n)| > \tilde{\gamma}(|\lambda_n|)/2,$$

и

$$|d_n/L_1(\lambda_n)| \leq |d_n| \exp[-\gamma(|\lambda_n|)/2].$$

Но $\forall n \geq 1 \exists l \geq 1: |\lambda_n| = \mu_l, n_l + 1 \leq n < n_{l+1}, |d_n| \leq \beta_l$, откуда $|d_n/L_1(\lambda_n)| \leq \beta_l \exp[-\hat{\gamma}(\mu_l)/2] \leq \leq 1/l^2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n/L_1(\lambda_n)| < \infty.$$

Заметим, что результат, аналогичный лемме 2, имеется в работе [2]. Лемма 2 использовалась (в неявном виде) [3 с. 1096]. Мы сформулировали здесь этот результат для удобства приложений.

§ 3. ТЕОРЕМА 1. Пусть $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа с индикатором $h(\varphi) > 0$ и нулями λ_n кратности p_n , допускающая на некоторой системе окружностей $|\lambda| = r_n$, $r_n \uparrow \infty$, оценку снизу: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$:

$$|L(\lambda)| > \exp [h(\arg \lambda) - \varepsilon] |\lambda|, \quad |\lambda| = r_n, \quad n > N. \quad (3)$$

Пусть, далее, $H_n = \text{span} \{z^s e^{\lambda_k z^j} : s = 0, 1, \dots, p_k - 1; r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \dots$ (полагаем $r_1 = 0$). Тогда последовательность $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ является п.с. подпространств в пространстве $H(\mathcal{G})$, где \mathcal{G} — выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $H_n \neq \emptyset \forall n \geq 1$, т. е. что в каждом кольце $r_k \leq |z| < r_{k+1}$ содержится по крайней мере один нуль λ_j функции $L(\lambda)$ ($j \geq k$). Действительно, если, например, $H_n = \emptyset$, то из последовательности $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ выбросим r_{n+1} и, соответственно, положим

$$\hat{H}_k = H_k, \quad k \leq n - 1;$$

$$\hat{H}_n = \{z^s e^{\lambda_k z} : s = 0, 1, \dots, p_k - 1; r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+2}\};$$

$\hat{H}_k = H_{k+1}$, $k \geq n + 1$. Новая система подпространств $\{\hat{H}_k\}_{k=1}^\infty$ получается удалением из исходной пустого множества H_n и потому будет а.п.с. или п.с. в $H(\mathcal{G})$ в том и только том случае, если таковой является исходная система $\{H_m\}_{m=1}^\infty$. Корни λ_j располагаем в порядке неубывания их модуля. Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$ и $\forall k \geq k_0 \quad r_k \geq |\lambda_k| > \alpha k$, $\alpha > 0$. Выберем числа $\varepsilon_k > 0$ так, чтобы $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $\sum_{k=1}^\infty e^{-\varepsilon_k r_k} < \infty$. Положим

$$U_k = \{r : r_k - e^{-\varepsilon_k r_k} \leq r \leq r_k + e^{-\varepsilon_k r_k}\}$$

$$(k = 1, 2, \dots), \quad U = \bigcup_{k=1}^\infty U_{Q,1}^k;$$

$$Q > 1; \quad U_{Q,1}^k = \{r : k^2 - k^{-2Q} < r < k^2 + k^{-2Q}\}$$

$$(k = 1, 2, \dots) \quad V = \bigcup_{k=1}^\infty U_{Q,1}^k;$$

\bar{U} и \bar{V} — подмножества $(0, +\infty)$ нулевой относительной меры. Можно всегда выбрать а.п.с. экспонент $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ в $H(\mathcal{G})$ так, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\tau_k} = 0$ и чтобы $\Omega \cap (V \cup U) = \emptyset$, где $\Omega = \{|\tau_m|\}_{m=1}^{\infty}$. Это можно осуществить, например, методом, разработанным А. Ф. Леонтьевым [4], а именно: построить экспоненциальную функцию вполне регулярного роста с индикатором $h(\varphi)$ и простыми нулями $\{\tau_s\}_{s=t}^{\infty}$. Так, чтобы $\Omega \cap (V \cup U) = \emptyset$ и чтобы $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ являлось регулярным множеством (определение последнего см. [4, с. 30; 5, с. 126]). Если f — произвольная функция из $H(\mathcal{G})$, то $\exists \{d_m\}_{m=1}^{\infty}: f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m e^{\tau_m z}$, причем ряд сходится абсолютно в $H(\mathcal{G})$. Согласно лемме [6, с. 333—334],

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\tau_m|} \ln |d_m| + h(\arg \tau_m) \right] \leq 0.$$

Следующий этап доказательства заключается в выводе одного вспомогательного равенства для функции $e^{\lambda z}$. Точнее говоря, мы разложим такую функцию в ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, где $y_n \in H_n$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $\alpha = \inf_{\theta} h(\theta)$, $q \in (0, 1)$, $q\mathcal{G} = \{t \in \mathbf{C}: t = qu, u \in \mathcal{G}\}$. Рассмотрим интеграл

$$J_n(z, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r_n} \frac{e^{uz} du}{L(u)(u-\lambda)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если $z \in q\mathcal{G}$, $|\lambda| \notin U$, то $\forall \varepsilon < (1-q)/(3\alpha)$ существует такое N , что $n > N$,

$$|J_n| \leq r_n \sup_{|u|=r_n} \exp[qh(\arg u) - h(\arg u) + \varepsilon + \varepsilon_n] |u| < e^{-\delta |r_n|},$$

$$\delta = (1-q)/3\alpha.$$

Отсюда $\forall n > N \sup \{ |J_{n+1}(z, \lambda) - J_n(z, \lambda)| : z \in q\mathcal{G}, |\lambda| \in CU < 2e^{-\delta r_n} \}$. Если $r_N > |\lambda|$, $L(\lambda) \neq 0$ и $n > N$, то по теории вычетов

$$J_n = \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\varphi(n)} e^{\lambda_k z} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j, k} z^{p_k - j}}{(\lambda_k - \lambda)^j},$$

$$\varphi(n) = \sup \{k: |\lambda_k| < r_n\}.$$

Пусть $\Lambda = \{ |\lambda_j| \}_{j=1}^{\infty}$, $B = \Lambda \cup U$. Если $z \in \mathcal{G}$ и $|\lambda| \notin B$, то

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} L(\lambda) e^{\lambda_k z} \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k} z^{p_k-j}}{(\lambda_k - \lambda)^j} = \\ = L(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z, \lambda). \quad (4)$$

При этом

$$\forall g \in (0, 1) \quad \exists N = N(g), \\ \exists \delta = \delta(g) > 0: \forall z \in g\mathcal{G}, \quad \forall n > N, \quad |\lambda| \notin B \\ |\mu_n(z, \lambda)| \leq 2e^{-\delta r_n}, \quad (5)$$

$$|e^{\lambda z} - L(\lambda) \sum_{m=1}^n \mu_m(z, \lambda)| \leq |L(\lambda)| e^{-\delta r_n}, \quad (6)$$

$$|\sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_m(z, \lambda)| \leq e^{-\delta r_n}. \quad (7)$$

Возвращаясь теперь к разложению функции f по системе $\{e^{\tau_m z}\}_{m=1}^{\infty}$, положим $\alpha_m = |d_m| [|L(\tau_m)| + \exp h(\arg \tau_m) |\tau_m|]$, $m = 1, 2, \dots$. Очевидно, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|\tau_m|} \ln \alpha_m \leq 0.$$

Пользуясь леммой 2, построим функцию

$$R(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{n^2} \right)^{s_n} \right]$$

из класса $[1, 0]$ так, чтобы $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha_m}{R(\tau_m)} \right| < \infty$.

Рассмотрим функцию $f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m e^{\tau_m z}}{R(\tau_m)}$. Так как

$$\left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| \leq \left| \frac{\alpha_m}{R(\tau_m)} \right| e^{-h(\arg \tau_m) |\tau_m|} \leq C e^{-h(\arg \tau_m) |\tau_m|},$$

то

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\tau_m|} \ln \left| \frac{d_m}{R(\tau_m)} \right| + h(\arg \tau_m) \right] \leq 0,$$

и

$$f_1(z) \in H(\mathcal{G}).$$

В силу (4)

$$e^{\tau_m z} = L(\tau_m) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m}(z), \quad \mu_{n,m}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_n(z, \lambda_m).$$

Отсюда $\forall z \in \mathcal{G} \quad \forall n \geq 1 \quad \forall N > n$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \left[\sum_{n=1}^N \mu_{n,m}(z) + \sum_{m=N+1}^{\infty} \mu_{n,m}(z) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} e^{\lambda_k z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}^{(m)} \tau_k^{p_k-j}}{(\lambda_k - \mu_m)^j} + R_N(z) = \sum_{n=1}^N y_n(z) + R_N(z), \\ &y_n \in H_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

При этом в силу неравенства (7) $\forall q \in (0, 1), \forall z \in q\mathcal{G}$

$$|R_N(z)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m L \tau_m}{R(\tau_m)} \right| e^{-\delta r_N} = c e^{-\delta r_N}.$$

Таким образом, $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$, где $y_n \in H_n$, и ряд сходится в $H(\mathcal{G})$.

Пусть $R(D)$ — оператор свертки с характеристической функцией

$$R(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \lambda^l; \quad (R(D)y)(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l y^{(l)}(z).$$

Тогда $\forall z \in \mathcal{G} \quad f(z) = R(D)f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (R(D)y_n)(z)$, причем ряд сходится в $H(\mathcal{G})$ в силу непрерывности оператора $R(D)$ (см. [7]). При этом

$$\begin{aligned} R(D)y_n &= \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} R(\lambda_k) e^{\lambda_k z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^{p_k} \frac{c_{j,k}}{(\lambda_k \tau_m)^j} = w_n, \end{aligned}$$

где $w_n \in H_n$. Теорема доказана.

§ 4. Установим теперь аналогичный результат для а.п.с. подпространств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{r_n} = 0.$$

Тогда $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — а.п.с. подпространств в $H(\mathcal{G})$.

Доказательство. Повторяя дословно доказательство теоремы 1, приходим к равенству $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$, где $y_n \in H_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и ряд сходится в $H(\mathcal{G})$. Покажем, что он сходится в $H(\mathcal{G})$ абсолютно. Имеем $\forall z \in \mathcal{G}, \forall n \geq 1$

$$y_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{n,m}(z) \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)}.$$

На основании оценки (5) получаем, что $\forall q \in (0, 1) \exists \delta > 0, \exists N < \infty$:

$$\sup_{z \in q\mathcal{G}} |y_n(z)| \leq 2e^{-\delta r_n} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m L(\tau_m)}{R(\tau_m)} \right| \leq ce^{-\delta r_n},$$

$$\forall n > N.$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(z)$ сходится абсолютно в $H(\mathcal{G})$. Но тогда, как при доказательстве теоремы 1, находим, что $\forall z \in \mathcal{G}$

$$f(z) = (R(D)f_1)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z), \quad w_k = R(D)y_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно в $H(\mathcal{G})$, причем $w_k \in H_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Теорема 2 доказана. Пусть выполняются все предположения теоремы 1. Из последовательности $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно всегда извлечь достаточно редкую подпоследовательность $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, так чтобы

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\tilde{r}_k} = 0$. Так как на окружностях $|z| = r_n$ по предположению имеет место оценка (3), то по теореме 2 в $H(\mathcal{G})$ будет абсолютно-представляющей последовательность подпространств $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $H_k = \text{span} \{z^s e^{\lambda_j z} : s = 0, 1, \dots, p_j - 1; \tilde{r}_k \leq |\lambda_m| < \tilde{r}_{k+1}\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

З а м е ч а н и е 2. В теоремах 1—2 можно заменить условие $h(\varphi) > 0$ более слабым требованием: сопряженная диаграмма функции $L(\lambda)$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку. Этот более общий случай сводится к случаю $h(\varphi) > 0$ с помощью перехода от функции $L(\lambda)$ к функции $L_0(\lambda) = e^{\alpha \lambda} L(\lambda)$. При таком переходе пространства H_n не меняются, а индикатор функции L_0 при подходящем выборе α уже положителен. Критерий того, что сопряженная диаграмма экспоненциальной функции $L(\lambda)$ содержит по крайней мере одну внутреннюю точку, приведен в [4, с. 97].

§ 5. Укажем класс функций $L(\lambda)$, для которых имеется нужная нам оценка снизу на окружностях $|z| = r_n$, $n = 1, 2, \dots$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа вполне регулярного роста и множество \mathcal{G} всех внутренних точек ее сопряженной диаграммы непусто. Тогда существует последовательность $r_n \uparrow \infty$, $r_1 = 0$, такая, что $r_{n+1}/r_n \rightarrow 1$ и $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — а.п.с. подпространств в $H(\mathcal{G})$, где H_n — подпространства, фигурирующие в теореме 1.

Доказательство. Как установлено в [4, с. 41], всегда найдется последовательность окружностей $|z| = \rho_n$, где $\rho_n \uparrow \infty$, $\rho_{n+1}/\rho_n \rightarrow 1$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: |L(\lambda)| \geq \exp[h(\arg \lambda) - \varepsilon] |\lambda|, \\ |\lambda| = \rho_n, n > N.$$

Если $\ln n/\rho_n \rightarrow 0$, то теорема доказана. Если же последнее условие не выполняется, то извлечем из $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\rho_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, так чтобы $r_{k+1}/r_k \rightarrow 1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{r_k} = 0$. С этой целью положим $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, а при $s \geq 3$ $n_s = \min\{j > n_{s-1} : \rho_j > (\ln s)^2\}$. Тогда $\forall s \geq 3$ $r_s = \rho_{n_s} > (\ln s)^2$. В то же время для любого $s \geq 3$ или $n_s - 1 = n_{s-1}$, или $n_s - 1 > n_{s-1}$, но $\rho_{n_s-1} \leq (\ln s)^2$. В первом случае $r_s = \rho_{n_s-1+1}$, $1 \leq \frac{r_s}{r_{s-1}} = \frac{\rho_{n_s-1+1}}{\rho_{n_s-1}}$, а во втором

$$1 \leq \frac{r_s}{r_{s-1}} = \frac{\rho_{n_s}}{\rho_{n_s-1}} \cdot \frac{\rho_{n_s-1}}{r_{s-1}} \leq \frac{\rho_{n_s}}{\rho_{n_s-1}} \cdot \left[\frac{\ln s}{\ln(s-1)} \right]^2.$$

Из этих неравенств следует, что при $s \rightarrow \infty$ $r_s/r_{s-1} \rightarrow 1$. Кроме того,

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{(\ln s)^2}{r_s} \leq 1$$

и подавно

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln s}{r_s} = 0.$$

Остается сослаться на теорему 2.

В связи с теоремой 3 напомним (см. [3]), что если $L(\lambda)$ — функция экспоненциального типа с индикатором $h(\varphi)$ и простыми нулями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и \mathcal{G} — (непустая) вы-

выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$, то $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — а.п.с. в $H(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда выполняются такие два условия:

а) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста (при показателе 1);

б) в классе $[1, 0]$ найдется функция $c(\lambda)$, отличная от тождественного нуля и такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{c(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| + h(\arg \lambda_n) \right] \leq 0.$$

В частности, условия а — б выполнены, если $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — регулярное множество. В то же время существуют целые функции вполне регулярного роста (при показателе 1) с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{c(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| = +\infty,$$

какова бы ни была функция $c(\lambda)$ из класса $[1, 0]$, отличная от тождественного нуля (простой пример такой функции был указан А. Ф. Леонтьевым [3, с. 1085]). В этом случае $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — не а.п.с. в $H(\mathcal{G})$, но по теореме 3 $\{H_n\}$ — п.с. подпространств и $\{\tilde{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — а.п.с. подпространств в $H(\mathcal{G})$. В данном случае

$$H_n = \text{span} \{e^{\lambda_k z} : r_n \leq |\lambda_k| < r_{n+1}\},$$

$$\tilde{H}_n = \text{span} \{e^{\lambda_k z} : \tilde{r}_n \leq |\lambda_k| < \tilde{r}_{n+1}\},$$

$$r_n \uparrow \infty, \quad \frac{r_{n+1}}{r_n} \rightarrow 1, \quad \frac{\tilde{r}_{n+1}}{\tilde{r}_n} \rightarrow 1, \quad \frac{\ln n}{\tilde{r}_n} \rightarrow 0.$$

Иначе говоря, если $L(\lambda)$ — произвольная функция вполне регулярного роста (при показателе 1) с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и индикатором $h(\varphi)$, а \mathcal{G} — выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$, то не всегда любую функцию f из пространства $H(\mathcal{G})$ можно представить в виде абсолютно сходящегося в $H(\mathcal{G})$ ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{\lambda_k z}, \quad (8)$$

по каждой функции f из $H(\mathcal{G})$ можно сопоставить ряд вида (8), некоторая подпоследовательность $\{S_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ частных сумм которого абсолютно сходится к f в $H(\mathcal{G})$.

При этом индексы $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ не зависят от f и определяются функцией L .

Приведенные выше доказательства теорем 1—3 позволяют эффективно строить разложения любой функции $f \in H(\mathcal{G})$ в сходящийся или абсолютно сходящийся ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ($y_n \in H_n$ или $y_n \in \bar{H}_n$). Однако способ определения «координатных функций» y_n довольно сложен. В случае, когда $f(z) \in H(\bar{\mathcal{G}})$ (т. е. когда f аналитична на $\bar{\mathcal{G}}$), координатные функции можно определить довольно просто, не пользуясь «промежуточной» а.п.с. $\{e^{\tau m z}\}_{m=1}^{\infty}$ и не привлекая леммы 1 и 2. Этот случай был исследован ранее А. Ф. Леонтьевым, получившим представление f в виде ряда $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ с помощью введенной им интерполирующей функции (см. [4, с. 300—307]).

§ 6. Представляющие системы подпространств можно исследовать методами, развитыми в [1, 3, 5] применительно к представляющим системам элементов. Например, можно получить результаты, аналогичные изложенным в § 1—2 [5]. Однако при переходе от п.с. элементов к п.с. подпространств возникают значительные трудности. В частности, пока не удается получить для п.с. подпространств квазиполиномов (рассмотренных в теоремах 1—3 вида) критерий в терминах нетривиального разложения нуля, аналогичный следствию 2 теоремы 12 [3]. В последующей части настоящей работы излагаются некоторые из результатов общего характера, полученных для п.с. подпространств в пространстве $H(\mathcal{G})$ аналитических и выпуклой области \mathcal{G} функций. Предварительно условимся говорить, как в [1], что выпуклая область \mathcal{G}_1 дополнима к выпуклой области \mathcal{G} , если найдется ограниченное замкнутое выпуклое множество \mathcal{F} , такое, что $\mathcal{G}_1 + \mathcal{F} = \mathcal{G}$ (как обычно, $\mathcal{G}_1 + \mathcal{F}$ — арифметическая сумма множеств \mathcal{G}_1 и \mathcal{F}). Пусть $M_n, n = 1, 2, \dots$ — последовательность подмножеств комплексной плоскости \mathbb{C} , p_α — натуральные числа и

$$\mathcal{E}_n = \text{span} \{z^s e^{\lambda_\alpha z} : s = 0, 1, \dots, p_\alpha - 1; \lambda_\alpha \in M_n\}$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Замыкание \mathcal{E}_n в топологии $H(\mathcal{G})$ обозначим символом \mathcal{E}_n^0 , а в топологии $H(\mathcal{G}_1)$ — символом \mathcal{E}_n^1 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть \mathcal{G} и \mathcal{G}_1 — произвольные выпуклые области (не обязательно ограниченные) и пусть \mathcal{G}_1 дополнима к \mathcal{G} . Тогда если $\{\mathcal{E}_n^0\}_{n=1}^\infty$ — п.с. (или а.п.с.) подпространств в $H(\mathcal{G})$, то $\{\mathcal{E}_n^1\}_{n=1}^\infty$ — п.с. (соответственно а.п.с.) подпространств в $H(\mathcal{G}_1)$.

Доказательство. Проведем его методом, примененным в [8] для п.с. элементов. Именно: пусть $L(\lambda)$ — целая функция вполне регулярного роста (при показателе 1) с сопряженной диаграммой \mathcal{F} (такая функция всегда найдется, см. [4, с. 79, 100; 5, с. 124]). Пусть M — оператор свертки с характеристической функцией $L(\lambda)$. Тогда (см. [9]) M — эпиморфизм $H(\mathcal{G})$ на $H(\mathcal{G}_1)$ и $\forall f \in H(\mathcal{G}_1) \exists g \in H(\mathcal{G}) : (Mg)(z) = f(z), \forall z \in \mathcal{G}_1$. По условию $g(z) = \sum_{n=1}^\infty y_n(z), \forall z \in \mathcal{G}$, где $y_n \in \mathcal{E}_n^0$ и ряд сходится (соответственно, абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G})$. Отсюда $\forall z \in \mathcal{G}_1: f(z) = \sum_{n=1}^\infty (My_n)(z)$. Используя $M(z^p e^{\beta z}) = \sum_{s=0}^p C_p^s L^{(p-s)}(\beta) z^s e^{\beta z}$ и непрерывность M как оператора из $H(\mathcal{G})$ в $H(\mathcal{G}_1)$, находим, что $My_n \in \mathcal{E}_n^1$. При этом ряд $\sum_{n=1}^\infty (My_n)(z)$ сходится (соответственно абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G}_1)$.

Заметим, что в случае, когда все множества M_n одноточечны, а $p_\alpha = 1, \forall \alpha$, теорема 4 была получена ранее А. Ф. Леонтьевым (см. [8]).

Рассматривая в качестве \mathcal{G} выпуклые многоугольники, и используя рассуждения, [8, с. 245—246] нетрудно показать, что если отбросить условие дополнимости \mathcal{G}_1 к \mathcal{G} , то теорема 4 в общем случае уже неверна.

§ 7. В [1] было введено понятие представительного подпространства для данной п.с. элементов. Действуя по аналогии, назовем подпространство H_0 пространства $H\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — представительным (или абсолютно представительным) для H , если из того, что любой элемент x из H_0 можно представить в виде ряда (2), сходящегося (абсолютно сходящегося) в H , следует, что $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — п.с. (соответственно, а.п.с.) в H . Представительное подпространство H_0 называется $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — эффективно представительным для H , если из того, что известен эффективный способ определения «координатных» функций y_n для любого элемента x из H_0 следует возможность эффективного их определения для любого элемента x_∞ из всего простран-

ства H . Аналогично определяются $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ -эффективно абсолютно представительные подпространства для H .

Обозначим символом $A_\infty(\mathcal{G})$ пространство всех функций, аналитических в ограниченной области \mathcal{G} и бесконечно-дифференцируемых на множестве $\bar{\mathcal{G}}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть \mathcal{G} — ограниченная выпуклая область и H_n — замкнутые инвариантные относительно дифференцирования подпространства $H(\mathcal{G})$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда $A_\infty(\mathcal{G}) - \{H_n\}$ — эффективно-представительное (и эффективно абсолютно представительное) подпространство для $H(\mathcal{G})$.

Замечание 3. В случае, если H_n — одномерные пространства: $H_n = \{be^{\lambda_n z} : b \in \mathbb{C}\}$, теорема 5 фактически была получена ранее Ю. И. Мельником (см. [2, а также 1, гл. II, § 4]).

ЛЕММА 3. Пусть \mathcal{G} — произвольная область и H_0 — произвольное замкнутое подпространство $H(\mathcal{G})$, инвариантное относительно дифференцирования. Тогда пространство H_0 инвариантно относительно любого оператора M типа свертки с характеристической функцией из класса $[1, 0]$.

Действительно, любой такой оператор M имеет вид

$$(Mg)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^{(k)}(z), \quad g \in H(\mathcal{G}), \quad z \in \mathcal{G},$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \in [1, 0].$$

Тогда M — непрерывный оператор в $H(\mathcal{G})$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится в $H(\mathcal{G})$, $\forall y \in H(\mathcal{G})$. Так как $a_k y^{(k)}(z) \in H_0$, $\forall y \in H_0$, и H_0 — замкнутое подпространство $H(\mathcal{G})$, то $My \in H_0$, $\forall y \in H_0$.

ЛЕММА 4. Пусть \mathcal{G} — ограниченная выпуклая область с опорной функцией $h(-\varphi)$. Для любой функции f из $H(\mathcal{G})$ найдутся функции g из $A_\infty(\mathcal{G})$ и $L(\lambda)$ из $[1, 0]$ такие, что $f(z) = (Mg)(z)$, $\forall z \in \mathcal{G}$, где M — оператор типа свертки с характеристической функцией $L(\lambda)$.

Эта лемма фактически имеется (в неявной форме) в [2]. Для доказательства леммы возьмем а. п. с. экспонент в $H(\mathcal{G})$ $\{e^{mz}\}_{m=1}^\infty$ так, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\tau_k} = 0$ и $\{\tau_m\}_{m=1}^\infty \cap \cap U_{Q,c} = \emptyset$, где множество $U_{Q,c}$ определено в лемме 1.

Тогда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\tau_k z},$$

где

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|\tau_k|} \ln |c_k| + h(\arg \tau_k) \right] \leq 0.$$

Положим $d_k = |c_k| |\tau_k|^{p_k} \exp[h(\arg \tau_k) |\tau_k|]$, где $p_k \uparrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k \ln |\tau_k|}{\tau_k} = 0.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\tau_k|} \ln |d_k| \leq 0.$$

Найдем по лемме 2 функцию $L(\lambda)$ из $[1, 0]$ так, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d_m}{L(\tau_m)} \right| < \infty. \text{ Рассмотрим функцию } f_1(z) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m e^{\tau_m z}}{L(\tau_m)}. \text{ Очевидно, что } f_1 \in A_{\infty}(\mathcal{G}) \text{ и что } \forall z \in \mathcal{G} \\ (Mf_1)(z) = f(z), \text{ где } M \text{ — оператор типа свертки с харак-} \\ \text{теристической функцией } L(\lambda).$$

Доказательство теоремы 5. Пусть f — произвольная функция из $H(\mathcal{G})$. По лемме 4 $\exists g \in A_{\infty}(\mathcal{G})$,

$$\exists My = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in [1, 0]$$

и $(Mg)(z) = f(z)$, $\forall (z) \in \mathcal{G}$. Если $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n \in H_n$ и ряд сходится (абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G})$, то $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)$, где $v_n = Mu_n \in H_n$ и ряд сходится (соответственно, абсолютно сходится) в $H(\mathcal{G})$.

При этом, если мы умеем эффективно определять «координатные функции» u_n для любой g из $A_{\infty}(\mathcal{G})$, то мы сумеем эффективно определить и «координаты» $v_n = Mu_n$ любой функции f из $H(\mathcal{G})$.

В связи с теоремой 5 нам представляется весьма интересным выяснить, будет ли пространство $H(\overline{\mathcal{G}})$ функций, аналитических на $\overline{\mathcal{G}}$, $\{H_n\}$ -представительным подпространством для $H(\mathcal{G})$, где H_n — замкнутое инвариантное относительно дифференцирования подпространство $H(\mathcal{G})$ (\mathcal{G} — ограниченная выпуклая область). Ответ на этот вопрос неизвестен даже в случае, если все H_n одномерны.

Ростовский государственный университет

Поступило
08.06.83

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К о р о б е й н и к Ю. Ф. Представляющие системы.— Успехи мат. наук, 1981, т. 36, вып. 1, с. 73—126.
- [2] М е л ь н и к Ю. И. К вопросу о представлении регулярных функций рядами Дирихле.— Математические заметки, 1977, т. 21, вып. 5, с. 641—652.
- [3] К о р о б е й н и к Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1980, т. 44, № 5, с. 1066—1114.
- [4] Л е о н т ь е в А. Ф. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.
- [5] Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.
- [6] К о р о б е й н и к Ю. Ф. Представляющие системы.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, т. 42, № 2, с. 325—355.
- [7] V a l i r o n G. Sur les solutions des equations differentielles lineares d'ordre infini et a coefficients constants.— Ann. Ec. Norm. Sup., 1929, t. 46, p. 25—53.
- [8] К о р о б е й н и к Ю. Ф., Л е о н т ь е в А. Ф. О свойстве внутри-продолжаемости представляющих систем экспонент.— Математические заметки, 1980, т. 28, вып. 2, с. 243—253.
- [9] К о р о б е й н и к Ю. Ф. Об одном функциональном уравнении.— Математические заметки, 1969, т. 5, вып. 6, с. 733—742.