С. Р. Треиль, Обратная спектральная задача для модуля оператора Ганкеля и сбалансированные реализации,
*Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 2, 158–182

С.Р.Треиль

# ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДУЛЯ ОПЕРАТОРА ГАНКЕЛЯ И СБАЛАНСИРОВАННЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

В работе доказывается, что неотрицательный оператор $W(W\geq 0)$, действующий в гильбертовом пространстве, унитарно эквивалентен эрмитовому квадрату $\Gamma^*\Gamma$ некоторого оператора Ганкеля $\Gamma$ тогда и только тогда, когда оператор $W$ необратим, а его ядро либо тривиально, либо бесконечномерно. Это утверждение полностью решает задачу, сформулированную в [1]. Решение получено методами теории линейных динамических систем.

## § 0. Введение

Классическое, изначальное определение операторов Ганкеля (или ганкелевых операторов) называет этим именем операторы $\Gamma$, действующие в пространстве последовательностей $l^2=l^2(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}\cap[0,\infty)$, матричные элементы которых зависят только от суммы номеров (т.е. постоянны на диагоналях перпендикулярных главной):

$$\Gamma x = \left\{\sum_{j\geq 0} \gamma_{i+j+1}x_j\right\}_{i\geq 0}, \quad x\in l^2(\mathbb{Z}_+); \tag{0.1}$$

здесь $\{\gamma_k\}_{k\geq 1}$ - некоторая последовательность комплексных чисел. Соответствующие матрицы

$$\Gamma = \left\{\gamma_{i+j+1}\right\}_{i,j\geq 0} \tag{0.2}$$

также называют ганкелевыми. Операторы Ганкеля имеют и другие, эквивалентные представления (которые мы обсудим впоследствии чуть подробнее), например, как интегральные операторы на полуоси $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ с ядром, зависящим от суммы аргументов, или как сингулярные интегральные операторы с ядрами вида $\frac{\varphi(x)}{x-z}$, $\operatorname{Im} z<0$. В любом случае эти операторы достаточно хорошо известны в анализе и как предмет, и как средство исследования, но некоторые их свойства и приложения к другим разделам анализа будут описаны ниже, поскольку они тесно связаны с существом решаемой в работе задачи. За большими подробностями читатель может обратиться к монографиям [2,3] и обзору [4].

Формулировка основного результата статьи приведена в аннотации. Переходя к подробностям, начнем с описания места действия, описания самого действия и краткой

Ключевые слова: оператор Ганкеля, пространства Харди, линейная динамическая система, сбалансированная система (реализация), уравнение Ляпунова.

истории вопроса.

**0.1. Пространства Харди.** Пусть $\mathbb{D}$ - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} \overset{\text{def}}{=} \{\xi\in\mathbb{C}: |\xi|<1\}$, $\mathbb{T}$ - его граница, $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ и $m$ - нормированная ($m(\mathbb{T})=1$) мера Лебега на $\mathbb{T}$. Рассмотрим пространство $L^2(\mathbb{T})$ квадратично суммируемых (относительно меры $m$) функций на окружности $T$. Символом $H^2=H^2(\mathbb{D})$ обозначим известное пространство Харди,

$$H^2 = \{f\in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(k) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0\},$$

а символом $H^2$ - его ортогональное дополнение

$$H^2_-=L^2(\mathbb{T})\ominus H^2=\{f\in L^2(\mathbb{T}):\hat{f}(k)=0 \quad \text{при} \quad k\geq 0\};$$

здесь $\hat{f}(k)$ - $k$-ый коэффициент Фурье функции $f$,

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\cdot\bar{\xi}^k dm(\xi).$$

Как известно, для любой функции $f$ из $H^2$ ряд $\sum\limits_{k\geq 0}\hat{f}(k)\xi^k$ сходится в единичном круге $\mathbb{D}$ и можно естественным образом отождествить пространство $H^2$ с соответствующим пространством функций, аналитических в $\mathbb{D}$ (подробности см. в [5]). Аналогично пространство $H^2_-$ отождествляется с пространством функций, аналитических в $\mathbb{D}_-=\mathbb{C}\setminus\operatorname{clos}\mathbb{D}$.

Столь же хорошо известно, что дискретное преобразование Фурье

$$\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \longmapsto \sum c_k z^k \tag{0.3}$$

унитарно отображает пространство двусторонних квадратично суммируемых последовательностей $l^2(\mathbb{Z})$ на $L^2(\mathbb{T})$. При этом подпространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{Z}_+=\mathbb{Z}\cap[0,\infty)$ переходит в $H^2$.

Наряду с пространствами Харди в круге мы будем иметь дело и с аналогичными пространствами в полуплоскости. Пусть $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ - верхняя и нижняя полуплоскости соответственно,

$$\mathbb{C}_\pm = \{\xi\in\mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi \gtrless 0\}.$$

Пространства Харди в полуплоскостях $\mathbb{C}_\pm$ определяются равенствами

$$H^2=H^2(\mathbb{C}_+)=\{f\in L^2:\mathcal{F}f(x)=0 \text{ п.в. при } x < 0\},$$

$$H^2_-=H^2(\mathbb{C}_-)=\{f\in L^2:\mathcal{F}f(x)=0 \text{ п.в. при } x > 0\},$$

где $\mathcal{F}f$ обозначает стандартное преобразование Фурье функции $f$,

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt.$$

Ввиду унитарности в $L^2$ преобразования Фурье $\mathcal{F}$

$$L^2 = H^2\oplus H^2_-,$$

и подпространство $H^2$ (соответственно $H^2_-$) отождествляется при этом с подпространством функций из $L^2$, сосредоточенных на правой (левой) полуоси. Аналогично дискретному случаю, функции из $H^2$, $H^2_-$ также можно продолжить до аналитических в $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ функций.

**0.2. Операторы Ганкеля в пространствах Харди.** Операторы Ганкеля можно реализовать как проекции операторов умножения в пространстве Харди, что иногда оказывается более удобным, чем классическое представление (0.1). Это делается следующим, хорошо известным способом, см. [2,3,4]. Рассмотрим оператор $H_\varphi$

$$H_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2_-(\mathbb{D}),$$

определенный равенством

$$H_\varphi f = P_- \varphi f \ , \tag{0.4}$$

где $P_-$ - ортопроектор в $L^2$ на подпространство $H^2_-$ (буквы $\mathbb{T}$ и $\mathbb{D}$ мы будем для краткости письма опускать), а $\varphi$ - некоторая ограниченная функция на окружности $\mathbb{T}$. Нетрудно заметить, что матрица оператора $H_\varphi$ относительно стандартных ортонормированных базисов $\{z^n\}_{n\geq 0}$ и $\{z^k\}_{k<0}$ в $H^2$ и $H^2_-$ имеет ганкелеву структуру (0.2) с $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, $k=1,2,3,\dots$

Оператор $H_\varphi$ также называют оператором Ганкеля; функция $\varphi$ называется символом этого оператора. Очевидно, что символ определяется по оператору не однозначно, а с точностью до аналитического слагаемого вида $\sum\limits_{k\geq 0} c_k z^k$.

Нетрудно заметить, что если $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, то

$$\|\Gamma\| = \|H_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ - норма в пространстве $L^\infty(\mathbb{T})$. Известная теорема Нехари (см. [2,3]) утверждает, что верно и обратное утверждение - ганкелева матрица вида (0.2) порождает ограниченный оператор в $l^2$ в том и только том случае, когда она является матрицей некоторого оператора $H_\varphi$(т.е. $\gamma_k = \hat{\varphi}(-k)$, $k>0$), причем символ $\varphi$ можно выбрать так, чтобы $\|\Gamma\| = \|\varphi\|_\infty$.

Заметим теперь, что унитарный оператор $\tau$, $\tau f(\xi) = \bar{\xi} f(\bar{\xi})$, переводит стандартный базис $\{z^n\}_{n<0}$ в $H^2_-$ в базис $\{z^n\}_{n\geq 0}$ в $H^2$, и поэтому оператор $\Gamma_\varphi$, $\Gamma_\varphi \overset{\text{def}}{=} \tau \cdot H_\varphi$, действует в пространстве $H^2$, а его матрица относительно стандартного базиса $\{z^n\}_{n\geq 0}$ имеет ганкелеву структуру (0.2). Тем самым оператор $\Gamma_\varphi$ унитарно эквивалентен классическому оператору Ганкеля в $l^2$ (унитарную эквивалентность осуществляет дискретное преобразование Фурье (0.3)), и его можно рассматривать как реализацию последнего в пространстве $H^2$.

Отметим, что операторы $\Gamma_\varphi$ и $H_\varphi$, отличающиеся друг от друга унитарным множителем слева, имеют одинаковые метрические свойства. В частности, совпадают и модули этих операторов (напомним, что модулем оператора $A$ называется неотрицательный оператор $|A| = (A^* A)^{1/2}$). Поэтому нам в этой работе, посвященной задаче об унитарно инвариантном описании возможных модулей ганкелевых операторов, будет безразлично, с какой из этих реализаций работать.

**0.3. Операторы Ганкеля как интегральные операторы на полуоси.** Есть еще одна „модель" для операторов Ганкеля, особенно удобная для решения только что упомянутой задачи. Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ интегральный оператор $\mathcal{J}_h$ с ядром, зависящим от суммы аргументов,

$$(\mathcal{J}_h f)(s) = \int_{\mathbb{R}_+} h(t+s)f(t)dt. \tag{0.5}$$

Такой оператор можно интерпретировать как континуальный аналог классического оператора Ганкеля. Естественный, но долго не замечавшийся специалистами факт состоит в том, что оператор $\mathcal{J}_h$ унитарно эквивалентен одному из рассмотренных выше операторов Ганкеля $\Gamma_\varphi$, а значит, и некоторому классическому ганкелеву оператору. Поэтому оператор $\mathcal{J}_h$ можно рассматривать не только как аналог, но и как реализацию последнего.

Несмотря на простоту сформулированного в предыдущем абзаце утверждения, оно не является столь широко известным, как многие другие факты теории ганкелевых операторов. Поэтому для полноты изложения мы приведем некоторые пояснения. Подобные рассуждения приведены в монографии [2] и восходят к работе А. Девинатца [6], где аналогичным образом устанавливалась унитарная эквивалентность операторов Тёплица и их континуальных аналогов - операторов Винера-Хопфа (этот факт тоже долгое время оставался незамеченным).

Начнем с некоторого оператора $\Gamma_\varphi$, $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$, в пространстве $H^2(\mathbb{D})$. Хорошо известно [2,3], что оператор $\mathcal{U}$ стандартной замены переменной

$$(\mathcal{U}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t+i}\cdot f\left(\frac{t-i}{t+i}\right),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{0.6}$$

унитарно отображает пространство $H^2(\mathbb{D})$ в $H^2(\mathbb{C}_+)$. Далее, нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{U}\,\Gamma_\varphi\mathcal{U}^{-1}$ допускает представление

$$\mathcal{U}\Gamma_\varphi\mathcal{U}^{-1}f = \delta P_-\tilde{\varphi}f,\quad f\in H^2(\mathbb{C}_+), \tag{0.7}$$

где $P_-$ - ортопроектор в $L^2(\mathbb{R})$ на $H^2(\mathbb{C}_-)$, $\tilde{\varphi}(t)=\varphi\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$, а оператор $\delta$ определяется равенством $\delta f(\xi)=f(\bar{\xi})$. Обозначим (временно) оператор вида (0.7) символом $\tilde{\Gamma}_\varphi$:

$$\tilde{\Gamma}_\varphi f=\delta P_-\varphi f,\quad f\in H^2(\mathbb{C}_+),$$

а символом $\tilde{H}_\varphi$ - оператор, действующий из пространства $H^2(\mathbb{C}_+)$ в $H^2(\mathbb{C}_-)$ по формуле

$$\tilde{H}_\varphi f = P_-\varphi f,\quad f\in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Теперь, чтобы проверить, что оператор $\Gamma_\varphi$ унитарно эквивалентен некоторому оператору $\mathcal{J}_h$, достаточно сделать преобразование Фурье $\mathcal{F}$, которое переведет пространство $H^2(\mathbb{C}_+)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом оператор $\tilde{H}_\varphi$ перейдет в проекцию оператора свертки, т.е.

$$(\mathcal{F}\tilde{H}_\varphi\mathcal{F}^{-1}f\ ) = P^-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\mathcal{F}\varphi) * f,\quad f\in L^2(\mathbb{R}_+),$$

где $P^-$ - ортопроектор в $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(\mathbb{R}_-)$, $\mathbb{R}_-=(-\infty,0)$. Другими словами,

$$(\mathcal{F}\tilde{H}_\varphi\mathcal{F}^{-1}f)(s)=\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\mathcal{F}\varphi)(s-t)f(t)dt,\ \ s\in\mathbb{R}_-.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}_\varphi$, $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$ может быть и обобщенной функцией; написанная свертка, однако, имеет смысл (например, в духе теории распределений). Заметим теперь, что

$$(\mathcal{F}\delta\mathcal{F}^{-1}f)(t)=f(-t),\ \ f\in L^2(\mathbb{R}).$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{F}\tilde{\Gamma}_\varphi\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{J}_h$,

$$(\mathcal{J}_hf)(s) = \int_{\mathbb{R}_+} h(s+t)f(t)dt,\quad s\ge 0,$$

где $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}\varphi)(-t)$, $t\ge 0$. Значения $h(t)$ при $t<0$ нам безразличны, и в дальнейшем мы будем считать, что $h(t)\equiv 0$ при $t>0$.

Очевидно, что приведенные рассуждения обратимы, так что операторы $\tilde{\Gamma}_\varphi$ и $\mathcal{J}_h$ унитарно эквивалентны.

**0.4. Постановка задачи и история вопроса.** Отметим сначала два простых свойства операторов Ганкеля. Во-первых, так как

$$\|H_\varphi z^n\|_2= \|P_-\varphi z^n\|_2 = \Big(\sum_{k<-n}|\hat{\varphi}(k)|^2\Big)^{1/2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то оператор Ганкеля $H_\varphi$ (а значит, и $\Gamma_\varphi$) обязательно необратим. Во-вторых, так как

$$H_\varphi f=0 \Longrightarrow H_\varphi zf=0,$$

ядро оператора $H_\varphi$ инвариантно относительно умножения на независимую переменную $z$. По известной теореме Берлинга (см. [3,5]) каждое $z$-инвариантное подпространство пространства $H^2$ (отличное от $\{0\}$) имеет вид $\theta H^2$, где $\theta$ - некоторая внутренняя функция (т.е. такая, что $\theta\in H^\infty \overset{\mathrm{def}}{=} H^2\cap L^\infty$, $|\theta|=1$ п.в. на $\mathbb{T}$). Отсюда, в частности, очевидно, что $\dim\operatorname{Ker} H_\varphi = \infty$, если $\operatorname{Ker} H_\varphi \ne \{0\}$.

Сказанное означает, что следующие простые условия необходимы для того, чтобы неотрицательный оператор $W(W=W^*\ge 0)$ был унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля (напоминаем, что модулем оператора $A$ называется неотрицательный оператор $|A|= =(A^*A)^{1/2}$):

1) *Оператор* $W$ *необратим.*

2) *Либо* $\operatorname{Ker} W=\{0\}$, *либо* $\dim\operatorname{Ker} W = \infty$.

Эти необходимые условия были сформулированы В.В.Пеллером и С.В.Хрущевым в известном сборнике проблем [1], где ими и была поставлена задача об унитарно инвариантном описании возможных модулей операторов Ганкеля. Там же была высказана гипотеза о том, что для компактных операторов условия 1) и 2) являются и достаточными.

Здесь уместно отметить некоторые задачи анализа и других разделов математики, которые по существу сводятся к метрическим характеристиками операторов Ганкеля, т.е. к характеристикам модуля $|H_\varphi|=(H_\varphi^* H_\varphi)^{1/2}$. Отсылая за подробностями к [2,3,4], отметим здесь следующие задачи: разложения в ряды экспонент (гармонических) $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в весовых пространствах $L^2(\mu)$, которые описываются теоремой Хельсона-Сегё, и негармонических $\{e^{i\lambda_n x}\}$ в пространстве $L^2(0,a)$, которые описываются теорией Никольского-Павлова-Хрущева [7]), метрическая классификация стационарных случайных процессов (угол между прошлым процесса и его будущим описывается модулем $|H_\varphi|$ некоторого оператора Ганкеля, см. [1,4]) - наилучшая рациональная аппроксимация (известная теорема Адамяна-Арова-Крейна отождествляет сингулярные числа оператороа Ганкеля $H_\varphi$, т.е. собственные числа модуля $|H_\varphi|$ с наилучшими рациональными приближениями его символа $\varphi$ в метрике пространства BMO).

Исходя из потребностей теории стационарных случайных процессов и теории рациональной аппроксимации в работе [1], и была поставлена названная выше задача.

Эта задача была частично решена автором совместно с В.И.Васюниным для операторов, удовлетворяющих дополнительному условию.

3) *Спектральная мера оператора - чисто точечная,* которому в частности, удовлетворяют компактные операторы. Именно было доказано [8,9,10,11], что для неотрицательного оператора $W$ в сепарабельном гильбертовом пространстве, удовлетворяющего условиям 1)-3), найдется оператор Ганкеля Г, модуль которого унитарно эквивалентен оператору $W$. В [8,9] разбирался случай, когда оператор $W$ имеет простой спектр, в [10,11] - общий случай. В этих работах искомый оператор Ганкеля строится как предел некоторой последовательности ганкелевых операторов конечного ранга. При этом для построения операторов конечного ранга используется либо, как в [8,9], теорема о неявном отображении, либо, как в [10,11], теоретико-функциональные рассуждения, связанные с решением некоторых интерполяционных задач. Полностью решить задачу Пеллера-Хрущева, т.е. избавиться от условия 3), на этом пути, представляющем, возможно, свой интерес, не удается.

Новый, неожиданный поворот темы содержат работы Р.Обера [12,13], в которых предложен оригинальный подход к решению данной задачи, основанный на теории линейных динамических систем и использующий так называемые сбалансированные системы (реализации). В этих работах, однако, также не удалось избавиться от условия 3), и в них доказано даже чуть более слабое, чем [10,11], утверждение. Именно в [13] доказано, что для любого неотрицательного оператора $W$, $\mathrm{Ker}W=\{0\}$, в сепарабельном гильбертовом пространстве с чисто точечной спектральной мерой найдется оператор Ганкеля Г такой, что оператор $|\Gamma|\,|(\mathrm{Ker}\Gamma)^{\perp}$ унитарно эквивалентен $W$; в [12] разбирается более легкий случай, когда оператор $W$ имеет простой спектр. В обеих работах о ядре построенного оператора Ганкеля Г ничего не говорится. Подход Р.Обера представляется тем не менее очень интересным. Во-первых, он устанавливает новые связи теории управления с операторами Ганкеля. Во-вторых, искомый оператор Ганкеля строится сразу в явном виде, без всяких предельных переходов.

В настоящей работе с помощью модификации предложенной Р. Обером конструкции полностью решается задача Пеллера-Хрущева, т. е. показывается, что любой неотрицательный оператор $W$ в сепарабельном гильбертовом пространстве, удовлетворяющий условиям 1) и 2), унитарно эквивалентен модулю некоторого оператора Ганкеля. План этой работы таков.

В § 1 приводятся некоторые необходимые нам сведения об операторах Ганкеля конечного ранга.

В § 2 задача построения Ганкелева оператора с предписанным модулем (с точностью до ядра) сводится к построению так называемой сбалансированной линейной динамической системы.

в § 3 сбалансированные системы характеризуются в терминах, хорошо известных в теории управления уравнений Ляпунова.

В § 4 строится нужная нам сбалансированная система, и тем самым задача Пеллера-Хрущева решается „с точностью до ядра оператора Ганкеля".

В § 5 доказывается критерий нетривиальности ядра построенного оператора Ганкеля.

Все гильбертовы пространства предполагаются в работе сепарабельными, все операторы - ограниченными. Мы будем в дальнейшем работать только с операторами Ганкеля в полуплоскости ($H^2(\mathbb{C}_+)$) и поэтому для краткости письма будем употреблять символы $H_\varphi$ и $\Gamma_\varphi$ вместо $\tilde{H}_\varphi$ и $\tilde{\Gamma}_\varphi$ соответственно.

## § 1. Операторы Ганкеля конечного ранга

Нам потребуется следующее, хорошо известное (см. [2,3]) описание операторов Ганкеля конечного ранга.

1.1. Т е о р е м а К р о н е к е р а. *Оператор Ганкеля $\mathcal{J}_h(H_\varphi)$ имеет конечный ранг в том и только том случае, когда один из возможных символов $\varphi$, а именно символ $\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}h$ (полагаем, что $h(t)=0$ при $t<0$), имеет вид*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} \frac{c_{j,k}}{(z-\lambda_j)^k}, \quad c_{j,k}\in\mathbb{C}, \quad \lambda_j\in\mathbb{C}_+, \quad c_{j,k_j} \neq 0, \tag{1.1}$$

*и, более того, ранг равен числу полюсов функции $\varphi$ с учетом кратностей:*

$$\operatorname{rank} \mathcal{J}_h = \operatorname{rank} H_\varphi = \sum_{j=1}^{n} k_j .$$

**1.2. Ядро оператора Ганкеля конечного ранга** также легко вычисляется. Именно пусть символ $\varphi$ ганкелева оператора $H_\varphi(\Gamma_\varphi)$ имеет вид (1.1). Образуем так называемое произведение Бляшке $B$ с нулями $\lambda_j$ (с учетом кратностей):

$$B = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z-\lambda_j}{z-\bar{\lambda}_j}\right)^{k_j} . \tag{1.2}$$

Тогда

$$\operatorname{Ker} \Gamma_\varphi = \operatorname{Ker} H_\varphi = BH^2.$$

Ортогональное дополнение ядра оператора $H_\varphi$ тоже является хорошо известным в теории классов Харди объектом,

$$(\operatorname{Ker} H_\varphi)^\perp = K_B \overset{\mathrm{def}}{=} H^2 \ominus BH^2.$$

## § 2. Операторы Ганкеля и сбалансированные реализации

Рассмотрим динамическую систему $\{A,B,C\}$ с гильбертовым пространством состояний и одномерными входом и выходом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

здесь $A$ - ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H$ (пространстве состояний системы), операторы $B$ и $C$, $B:\mathbb{C}\to H$, $C:H\to\mathbb{C}$ определены равенствами

$$Bu = ub, \quad Cx = (x,c)$$

($b$ и $c$ - некоторые фиксированные векторы из $H$). Считается, что на вход системы подается управление $u(\cdot)$, а на выходе получаем функцию $y(\cdot)$.

Напомним некоторые определения. Пусть $x(x_0,u,\cdot)$ - решение системы (2.1) (на вход подано управление $u(\cdot)$) с начальными условиями $x(0)=x_0$. Система называется *управляемой* на отрезке $[0,T]$ если множество $\{x(0,u,T) : u\in C[0,T]\}$ плотно в пространстве состояний $H$. В конечномерном случае ($\dim H<\infty$) это множество всегда замкнуто, и в литературе в определении управляемости конечномерных систем требуют обычно, чтобы оно совпадало со всем $H$, что, очевидно, равносильно приведенному выше определению.

Система (2.1) называется *наблюдаемой* на отрезке $[0,T]$, если отображение $\mathcal{O}b: H\to C[0,T]$,

$$\mathcal{O}b x_0 = y(x_0,o,\cdot) \overset{\mathrm{def}}{=} Cx(x_0,o,\cdot),$$

является инъективным. Хорошо известно, что для линейных стационарных систем управляемость (наблюдаемость) на каком-нибудь отрезке $[0,T]$ влечет управляемость (наблюдаемость) на любом другом отрезке, и поэтому для линейных систем говорят обычно просто о наблюдаемости (управляемости).

Напомним также, что система, управляемая и наблюдаемая одновременно, называется *минимальной*.

Хорошо известно, что система (2.1) управляема в том и только том случае, когда вектор $b$ является циклическим вектором оператора системы $A$, т.е. когда линейная оболочка множества $\{A^n b: n\geq 0\}$ плотна в $H$, и наблюдаемой, когда вектор $c$ является циклическим вектором оператора $A^*$. Также хорошо известно, что если интегралы

$$W_c = \int_{\mathbb{R}_+} e^{At}BB^*e^{A^*t}dt, \tag{2.2}$$

$$W_o = \int_{\mathbb{R}_+} e^{A^*t}C^*Ce^{At}dt \tag{2.3}$$

сходятся (например, в слабой операторной топологии), то система будет управляемой (наблюдаемой) в том и только том случае, когда оператор управляемости $W_c$ (соответственно оператор наблюдаемости $W_o$) имеет тривиальное ядро.

Среди всех минимальных динамических систем важную роль играют так называемые сбалансированные системы, или, другими словами, сбалансированные реализации (передаточной функции). Следуя [14], будем называть минимальную динамическую систему *сбалансированной*, если операторы $W_c$ и $W_o$ совпадают (естественно, предполагается, что соответствующие интегралы сходятся в слабой операторной топологии). Отметим, что в самой работе [14] рассматривались лишь конечномерные системы, и в определении сбалансированной системы требовалось, чтобы операторы $W_c$ и $W_o$ не только совпадали, но и имели бы диагональный вид. Поэтому приведенное выше определение можно рассматривать как "инвариантное", бескоординатное обобщение определения из [14].

С рассмотренной выше динамической системой (2.1) можно связать (формальный) оператор Ганкеля $\mathcal{J}_h$ с ядром $h$:

$$h(t) = Ce^{At}B\cdot\mathbf{1} = (e^{At}b,c),$$

определенный сначала на финитных функциях. Этот оператор имеет простой физический смысл. Именно если $y=\mathcal{J}_h u$, то $y(\cdot)$ есть выход (на полуоси $[0,\infty)$) нашей системы, которая при $t=-\infty$ была в состоянии $x=0$ и на вход которой подавалось управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(-t), & t<0, \\ 0, & t\geq 0. \end{cases}$$

Мы говорим, что $\mathcal{J}_h$ – формальный оператор Ганкеля, потому что он, вообще говоря, может быть и не ограниченным в $L^2$. Однако для важных частных случаев оператор $\mathcal{J}_h$ все-таки будет ограниченным. Например, он будет ограниченным для конечномерной асимптотически устойчивой (т.е. такой, что $\|e^{At}x\|\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow\infty$ $\forall x\in H$) динамической системы, так как в этом случае матричная экспонента $e^{At}$, а значит, и ядро $h(t)$ экспоненциально убывают. Другой важный случай дает следующая теорема, которая также иллюстрирует и связь сбалансированных систем с нашей задачей.

**2.1.** Теорема. *Пусть $\{A,B,C\}$ – минимальная сбалансированная система, $W_c=W_0=\Sigma$, и пусть $\mathcal{J}_h$ – связанный с ней оператор Ганкеля. Тогда оператор $\mathcal{J}_h$ ограничен, и, более того, оператор $|\mathcal{J}_h|\big|(\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h)^\perp$ унитарно эквивалентен оператору $\Sigma$.*

Доказательство. Рассмотрим операторы $V_c, V_0 : H\longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$;

$$(V_c x)(t) = B^* e^{A^* t}x, \quad x\in H, \qquad (V_o x)(t) = Ce^{At}x, \quad x\in H.$$

Очевидно, что

$$V_c^* V_c = \int_{\mathbb{R}_+} e^{At}BB^*e^{A^*t}dt = W_c = \Sigma \tag{2.4}$$

и аналогично

$$V_0^* V_0 = W_0 = \Sigma, \tag{2.5}$$

а значит, операторы $V_c$, $V_o$ ограничены. Но, как нетрудно заметить,

$$\mathcal{J}_h = V_o V_c^*,$$

и поэтому оператор $\mathcal{J}_h$ тоже ограничен.

Пусть

$$V_c = U_c \Sigma^{1/2}, \quad V_o = U_o \Sigma^{1/2}$$

- полярные разложения операторов $V_c$ и $V_o$ ($|V_c| = |V_o| = \Sigma^{1/2}$). Так как

$$\operatorname{Ker} V_c = \operatorname{Ker} V_c^* V_c = \operatorname{Ker} W_c = \operatorname{Ker} \Sigma = \{0\}$$

и аналогично

$$\operatorname{Ker} V_o = \{0\},$$

то операторы $U_c$ и $U_0$ изометричны. Поэтому цепочка равенств

$$|\mathcal{J}_h|^2 = V_c V_o^* V_o V_c^* = V_c \Sigma V_c^* = U_c \Sigma^2 U_c^* \qquad (2.6)$$

доказывает второе утверждение теоремы.

**2.2. Замечание о спектральной мере оператора $|\mathcal{J}_h|$.** Как нетрудно заметить, из (2.6) немедленно следует, что

$$|\mathcal{J}_h| = U_c \Sigma U_c^*$$

и что спектральная мера $\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\cdot)$ оператора $|\mathcal{J}_h|$ связана со спектральной мерой $\mathcal{E}^{\Sigma}(\cdot)$ оператора $\Sigma$ следующим соотношением:

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\Delta) = U_c \mathcal{E}^{\Sigma}(\Delta) U_c^* \qquad (2.7)$$

для любого измеримого подмножества $\Delta \subset \mathbb{R}$, не содержащего 0. Отметим, что

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\{0\}) = P_{\operatorname{Ker} U_c^*}.$$

Учитывая (2.7) и полярное разложение оператора $V_c$, легко получить следующее выражение для спектральной меры $\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}$:

$$\mathcal{E}^{|\mathcal{J}_h|}(\Delta) = V_c \varphi_\Delta(\Sigma) V_c^*, \qquad (2.8)$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$, $0 \notin \Delta$, $\varphi_\Delta(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{t}\chi_\Delta(t)$, $\chi_\Delta$ - индикатор множества $\Delta$. Эта формула потребуется нам в дальнейшем.

## § 3. Сбалансированные реализации и уравнения Ляпунова

Как видно из предыдущего параграфа, для того чтобы решить нашу задачу „без учета ядра", т.е. построить оператор Ганкеля $\mathcal{J}_h$ такой, что оператор $|\mathcal{J}_h|\,\big|(\operatorname{Ker} \mathcal{J}_h)^{\perp}$ унитарно эквивалентен заданному оператору $\Sigma$, достаточно построить сбалансированную систему $\{A, B, C\}$, для которой $W_c = W_0 = \Sigma$. Для этого окажется полезной следующая теорема, восходящая еще к работам Ляпунова.

**3.1. Теорема.** *Пусть $A$ - асимптотически устойчивый оператор (т.е. такой, что $\lim_{t\to\infty} \|e^{At}x\| = 0 \ \forall x$) в гильбертовом пространстве $H$, а $C$ - некоторый оператор, действующий из $H$ в некоторое вспомогательное гильбертово пространство $E$. Пусть, кроме того, интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \overset{\mathrm{def}}{=} \Sigma$$

*сходится (в слабой операторной топологии). Тогда оператор $\Sigma$ является единственным решением следующего уравнения Ляпунова:*

$$A^*\Sigma + \Sigma A = -C^*C.$$

Доказательство. Докажем, что $\Sigma$ является решением. Действительно,

$$((A^*\Sigma+\Sigma A)x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} ((A^*e^{A^*t}C^*Ce^{At} + e^{A^*t}C^*Ce^{At}A)x,y)dt = \int_{\mathbb{R}_+}\Big[\frac{d}{dt}(e^{A^*t}C^*Ce^{At}x,y)\Big]dt =$$

$$= (e^{A^*t}C^*Ce^{At}x,y)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to+\infty}(Ce^{At}x,Ce^{At}y)-(C^*Cx,y)=-(C^*Cx,y),$$

так как из-за асимптотической устойчивости оператора $A$ предел равен 0.

Докажем единственность решения. Допустим, что найдется оператор $\Sigma_1$ такой, что

$$A^*\Sigma_1 + \Sigma_1 A = -C^*C,$$

тогда для оператора $\Delta=\Sigma-\Sigma_1$ верно равенство

$$A^*\Delta + \Delta A = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{d}{dt}(\Delta e^{At}x,\ e^{At}y) = (\Delta Ae^{At}x,e^{At}y)+(\Delta e^{At}x,\ Ae^{At}y) = ((A^*\Delta + \Delta A)e^{At}x,\ e^{At}y) \equiv 0.$$

Поэтому

$$(\Delta x,y) = (\Delta e^{At}x,\ e^{At}y)\ \forall t,$$

и так как $\lim_{t\to+\infty}\|e^{At}x\|=0\ \forall x$, то

$$(\Delta x,y) = 0\ \forall x,\ y\in H,$$

т.е. $\Delta=0$. ●

Из этой теоремы видно, что, для того чтобы решить задачу Пеллера-Хрущева „с точностью до ядра", достаточно подобрать по заданному самосопряженному оператору $\Sigma, \Sigma\ge0$, $\operatorname{Ker}\Sigma=\{0\}$, систему $\{A,B,C\}$ с одномерными входом и выходом такую, что

1) *Операторы $A$ и $A^*$ асимптотически устойчивы.*

2) *Оператор $\Sigma$ решает уравнения Ляпунова,*

$$A^*\Sigma + \Sigma A = -C^*C,$$
$$\Sigma A^* + A\Sigma = -BB^*.$$

3) *Интегралы*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{At}BB^*e^{A^*t}dt \overset{\text{def}}{=} W_c,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A^*t}C^*Ce^{At}dt \overset{\text{def}}{=} W_o$$

*сходятся в слабой операторной топологии.*

Тогда в силу теоремы 3.1 $W_c=W_o=\Sigma$, т.е. система $\{A,B,C\}$ будет сбалансированной, и, значит, по теореме 2.1 оператор $|\mathcal{J}_h|\,|(\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h)^\perp$ (где $\mathcal{J}_h$ - ганкелев оператор системы, $h=Ce^{At}B1=(e^{At}b,c)$) унитарно эквивалентен оператору $\Sigma$.

В работах Р. Обера [12, 13] на основе анализа конечномерных систем, проведенного в [15], были предъявлены такие системы для случая, когда оператор $\Sigma$ имеет чисто точечную спектральную меру. Ниже мы обобщим конструкцию Р. Обера и предъявим такую систему в общем случае.

## § 4. Решение задачи Пеллера-Хрущева „с точностью до ядра"

Построим по заданному самосопряженному оператору $\Sigma$, $\Sigma \geq 0$, $\mathrm{Ker}\ \Sigma=\{0\}$, динамическую систему $\{A,B,C\}$, удовлетворяющую условиям 1)-3) из предыдущего параграфа. Для этого рассмотрим спектральное представление оператора $\Sigma$, т.е. реализуем его как оператор умножения на независимую переменную $t$ в прямом (фон Неймановском) интеграле

$$\mathcal{H} = \int_{\sigma(\Sigma)} \oplus\, E(t)d\mu(t),$$

здесь $\mu$ - (скалярная) спектральная мера оператора $\Sigma$. Будем считать, что все пространства $E(t)$ вложены в некоторое пространство $E$ следующим образом: пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - некоторый ортонормированный базис в $E$. Положим

$$E(t) := \mathrm{span}\ (e_k\colon\ 1 \leq k \leq N(t));$$

здесь $N(t)=\dim E(t)$ ($E(t)=E$, если $N(t)=\infty$).

Напомним, что скалярная спектральная мера $\mu$ оператора определена неоднозначно, и мы всегда можем заменить в спектральном представлении меру $\mu$ на взаимно абсолютно непрерывную с ней, домножив ее на неотрицательный вес $w$, $w\neq 0$, $\mu$-п.в. из $L^1(\mu)$.

Определим в $\mathcal{H}$ подпространство $\mathcal{H}_0$, состоящее из векторов $f$ вида

$$f(t) = \varphi(t) \cdot e_1 \in E(t), \quad \varphi \in L^2(\mu).$$

Это подпространство естественным образом отождествляется с пространством $L^2(\mu)$. Определим в $\mathcal{H}_0$ интегральный оператор $A_0$ с ядром $K(s,t)=-1/(s+t)$. При этом мы выберем меру $\mu$ так (домножая, если надо, на подходящий вес $w$), чтобы $K\in L^2(\mu\times\mu)$. Тогда оператор $A_0$ будет оператором Гильберта-Шмидта. Очевидно, также, что оператор $A_0$ самосопряжен. Доопределим оператор $A_0$ нулем на $\mathcal{H}_0^{\perp}$.

Возьмем векторы $b$, $c\in\mathcal{H}$

$$b(t) = c(t) = e_1 \in E(t) \quad \forall t,$$

и определим операторы $B, C$, $B\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{H}$, $C\colon \mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$,

$$Bu = ub, \quad u\in\mathbb{C},$$

$$Cx = (x,c), \quad x\in\mathcal{H}.$$

(Отметим, что $B^*=C$).

Прямым вычислением проверяется, что

$$A_0^*\Sigma + \Sigma A_0 = -C^*C, \tag{4.1}$$

$$A_0\Sigma + \Sigma A_0^* = -BB^* \tag{4.2}$$

(напомним, что $A_0=A_0^*$, $BB^*=C^*C$, т.е. оба уравнения Ляпунова совпадают). К сожалению, ядро оператора $A_0$ (равное $\mathcal{H}_0^{\perp}$) нетривиально, если оператор $\Sigma$ имеет кратный спектр и, значит, оператор $A_0$ не будет в этом случае асимптотически устойчивым. Поэтому в этом случае надо добавить к $A_0$ некоторую добавку $D$, которая не испортит соотношений (4.1), (4.2) и, уничтожив ядро, сделает оператор $A=A_0+D$ (а также $A^*$) асимптотически устойчивым.

Выберем наборы строго положительных чисел $\{a_k^{(n)}\}_{k=1}^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}\cup\infty$, так, чтобы

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{(n)})^2 < \frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(\infty)})^2 < \infty, \end{aligned} \tag{4.3}$$

и определим оператор $D$ в прямом интеграле как оператор умножения на оператор-функцию $D(\cdot)$, где оператор $D(t)$ имеет в базисе $\{e_k\}_{k=1}^{N(t)}$ вид

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(n)} & 0 & a_2^{(n)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

здесь $n = n(t) = \dim E(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \infty$. Очевидно, что $D^*=-D$, оператор $D$ коммутирует с $\Sigma$ и, значит,

$$D^*\Sigma + \Sigma D = \mathbf{0},$$
$$\Sigma D^* + D\Sigma = \mathbf{0}.$$

Поэтому в силу (4.1), (4.2) для оператора $A=A_0+D$ верны соотношения

$$A^*\Sigma + \Sigma A = -C^*C, \tag{4.4}$$
$$\Sigma A^* + A\Sigma = -BB^*. \tag{4.5}$$

Для доказательства асимптотической устойчивости операторов $A$ и $A^*$, воспользуемся следующим результатом.

**4.1. Теорема** (Arendt, Batty, [16]). *Пусть $e^{At}$ – сильно непрерывная $C_0$-полугруппа сжатий в рефлексивном банаховом пространстве такая, что*

(i) *спектр $\sigma(A)$ ее генератора $A$ лежит в левой полуплоскости* $\mathrm{Re}\lambda\le 0$;

(ii) *оператор $A$ не имеет собственных чисел на мнимой оси* $i\mathbb{R}$;

(iii) *множество $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно. Тогда полугруппа $e^{At}$ асимптотически устойчива, т.е.*

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{At}x\| = 0 \quad \forall x.$$

**4.2. Проверка асимптотической устойчивости операторов $A$ и $A^*$.** Покажем прежде всего, что оператор $A$ не имеет собственных чисел в открытой правой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$. Пусть

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad x\in\mathcal{H}.$$

Тогда

$$-(C^*Cx,x) = (A^*\Sigma x,x) + (\Sigma Ax,x) = (\Sigma x,\ Ax) + (Ax,\ \Sigma x) =$$
$$= 2\mathrm{Re}(Ax,\ \Sigma x) = 2\cdot(\mathrm{Re}\lambda)(x,\Sigma x),$$

откуда следует, что

$$\mathrm{Re}\lambda = \frac{-(C^*Cx,x)}{2(\Sigma x,x)} \le 0. \qquad (4.6)$$

Аналогично проверяется и отсутствие собственных чисел в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$ у оператора $A^*$.

Отметим, что из приведенных выше рассуждений следует отсутствие собственных чисел в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$ и у оператора $A_0$, например, потому что $A_0$ является частным случаем ($\dim E(t)\equiv 1$) оператора $A$. Но оператор $A_0$ есть самосопряженный оператор Гильберта-Шмидта, и, значит, $\sigma(A_0)\subset(-\infty,0]$, т.е. $A_0\le\mathbf{0}$. Поэтому

$$2\mathrm{Re}A = A + A^* = 2A_0 \le \mathbf{0},$$

и, следовательно, полугруппа $e^{At}$ будет полугруппой сжатий.

Покажем теперь, что оператор $A$ не имеет собственных чисел на мнимой оси. Допустим противное:

$$Ax = i\omega x, \quad x\in\mathcal{H}, \quad \omega\in\mathbb{R}.$$

Тогда из (4.6) следует, что

$$0 = Re(iw) = \frac{-(C^*Cx,x)}{2(\Sigma x,x)},$$

а значит, $Cx=\mathbf{0}$, т.е. $x\perp c$. Аналогично если

$$A^*\tilde{x} = i\tilde{\omega}\tilde{x}, \quad \tilde{x}\in\mathcal{H}, \quad \tilde{\omega}\in\mathbb{R},$$

то $B^*\tilde{x}=\mathbf{0}$, т.е. $x\perp b$.

Применяя равенство

$$A\,\Sigma + \Sigma A = -C^*C$$

к собственному вектору $x$ и учитывая, что $Cx=\mathbf{0}$, имеем

$$A^*\Sigma x = -i\omega\Sigma x,$$

т.е. $\Sigma x$ - собственный вектор оператора $A^*$. Применяя теперь равенство

$$A\Sigma + \Sigma A^* = -BB^*$$

к этому собственному вектору и учитывая, что $B^*\Sigma x=0$, получаем

$$A\Sigma^2 x = i\omega\Sigma^2 x.$$

Отсюда следует, что если $x$ - собственный вектор оператора $A$, соответствующий собственному числу $i\omega$, то для любой измеримой и ограниченной функции $\varphi$ вектор $\varphi(\Sigma)x$ тоже будет собственным вектором, соответствующим этому числу. В частности, собственным вектором будет при любом измеримом $\Delta\subset\mathbb{R}$ и вектор $\mathcal{E}^{\Sigma}(\Delta)x$ (напоминаем, что $\mathcal{E}^{\Sigma}(\cdot)$ - спектральная мера оператора $\Sigma$).

Пусть $x(\cdot)$ - представление собственного вектора $x$ в прямом интеграле $\mathcal{H}$:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} x_k(t)e_k, \quad N(t) = \dim E(t).$$

Так как $\mathcal{E}^{\Sigma}(\Delta)x$ при любом измеримом $\Delta\subset\mathbb{R}$ тоже будет собственным вектором, соответствующим собственному числу $i\omega$, а все такие векторы, как было показано выше, должны быть ортогональны вектору $c$, то

$$\int_{\Delta} x_1(t)d\mu(t) = 0 \qquad \forall\Delta\subset\mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что $x_1(t)=0$ $\mu$-п. в., т. е. что $x\perp\mathcal{H}_0$, и, значит, действие на этот вектор оператора $A$ сведется к действию добавочного оператора $D$. Поэтому

$$Dx = i\omega x$$

или, расписывая подробнее

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(n)} & 0 & a_2^{(n)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(n)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\forall t\in\sigma(\Sigma),\ n=N(t) = \dim E(t).$$

Произведя умножение, имеем

$$\begin{pmatrix} a_1^{(n)}x_2(t) \\ a_2^{(n)}x_3(t) \\ -a_2^{(n)}x_2(t)+a_3^{(n)}x_4(t) \\ \vdots \\ -a_{n-2}^{(n)}\, x_{n-2}(t)+a_{n-1}^{(n)}x_n(t) \\ -a_{n-1}^{(n)}\, x_{n-1}(t) \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Проводя сверху вниз покомпонентное сравнение векторов, легко сделать вывод, что $x_k(t)=0$ $\forall k$, т. е. что $x=0$.

Итак, мы показали, что $e^{At}$ есть полугруппа сжатий и, значит, спектр ее генератора $A$ лежит в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda\le 0$. Мы также показали, что оператор $A$ не имеет собственных чисел на мнимой оси. Чтобы применить теорему 4.1 и доказать асимптотическую устойчивость оператора $A$, достаточно показать, что множество $\sigma(a)\cap i\mathbb{R}$ не более чем счетно.

Для этого рассмотрим сначала спектр оператора $D$. Так как оператор $D$ (и операторы $D(t)$) кососимметричны, $D^*=-D$, т. е. оператор $iD$ (операторы $iD(t)$) самосопряжен, то

$$\sigma(D) \subset \operatorname{clos} \bigcup_{t\in\sigma(\Sigma)} \sigma(D(t)).$$

Отметим, что $\sigma(D)\subset i\mathbb{R}$.

Оператор-функция $D(\cdot)$ принимает не более чем счетное число значений $D_n$, $n\in\mathbb{N}\cup\infty$,

$$D_n=D(t) \quad \text{при} \quad n=\dim E(t),$$

и поэтому

$$\sigma(D) \subset \operatorname{clos} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} \sigma(D_n).$$

Из оценок (4.3) следует, что $D_\infty$ - оператор Гильберта-Шмидта и, значит, $\sigma(D_\infty)$ - счетное множество чисто мнимых чисел, сгущающееся к 0. Операторы же $D_n$ - операторы конечного ранга. Из оценок (4.3) также следует, что $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\neq\infty} \|D_n\|=0$, и поэтому множество $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(D_n)$ не более чем счетно и имеет единственную точку сгущения - точку 0. Поэтому

$$\operatorname{clos} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} \sigma(D_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} \sigma(D_n),$$

и, значит, множество $\sigma(D)$ не более чем счетно.

Покажем теперь, что

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma(D).$$

Действительно, пусть $i\omega\notin\sigma(D)$. Тогда оператор $D-i\omega I$ обратим, а оператор $A-i\omega I$ есть компактное возмущение последнего. Поэтому этот оператор есть Фредгольмов оператор индекса 0, и, значит, он может быть необратимым в том и только том случае, когда $\operatorname{Ker}(A-i\omega I)\neq\{0\}$. Но это означает, что $i\omega$ - собственное число оператора $A$, чего, как мы показали выше, быть не может.

Итак, мы доказали, что оператор $A$ асимптотически устойчив. Асимптотическая устойчивость оператора $A^*$ проверяется аналогично.

Чтобы завершить построение, нам осталось показать, что интегралы, определяющие $W_c$ и $W_o$, сходятся. Для этого мы воспользуемся следующей конструкцией.

**4.3. Аппроксимация операторами конечного ранга.** Рассмотрим последовательность разбиений $\tau_n$ отрезка $(0, \|\Sigma\|)$:

$$\tau_n=\{(t_2^{(n)}, t_1^{(n)}],\ (t_3^{(n)}, t_2^{(n)}], \dots, (t_{k_n}^{(n)},\ t_{k_n-1}^{(n)}],\ (0, t_{k_n}^{(n)}]\},$$

$$\|\Sigma\| = t_1^{(n)}>t_2^{(n)}> \dots > t_{k_n}^{(n)} >0,$$

такую, что каждый отрезок разбиения $\tau_{n+1}$ содержится в некотором отрезке разбиения $\tau_n$, причем ранг разбиения $\tau_n$ (т.е. длина максимального отрезка разбиения) стремится к 0 при $n\to\infty$.

Пусть $\mu_n$ - мера, сосредоточенная в точках $t_k^{(n)}$ разбиения $\tau_n$,

$$\mu_n(\{t_k^{(n)}\}) = \mu((t_{k+1}^{(n)},\ t_k^{(n)}]).$$

Очевидно, что последовательность мер $\mu_n$ слабо сходится к мере $\mu$ (напомним, что $\mu(\{0\})=0$, так как $\operatorname{Ker}\Sigma=\{0\}$).

Рассмотрим последовательность функций $N_n(\cdot)$ с натуральными значениями такую, что каждая функция $N_n(\cdot)$ постоянна на отрезках разбиения $\tau_n$ и $\lim_n N_n(t) = N(t) = \dim E(t)$ $\mu$-п.в. Рассмотрим прямые интегралы

$$\mathcal{H}^{(n)} = \int_0^{\|\Sigma\|} \oplus E^{(n)}(t)d\mu_n(t), \ \dim E^{(n)}(t_k^{(n)}) = N_n(t_k^{(n)}).$$

Все пространства $E^{(n)}(t)$ полагаются, как и в начале этого параграфа, вложенными в пространство $E$ с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$E^{(n)}(t_k^{(n)}) = \mathrm{span}\ (e_j : 1 \le j \le N_n(t_k^{(n)})).$$

Определим в $\mathcal{H}^{(n)}$ подпространство $\mathcal{H}_0^{(n)}$, состоящее из векторов $f$, имеющих представление $f(\cdot)$:

$$f(t) = \varphi(t)\cdot e_1, \quad \varphi \in L^2(\mu_n).$$

Это подпространство естественным образом отождествляется с $L^2(\mu_n)$; определим в нем оператор $A_0^{(n)}$ - интегральный оператор с ядром $K(s,t) = -1/(s+t)$ - и доопределим этот оператор нулем до оператора на всем $\mathcal{H}^{(n)}$.

Определим также операторы $D^{(n)}$ в $\mathcal{H}^{(n)}$ как операторы умножения в $\mathcal{H}^{(n)}$ на оператор-функцию $D^{(n)}$:

$$D^{(n)}(t_k^{(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(m)} & 0 & a_2^{(m)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1}^{(m)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{m-1}^{(m)} & 0 \end{pmatrix}$$

где $m = N_n(t_k^{(n)})$, и положим $A_n = A_0^{(n)} + D^{(n)}$.

Определим векторы $b_n = c_n \in \mathcal{H}^{(n)}$, имеющие в $\mathcal{H}^{(n)}$ представление

$$b_n(t) = c_n(t) = e_1 \ \forall t,$$

и операторы $B_n : \mathbb{C} \to \mathcal{H}^{(n)}$, $C_n : \mathcal{H}^{(n)} \to \mathbb{C}$,

$$B_n u = u b_n, \quad C_n x = (x, c_n).$$

Нетрудно показать, что операторы $A_n$ и $A_n^*$ асимптотически устойчивы (поскольку операторы $A_n$ имеют конечный ранг, то для доказательства их асимптотической устойчивости не надо пользоваться теоремой 4.1, достаточно воспользоваться отсутствием собственных чисел в правой полуплоскости, которое уже было доказано выше в п.4.2).

Так как $A_n$, $A_n^*$ - асимптотически устойчивые операторы конечного ранга, то матричные экспоненты $e^{A_n t}$, $e^{A_n^* t}$ экспоненциально убывают (по норме) при $t \to +\infty$, и, значит, интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A_n t} B_n B_n^* e^{A_n^* t} dt = W_c^{(n)},$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{A_n^* t} C_n^* C_n e^{A_n t} dt = W_o^{(n)}$$

сходятся. Поэтому по теореме 2.1 оператор Ганкеля конечного ранга $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_{h_n}$ с ядром $h_n$

$$h_n(t) = (e^{A_n t} b_n,\ c_n)$$

ограничен, и, более того, оператор

$$|\mathcal{J}_n| \Big| (\mathrm{Ker}\ \mathcal{J}_n)^{\perp}$$

унитарно эквивалентен $\Sigma_n$ - оператору умножения на независимую переменную $t$ в $\mathcal{H}^{(n)}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\|\mathcal{J}_n\| = \|\Sigma_n\| = \|\Sigma\| \quad \forall n.$$

Интуитивно ясно, что системы $\{A_n, B_n, C_n\}$ аппроксимируют исходную систему $\{A, B, C\}$ и соответственно операторы $\mathcal{J}_n$ аппроксимируют оператор $\mathcal{J}_h$. Сформулируем соответствующие утверждения строго.

Рассмотрим пространство $L^2(\mu, E)$ - пространство суммируемых с квадратом (по мере $\mu$) $E$-значных функций и будем считать, что прямой интеграл $\mathcal{H}$ естественным образом вложен в $L^2(\mu, E)$ (поскольку $E(t) \subset E$ $\forall t$). Определим для каждого $n$ оператор $Q_n : L^2(\mu, E) \longrightarrow \mathcal{H}^{(n)}$ как композицию оператора усреднения и проекции

$$(Q_n f)(t_k^{(n)}) = P_{E^{(n)}(t_k^{(n)})} \left( \frac{1}{\mu((t_{k+1}^{(n)}), t_k^{(n)}])} \int_{(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)}]} f(s) d\mu(s) \right).$$

Сопряженный оператор $Q_n^*$ сопоставляет каждой (вектор-) функции $f$, заданной на решетке $t_k^{(n)}$, постоянную на отрезках разбиения $\tau_n$ функцию $\tilde{f}$, полагая на отрезке $(t_{k+1}^{(n)},\ t_k^{(n)}]$

$$\tilde{f} \equiv f(t_k^{(n)}).$$

Очевидно, что оператор $Q_n^*$ изометричен.

Нетрудно показать, что последовательность операторов $Q_n^* A_n Q_n$ сильно сходится к оператору $A$ (рассматриваемому как оператор на всем $L^2(\mu, E)$). Действительно, покажем сначала, что

$$\lim_n Q_n^* D^{(n)} Q_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E).$$

Оператор $Q_n^* D^{(n)} Q_n$ можно представить в виде

$$Q_n^* D^{(n)} Q_n = \tilde{D}_n P_n,$$

где $P_n$ - оператор усреднения,

$$(P_n f)(t) = \frac{1}{\mu((t_{k+1}^{(n)}), t_k^{(n)}])} \int_{(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)}]} f(s) d\mu(s), \quad t \in (t_{k+1}^{(n)}), t_k^{(n)}],$$

а $\tilde{D}$ - оператор умножения на оператор-функцию $\tilde{D}_n(\cdot)$,

$$\tilde{D}_n(t) \equiv D^{(n)}(t_k^{(n)})$$

на отрезке $(t_{k+1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$. Но

$$\lim_n P_n x = x,\ \lim_n \tilde{D}_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E),$$

и поэтому

$$\lim_n Q_n^* D^{(n)} Q_n x = Dx \quad \forall x \in L^2(\mu, E).$$

Сходимость же

$$Q_n^* A_0^{(n)} Q_n x \longrightarrow A_0 x \qquad \forall x \in L^2(\mu, E)$$

следует из сходимости на плотном множестве непрерывных функций, равных 0 в некоторой окрестности точки 0, и равномерной ограниченности операторов $A_0^{(n)}$; последняя следует из очевидных неравенств

$$\|A_0^{(n)}\|_{\mathfrak{S}_2} \le \|A_0\|_{\mathfrak{S}_2};$$

$\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_2}$ означает норму Гильберта-Шмидта; здесь мы использовали тот факт, что мера $\mu$ сосредоточена на правых концах интервалов разбиения $\tau_n$.

Положим $\tilde{A}_n = Q_n^* A_n Q_n$, $\tilde{B}_n = Q_n^* B_n$, $\tilde{C}_n = C_n Q_n$. Очевидно, что оператор Ганкеля системы $\{\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n\}$ совпадает с оператором Ганкеля системы $\{A_n, B_n, C_n\}$, т.е. с $\mathcal{J}_n$. Очевидно также, что

$$\lim_n \tilde{B}_n x = Bx,\quad \lim_n \tilde{C}_n x = Cx \quad \forall x.$$

Так как $s\text{-}\lim_n \tilde{A}_n = A$ и $s\text{-}\lim \tilde{A}_n^* = A^*$, то для всякого вектора $x \in L^2(\mu, E)$

$$e^{\tilde{A}_n t} x \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e^{At} x,$$

$$e^{\tilde{A}_n^* t} x \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e^{A^* t} x$$

равномерно на компактных подмножествах полуоси $\mathbb{R}_+$. Поэтому для операторов $V_c^n$, $V_0^n : L^2(\mu, E) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(V_c^{(n)} x)(t) = \tilde{B}_n^* e^{\tilde{A}_n^* t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(V_o^{(n)} x)(t) = \tilde{C}_n e^{\tilde{A}_n t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и операторов $V_c, V_o : L^2(\mu, E) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(V_c x)(t) = B^* e^{A^* t} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(V_o x)(t) = C e^{At} x, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

следующие соотношения

$$\lim_{n\to\infty} (V_c^{(n)} x, f) = (V_c x, f),$$

$$\lim_{n\to\infty} (V_o^{(n)}x, f) = (V_o x, f)$$

верны для любого $x\in L^2(\mu,E)$ и любой финитной функции $f\in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Отметим, что

$$\| V_o^{(n)}\| = \| V_c^{(n)}\| = \| \, |\mathcal{J}_n|^{1/2} \| = \| \Sigma_n^{1/2}\| = \| \Sigma\|^{1/2},$$

и поэтому операторы $V_o^{(n)}$, $V_c^{(n)}$ равномерно ограничены. Следовательно, по теореме об $\varepsilon/3$

$$V_c^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} V_c, \qquad V_o^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} V_o$$

в слабой операторной топологии, и

$$\| V_c\| \le \| \Sigma\|^{1/2}, \quad \| V_o\| \le \| \Sigma\|^{1/2},$$

откуда и следует сходимость интегралов, определяющих $W_c$ и $W_o$.

Итак, мы показали, что система $\{A,B,C\}$ удовлетворяет условиям 1)-3) из § 3, и, значит, задача Пеллера-Хрущева решена „с точностью до ядра".

## § 5. О ядре построенного оператора Ганкеля

Следующая теорема отвечает на вопрос, когда построенный выше в § 4 оператор Ганкеля $\mathcal{J}_h$ имеет тривиальное ядро.

**5.1. Теорема.** *Пусть* $\Sigma$ *– необратимый неотрицательный оператор,* $\operatorname{Ker}\Sigma=\{0\}$, *и* $\mathcal{J}_h$ *– построенный выше в § 4 оператор Ганкеля такой, что оператор* $|\mathcal{J}_h|\,|(\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h)^{\perp}$ *унитарно эквивалентен* $\Sigma$.

*Тогда, если спектральная мера* $\mu$ *оператора* $\Sigma$ *выбрана так, чтобы* $\int \frac{1}{s}d\mu(s)<\infty$, *то построенный оператор Ганкеля* $\mathcal{J}_h$ *имеет нетривиальное ядро*; *в противном случае* $\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h=\{0\}$.

Эта теорема полностью решает вопрос о ядре, а значит, и задачу Пеллера-Хрущева, если заметить, что в случае, когда оператор $\Sigma$ необратим (а значит, 0 - точка сгущения $\sigma(\Sigma)$) можно выбрать спектральную меру $\mu$ (домножая на подходящий неисчезающий вес $w$) так, чтобы выполнялось любое из условий $\int \frac{1}{s}d\mu(s)<\infty$, или $\int \frac{1}{s}d\mu(s)=\infty$, (с сохранением условия $\iint 1/(s+t)^2 d\mu(s)d\mu(t)<\infty$).

Доказательство последнего утверждения предоставляется читателю в качестве простого упражнения.

**5.2. Необходимость условия $\int \frac{1}{s}d\mu(s)<\infty$ для нетривиальности ядра.** Пусть $\mathcal{J}_h$ - построенный выше в § 4 оператор Ганкеля, и пусть $\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h\ne\{0\}$. Так как $\mathcal{J}_h=V_oV_c^*$ и $\operatorname{Ker} V_c=\{0\}$, $\operatorname{Ker} V=\{0\}$, то

$$\operatorname{Ker}\mathcal{J}_h = \operatorname{Ker} V_c^* = (\operatorname{Range} V_c)^{\perp}.$$

Обозначим $\{\Phi(s)\}_{s\ge0}$ полугруппу обратных сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ $(\Phi(s)f)(t) = f(t+s)$, $t,s\ge0$, и пусть $\Psi(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(s)\,|\,(\operatorname{Ker} V_c^*)^{\perp}$ (подпространство $(\operatorname{Ker} V_c^*)^{\perp}$ инвариантно относительно полугруппы $\{\Phi(s)\}_{s\ge0}$). Нетрудно заметить, что

$$V_c e^{A^* t} = \Phi(t)\ V_c,$$

и поэтому

$$V_c e^{A^* t} = \Psi(t)\ V_c. \tag{5.1}$$

Пусть $B$ - генератор полугруппы $\Psi(t)$, $\Psi(t)=e^{Bt}, t\geq 0$. Ниже, в п.5.3, мы покажем, что в нашем случае $B$ - ограниченный оператор. Поэтому из соотношений (5.1) следует, что

$$V_c A^* = BV_c,$$

или, что равносильно

$$B = V_c A^* V_c^{-1}$$

(оператор $V_c A^* V_c^{-1}$ определен на плотном в $(\mathrm{Ker}\ V_c^*)^{\perp}$ множестве и продолжается по непрерывности до ограниченного оператора). Обозначим

$$K = B + B^* = V_c A^* V_c^{-1} + V_c^{-1*} A\ V_c^*\ .$$

Домножая это равенство справа на $V_c$ и слева на $V_c^*$ и вспоминая, что $V_c^* V_c = \Sigma$, имеем

$$V_c^* K\ V_c = \Sigma\ A^* + A\ \Sigma.$$

Но, с другой стороны, по построению оператора $A$

$$\Sigma\ A^* + A\ \Sigma = -BB^* = -\ (\cdot,\ b)\ b$$

и, значит, $V_c^*\ KV_c = -BB^*$. Но это выполнено только в том случае, когда $b = V_c^* f$, т.е. $b \in \mathrm{Range}\ V_c^*$, или, что равносильно, $b \in \mathrm{Range}|V_c|=\mathrm{Range}\ \Sigma^{1/2}$. Последнее же условие и равносильно оценке $\int \frac{1}{s}\ d\mu(s)<\infty$.

**5.3. Проверка ограниченности оператора** $B$. Чтобы показать, что генератор $B$ полугруппы сжатий $\{\Psi(s)\}_{s\geq 0}$ есть ограниченный оператор, отобразим с помощью обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}$ пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$ на $H^2$. При этом полугруппы $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ перейдут соответственно в полугруппы $\hat\Phi(s)=\mathcal{F}^{-1}\Phi(s)\mathcal{F}$ и $\Psi(s)=\mathcal{F}^{-1}\Psi(s)\mathcal{F}$,

$$\hat\Phi(s)\ f = P_{H^2}\ (e_s\cdot\ f),\ e_s(t) = e^{-ist},$$

$$\hat\Psi\ (s) = \Phi(s)\ |\ K, \qquad K = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{Ker}\ V_c^*)^{\perp}).$$

Очевидно, что подпространство $K$ есть инвариантное подпространство полугруппы $\hat\Phi(s)$, и поэтому $K$ имеет вид $K=K_\Theta \overset{\mathrm{def}}{=} H^2-\ \Theta H^2$, где $\Theta$ - некоторая внутренняя ($|\Theta|=1$ п.в. на $\mathbb{R}$) функция из $H^\infty(\mathbb{C}_+)=\{f\in L^\infty\mathbb{R}):\mathcal{F}f(s)=0, s<0\}$.

Хорошо известно [5], что каждая внутренняя функция $\Theta\in H^\infty(\mathbb{D})=H^2(\mathbb{D})\cap L^\infty(\mathbb{T})$ допускает представление

$$\Theta = \alpha\ \cdot\ B\ \cdot\ S, \tag{5.2}$$

где $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$; $B$ - произведение Бляшке,

$$B = \prod_{\lambda\in\sigma_1} b_\lambda^{k(\lambda)},\ \sigma_1 \subset \mathbb{C}_+,\ b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda}\cdot\frac{\lambda-z}{1-\lambda z}\ , \tag{5.3}$$

а $S$ - сингулярная часть функции $\Theta$,

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi+z}{\xi-z}\ d\mu(\xi)\right). \tag{5.4}$$

Здесь $\sigma_1 \subset \mathbb{D}$ - множество нулей функции $\Theta$; $k(\lambda)$ - кратность нуля $\lambda$, а $\mu$ - некоторая сингулярная (относительно меры Лебега на $\mathbb{T}$) мера. Множество $\operatorname{clos} \sigma_1 \cup \operatorname{supp} \mu$ (имеется в виду замкнутый носитель меры $\mu$) мы будем называть спектром функции $\Theta$ и обозначать $\sigma(\Theta)$. Внутренняя функция $\Theta$ из $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ также допускает представление

$$\Theta = \tilde{\Theta} \circ \omega^{-1}, \tag{5.5}$$

где $\tilde{\Theta}$ - некоторая внутренняя функция из $H^\infty(\mathbb{D})$, а $\omega$ - стандартная конформная пересадка единичного круга $\mathbb{D}$ в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$,

$$\omega(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}\,.$$

Множество $\omega(\sigma(\tilde{\Theta}))\subset \operatorname{clos} \mathbb{C}_+ \cup \infty$ также будем обозначать $\sigma(\Theta)$.

Выберем вектор $x\in\mathcal{H}$. Посчитаем $\mathcal{F}^{-1}V_c x$ :

$$(\mathcal{F}^{-1}V_c x)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+} B^* e^{A^* t}x \cdot e^{ist}dt=((A^*+isI)^{-1}x,b),\quad -is\notin\sigma(A^+).$$

Следовательно, функция $f=\mathcal{F}^{-1}V_c x$ аналитична вне ограниченного множества $i\sigma(A^*)$. Так как $\operatorname{clos}\{\mathcal{F}^{-1}V_c x: x\in\mathcal{H}\}=K=K_\Theta = H^2\ominus \Theta H^2$, то

$$\mathcal{F}^{-1}V_c\, x \,/\, \Theta \in H^2(\mathbb{C}_-) \qquad \forall\, x\in\mathcal{H},$$

и любая другая внутренняя функция с таким свойством должна делиться на $\Theta$. Отсюда и из представления (5.2)-(5.5) легко сделать вывод, что $\sigma(\Theta)\subset \overline{i\sigma(A^*)}$, т.е. что $\sigma(\Theta)$ - ограниченное множество. Пусть $\omega, \omega(z)=i\frac{1+z}{1-z}$ - стандартное комформное отображение круга в верхнюю полуплоскость и $\Theta=\Theta \circ \omega$ - внутренняя функция в $H^\infty(\mathbb{D})$. Отметим, что из ограниченности $\sigma(\Theta)$ следует, что $1\notin\sigma(\tilde{\Theta})$.

Пусть $\hat{B}$ - генератор полугруппы $\{\hat{\Psi}(s)\}_{s\ge0}$. Чтобы доказать ограниченность генератора $B$ достаточно проверить ограниченность $\hat{B}$. Для этого рассмотрим оператор $T=(\hat{B}+I)(\hat{B}-I)^{-1}$, так называемый когенератор полугруппы $\{\hat{\Psi}(s)\}_{s\ge0}$. Хорошо известно, см. [17], что когенератор $T$ полугруппы обратных сдвигов $\hat{\Psi}(s), \hat{\psi}(s)=\hat{\Psi}(s)|K_\Theta$ унитарно эквивалентен сужению обратного сдвига $S^*$

$$S^* f = (f-f(0))/z, \qquad f\in H^2(\mathbb{D})$$

на подпространство $K_{\tilde{\Theta}} = H^2 \ominus \tilde{\Theta}H^2$, где $\tilde{\Theta}=\Theta\circ\omega$. Последний оператор хорошо изучен. В частности, известно, что его спектр совпадает с множеством $\overline{\sigma(\tilde{\Theta})}$ (черта означает комплексное сопряжение). Так как $1\notin\sigma(\tilde{\Theta})$, то $1\notin\sigma(T)$. С другой стороны, $\hat{B} = (T+I)(T-I)^{-1}$ и, следовательно, оператор $\hat{B}$ (а значит, и $B$) ограничен. ●

Чтобы доказать достаточность условия $\int \frac{1}{s}\, d\mu(s)<\infty$ для нетривиальности ядра оператора $\mathcal{J}_h$, мы воспользуемся приведенной выше, в п. 4.3, аппроксимацией оператора $\mathcal{J}_h$ операторами конечного ранга $\mathcal{J}_n$. Нам потребуется следующее

О п р е д е л е н и е. *Подпространство $E$ банахова пространства $X$ называется нижним пределом последовательности подпространств $E_n$ (пишем $E=\underline{\lim}_n\, E_n$), если*

$$E = \{x \in X\colon \lim_n \operatorname{dist}(X, E_n) = 0\}.$$

**5.4. Лемма.** *Пусть последовательность операторов $V_n$ сильно сходится к оператору $V$. Тогда*

$$\operatorname{Range} V \subset \underline{\lim}_n \operatorname{Range} V_n.$$

Доказательство. Пусть $y=Vx$. Тогда

$$\operatorname{dist}(y, \operatorname{Range} V_n) \le \| Vx - V_n x \| \longrightarrow \text{при } n \longrightarrow \infty. \quad \bullet$$

Можно легко показать, что для введенных выше, в п. 4.3, операторов $V_c^{(n)}$

$$\| V_c^{(n)} x \|^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \| B^* e^{\tilde{A}_n^* t} x \|^2 \, dt = (Q_n^* \Sigma_n Q_n x, x) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} (\Sigma x, x) = \| V_c x \|^2 \quad \forall\, x \in L^2(\mu, E),$$

что вместе со слабой сходимостью влечет и сильную сходимость

$$V_c = s - \lim_n V_c^{(n)}.$$

Поэтому, в силу леммы 5.4 и замкнутости нижнего предела подпространств

$$(\operatorname{Ker} \mathcal{J}_h)^{\perp} = \operatorname{clos} \operatorname{Range} V_c \subset \lim_n \operatorname{clos} \operatorname{Range} V_c^{(n)} = \underline{\lim}_n ((\operatorname{Ker} \mathcal{J}_n)^{\perp}).$$

Тогда, для нетривиальности $\operatorname{Ker} \mathcal{J}_h$ достаточно, чтобы

$$\underline{\lim}_n ((\operatorname{Ker} \mathcal{J}_n)^{\perp}) \ne L^2(\mathbb{R}_+),$$

или, если перейти к операторам $\Gamma_n = \mathcal{F}^{-1} J_n \mathcal{F}$, чтобы

$$\underline{\lim}_n ((\operatorname{Ker} \Gamma_n)^{\perp}) \ne H^2.$$

Но $(\operatorname{Ker} \Gamma_n)^{\perp}$ есть, см. п. 1.2, подпространство вида $K_B$, где $B$ — конечное произведение Бляшке, и ответ на вопрос о нижних пределах таких подпространств дает следующая хорошо известная (см., например, [3]) теорема.

**5.5. Теорема.** *Пусть $B_n$ — произведения Бляшке конечного ранга:*

$$B_n = \prod_{j=1}^{N_n} \left( \frac{z-\lambda_j^{(n)}}{z-\bar{\lambda}_j^{(n)}} \right)^{k_j^{(n)}}, \quad \lambda_j^{(n)} \subset \mathbb{C}_+,$$

$$K_n = K_{B_n} \overset{\text{def}}{=} H^2 \ominus B_n H^2,$$

*и пусть*

$$\operatorname{Cap} B_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N_n} k_j^{(n)} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j^{(n)}}{1 + |\lambda_j^{(n)}|^2}.$$

*Тогда* $\lim K_n = H^2$ *в том и только том случае, когда*

$$\lim \operatorname{Cap} B_n = \infty.$$

Вообще говоря, в [3] приведена формулировка этой теоремы для $H^2$ в круге, однако стандартная пересадка $H^2$ из полуплоскости в круг и обратно позволяет легко получить и приведенную выше формулировку.

**5.6. Достаточность условия** $\int \frac{1}{s}\, d\mu(s)<\infty$ **для нетривиальности ядра** проверяется в силу вышесказанного путем анализа емкостей Cap $B_n$.

Пусть $A_n$ - оператор конечного ранга из п. 4.3 такой, что $\mathcal{J}_n$ $(\Gamma_n)$ - ганкелев оператор системы $\{A_n, B_n, C_n\}$. Пусть $\mu_j^{(n)}$- собственные числа оператора $A_n$, а $k_j^{(n)}$ - их кратности. Тогда ядро $h_n$ оператора $\mathcal{J}_n$, $h_n(t)=(e^{A_n t} b_n, c_n$ имеет вид

$$h_n(t) = \sum_j \sum_{k=0}^{k_j^{(n)}-1} a_{j,k}^{(n)} \; t^k \, e^{\mu_j^{(n)} t} ,$$

где $a_{j,k}^{(n)}$ - некоторые коэффициенты.

Символ же $\varphi_n$ оператора $\Gamma_n$ (точнее, один из возможных символов, равный $\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}h$) имеет вид

$$\varphi_n(z) = \sum_j \sum_{k=1}^{k_j^{(n)}} \frac{c_{j,k}^{(n)}}{(z - \lambda_j^{(n)})^k} ,$$

здесь $\lambda_j^{(n)} = -i\mu_j^{(n)}$, а $c_{j,k}^{(n)}$ - некоторые коэффициенты. Отметим, что так как система $\{A_n, B_n, C_n\}$ сбалансированная, а значит, и минимальная, то

$$\sum_j k_j^{(n)} = \text{rank } A_n = \text{rank } \Gamma_n$$

(это следует, например, из того, что $\mathcal{J}_h = V_o V_c^*$ и rank $V_o$ = rank $V_c$ = dim $H$, см. § 2), и, значит, согласно теореме Кронекера 1.1,

$$c_{j,k_j^{(n)}}^{(n)} \neq 0 \quad \forall\, j .$$

Поэтому соответствующее произведение Бляшке $B_n$, $K_{B_n} = (\text{Ker } \Gamma_n)^{\perp}$ имеет вид

$$B_n(z) = \prod_j \left( \frac{z - \lambda_j^{(n)}}{z - \bar{\lambda}^{(n)}} \right)^{k_j^{(n)}}$$

и соответствующая емкость равна

$$\text{Cap } B_n = \sum_j \frac{\text{Im}\lambda_j^{(n)}}{1+|\lambda_j^{(n)}|^2}\, k_j^{(n)} = -\sum_j \frac{\text{Re}\mu_j^{(n)}}{1+|\mu_j^{(n)}|^2}\, k_j^{(n)}.$$

Так как все операторы $A_n$ равномерно ограничены некоторой константой $C$, то $|\mu_j^{(n)}| \le C$, и поэтому

$$-\frac{1}{C^2+1} \text{ trace } A_n \le \text{Cap } B_n \le -\text{ trace } A_n .$$

Чтобы доказать теорему, осталось заметить, что

$$\text{trace } A_n = -\int \frac{1}{2s}\, d\mu_n(s)$$

и что $\int \frac{1}{s} d\mu_n(s) \longrightarrow \int \frac{1}{s} d\mu(s)$ при $n \to \infty$ . ●

## Список литературы

[1] H r u s c e v S.V., P e l l e r V.V. Moduli of Hankel operators, past and future //Linear and complex analysis problem book. 199 Research Problems: Lect. Notes Math. 1 9 8 4. Vol.1043. P.92-97.

[2] P o w e r S.C. Hankel operators on Hilbert spaces. Research Notes Math. Vol. 64. Pitman Advanced Publishing program, 1 9 8 2.

[3] N i k o l ' s k i i N.K. Treatise on the shift operator. Springer, 1 9 8 5.

[4] П е л л е р В.В., Х р у щ е в С.В. Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. 1982. Т.37, N 1. С. 53-124.

[5] Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1 9 6 3.

[6] D e v i n a t z A. On Wiener-Hopf operators // Functional analysis: Proc.Conf., Irvine, Calif., 1 9 6 6. London etc.: Acad.Press, 1 9 6 7. P.81-118.

[7] H r u s c e v S.V., N i k o l ' s k i i N.K., P a v l o v B.S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels // Lect. Notes Math. 1 9 8 1. Vol. 864. P. 214-335.

[8] Т р е и л ь С.Р. Модули операторов Ганкеля и задача В.В.Пеллера - С.В.Хрущева // ДАН СССР. 1 9 8 5. Т. 283, N 5.

[9] Т р е и л ь С.Р. Модули ганкелевых операторов и задача В.В.Пеллера - С.В.Хрущева // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1 9 8 5. Т. 141. С. 56-71.

[10] В а с ю н и н В.И., Т р е и л ь С.Р. Обратная спектральная задача для модуля ганкелева оператора. Препринт ЛОМИ Р-8-85. Л., 1 9 8 5.

[11] В а с ю н и н В.И., Т р е и л ь С.Р. Обратная спектральная задача для модуля Ганкелева оператора // Алгебра и анализ. 1 9 8 9. Т.1, N 4. С. 54-66.

[12] O b e r R.J. A Note on a System Theoretic Approach to a Conjecture by Peller-Khrushchev //Syst.Cont. Letters. 1 9 8 7. Vol. 8. P. 303-306.

[13] O b e r R.J. A Note on a System Theoretic Approach to a conjecture by Peller-Khrushchev. Preprint. Cambridge, 1 9 8 8.

[14] M o o r e B.C. Principal component analysis in linear systems // IEEE Trans. Aut. Control. 1 9 8 1. Vol. 25. P.17-32.

[15] O b e r R.J. Balanced realizations. Canonical form, parametrization, model reduction // Int. J.Control. 1 9 8 7. Vol.46, N 2. P.643-670.

[16] A r e n d t W., B a t t y C.J.K. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups // Trans.Amer.Math.Soc. 1 9 8 8. Vol.306, N 2. P.837-852.

[17] С е к е ф а л ь в и-Н а д ь Б., Ф о й а ш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Пер. с франц. М.: Мир, 1 9 7 0.

Ленинградский государственный университет
199034, Ленинград, Университетская наб.,7/9

Поступило 20 ноября 1989 г.