А. К. Андриясян, И. В. Ильин, А. В. Малышев, Применение ЭВМ к оценкам чеботаревского типа в неоднородной гипотезе Минковского, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 151, 7–25

А.К.Андриясян, И.В.Ильин, А.В.Малышев

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К ОЦЕНКАМ ЧЕБОТАРЕВСКОГО ТИПА В НЕОДНОРОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ МИНКОВСКОГО

В этой статье мы приводим сводку результатов (и в некоторых случаях - наброски доказательств), полученных нами при исследовании неоднородной гипотезы Минковского. Подробное изложение этих исследований депонируется в ВИНИТИ. Они используют метод Чеботарева [9] в том виде, как его развил Б.Ф.Скубенко [7], и существенно уточняют исследования, содержащиеся в статье Х.Х.Мухсинова [I], равно как (для $n \geqslant 17$) и все предыдущие исследования.

§ I. Введение

Пусть $n \geqslant 2$ - целое число,

$$L_k = L_k(x) = L_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_j \quad (k=1,\ldots,n), \tag{I.I}$$

где $\alpha_{kj} \in \mathbb{R}$ $(k,j=1,\ldots,n)$, причем $\Delta = |\det(\alpha_{kj})| > 0$. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \mathbb{R}$. Наша цель - исследование известного в геометрии чисел предположения - неоднородной гипотезы (М) Минковского.

ГИПОТЕЗА (М). Для любых вещественных чисел α_{kj} $(k,j=1,\ldots,n)$, γ_k $(k=1,\ldots,n)$ с условием $\Delta = |\det(\alpha_{kj})| > 0$ найдется целый вектор $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$, для которого

$$\prod_{k=1}^{n} | L_k(x) + \gamma_k | \leqslant \frac{\Delta}{2^n} . \tag{I.2}$$

Это неравенство, вообще говоря, неулучшаемо, например, в случае $L_k(x) = x_k$, $\gamma_k = \frac{1}{2}$ $(k=1,\ldots,n)$. Для $n=2$ неравенство (I.2) было доказано Минковским [I7]. На случай $n=3$ это неравенство [ж)] было обобщено Ремаком [2I]. В случае $n=4$

[ж)] Заметим, что ни Минковский, ни Ремак не рассматривали явно свои результаты как частные случаи некой гипотезы для любого n. По-видимому, впервые гипотеза (М) формулируется в известной монографии Коксма [I5].

неоднородная гипотеза Минковского была доказана Дайсоном [13]. Наконец, для $n=5$ (и всех $n\leq 5$) гипотеза (М) была доказана Б.Ф.Скубенко [5], разработавшим для этого особый "метод паруса". Значительные технические упрощения доказательства теоремы Б.Ф.Скубенко (при сохранении метода) были даны в статьях [6,10]. Там же, а также в монографии Леккеркеркера [16] см. ссылки на другие работы по неоднородной гипотезе Минковского для $n\leq 5$.

При $n\geq 6$ гипотеза (М) до сих пор не доказана (и не опровергнута). Оставляя в стороне интересный подход к неоднородной гипотезе Минковского, связанный с проблемой существования DOTU-матриц (см. [8] и цитированную там литературу), мы переходим к исследованиям, ведущим свое начало от замечательного результата (и метода) Н.Г.Чеботарева [9]. Но сначала переформулируем (несколько ослабив) гипотезу (М). В условиях (I.I) пусть

$$M_n = M(L_1,\dots,L_n;\gamma_1,\dots,\gamma_n) = \inf_{x\in\mathbb{Z}^n}\prod_{k=1}^{n}|L_k(x)+\gamma_k| \qquad (I.3)$$

– неоднородный арифметический минимум произведения форм $L_1,\dots,L_n$; здесь точная нижняя граница берется по всем целым точкам $x\in\mathbb{Z}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ (она может не достигаться). Из гипотезы (М) очевидным образом вытекает следующее предположение.

ГИПОТЕЗА (M_0). Для всех $n\geq 2$

$$M_n \leq \frac{\Delta}{2^n}. \qquad (I.4)$$

Гипотеза (М), вообще говоря, не следует из гипотезы (M_0), ибо здесь возникает проблема существования $x\in\mathbb{Z}^n$ с условием, реализующим (I.2).

Н.Г.Чеботарев [9] доказал, что для всех $n\geq 2$

$$M_n \leq \frac{\Delta}{2^{n/2}} \qquad (I.5)$$

(более того, он доказал разрешимость неравенства

$$\prod_{k=1}^{n}|L_k(x)+\gamma_k| \leq \frac{\Delta}{2^{n/2}},\quad x\in\mathbb{Z}^n). \qquad (I.6)$$

В дальнейшем оценка Н.Г.Чеботарева (I.5) многократно усиливалась разными авторами, которые вместо оценки (I.5) получали оценки вида

$$M_n \leq \delta_n^{-1}\,2^{-n/2}\Delta, \quad n\geq n_0, \qquad (I.7)$$

где $\delta_n > 1$, $n_0 \geq 2$ (идеально: $n_0 = 2$; иногда число n_0 вычислялось или оценивалось; иногда авторы говорят лишь о существовании n_0).

Дадим сводку всех известных результатов по оценкам M_n в виде таблицы: имеет место оценка (I.7), где δ_n и n_0 содержатся в таблице (в последнем ее столбце – библиография и год публикации)

	δ_n	n_0	Библиография (год)
I	1	2	Н.Г.Чеботарев [9] (1934)
2	$1+(\sqrt{2}-1)^n$	2	Морделл [18] (1940)
3	γ_n	2	Дэвенпорт [12] (1946)
4	$2-(2-\sqrt{2})^n$	2	Вудс [22] (1958)
5	$4-2\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^n-2^{\frac{n}{2}}$	2	Морделл [19] (1960)
6	$(3+10^{-4})(2e-1)$	существует n_0	Бомбиери [II] (1963)
7	$3(2e-1)$	существует n_0	Грубер [14] (1967)
8	$e^{-2}n^{1/3}\log^{-2/3}n$	существует n_0	Б.Ф.Скубенко [7] (1977)
9	$e^{-25.6}n^{3/7}\log^{-4/7}n$	существует n_0	Х.Н.Нарзуллаев, Б.Ф.Скубенко [4] (1979)
I0	$\frac{\log(\sqrt{2}+1)-\frac{1.2535}{\log(n_0/2)}}{\sqrt{8e}}\ \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)}$	любое $n_0 \geq 10^6$	Х.Х.Мухсинов [I] (1981)
II	$4.4455-\frac{1.3545}{n-1}$	200	Х.Х.Мухсинов [3] (1983)

Здесь

$$\gamma_n = \gamma_n(\theta) = 1+2\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r}(-1)^n\binom{r}{l}\left(1-\frac{l\theta}{r}\right)^n,$$

где $\theta > 0$ – любое фиксированное число с условием $f((1+2\theta)\sqrt{2})<1$, $f(x)=(2x+1)(x-1)^4(x+1)^2$. Заметим, что в оценке Дэвенпорта [I6] $\delta_n = \gamma_n < 2e-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 2e-1 = 4.436564\ldots$.

К исследованиям по оценкам типа (I.7) можно прибавить статью Х.Х.Мухсинова [2], к сожалению содержащую многочисленные ошибки как в доказательствах теорем, так и в их формулировках (теоремы I и 3 этой работы не верны; исправленная формулировка теоремы 2 приведена в [3]).

Мы улучшаем эти оценки (по крайней мере, для $n \geq 17$).

Во-первых, мы получили (см. §2) ряд общих предложений, содержащих оценки M_n сверху, зависящие от некоторых параметров и особенно эффективные для достаточно больших n . Оптимизация этих параметров приводит к оценкам M_n , более сильным, чем известные ранее. В частности, имеют место оценки (I.7) с

$$\delta_n = \begin{cases} 0.309973 \dfrac{n^{1/2}}{\log(n/3.042869)} & \text{, если } n \geq 10^4, \\ 0.313538 \dfrac{n^{1/2}}{\log(n/3.111047)} & \text{, если } n \geq 14221, \\ 0.327160 \dfrac{n^{1/2}}{\log(n/3.264949)} & \text{, если } n \geq 10^5, \\ 0.330490 \dfrac{n^{1/2}}{\log(n/3.260979)} & \text{, если } n \geq 2\cdot 10^5, \\ 0.336627 \dfrac{n^{1/2}}{\log(n/3.198088)} & \text{, если } n \geq 10^6. \end{cases} \qquad (I.8)$$

В § 2 мы формулируем основные результаты этого исследования и приводим получаемые оценки δ_n , более точные, чем (I.7)-(I.8).

Во-вторых, в § 3 мы формулируем и даем набросок доказательства общих предложений, которые позволяют получать с помощью ЭВМ оценки M_n , более сильные для "средних" n , чем (I.7)-(I.8) и чем те, которые сформулированы в §2 этой статьи. В частности, имеет место оценка (I.7) с

$$\delta_n = \begin{cases} 3.3765123 & , \quad n \geq 17, \\ 9.2627251 & , \quad n \geq 200, \\ 13.3103849 & , \quad n \geq 700, \\ 15.9472184 & , \quad n \geq 1000, \\ 56.5057793 & , \quad n \geq 10000, \\ 159.2380010 & , \quad n \geq 100000. \end{cases} \qquad (I.9)$$

Результаты нашей работы (приведенные выше и сформулированные в §§ 2,3) сильнее ранее известных - по крайней мере, для $n \geq 17$. В частности, оценки (I.7)-(I.9) для $n \geq 17$ сильнее оценок (I.7) Морделла [19] и Дэвенпорта [12] (а тем более - их предшественников) с

$$\delta_n < 2e - 1 = 4.436564\ldots .$$

Для $n \geq 700$ эти оценки сильнее [*] оценок Бомбиери [II] с

$$\delta_n = (3+10^{-4})(2e-1) = 13.310135 .$$

Существенным в нашем исследовании является использование ЭВМ.

§ 2. Оценки для больших размерностей

Сформулируем результаты, уточняющие исследования [7, 4, I].

ТЕОРЕМА I. Пусть для некоторого целого числа $n \geq 2$ заданы вещественные числа $\lambda = \lambda(n)$, $\mu = \mu(n)$, $\rho = \rho(n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 < \mu < \lambda < \frac{1}{2}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \lambda^2 \leq 2\mu, \tag{2.I}$$

$$L < \log(\sqrt{2}+1); \tag{2.2}$$

здесь

$$L = L(\lambda, \mu, \rho) = \ell^{(0)} + \ell^{(1)} + \ell^{(2)} + \ell^{(3)}, \tag{2.3}$$

где

$$\ell^{(0)} = \lambda\left(\frac{4}{\rho} + \frac{\rho}{\mu}\right)\log\frac{1}{\rho}, \qquad \ell^{(1)} = \lambda\left(\frac{4}{\rho} + \frac{\log 2}{2}\,\frac{\rho}{\mu}\right),$$

$$\ell^{(2)} = \sqrt{2}\,\frac{\lambda^2}{\mu}, \qquad \ell^{(3)} = \rho\log(\sqrt{2}+1) + \lambda\left(6 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\rho^2}{\mu}\right) + \frac{\lambda^2\rho}{\mu}.$$

Тогда для этого n имеет место неравенство (I.7), где

$$\delta_n = \delta_n(\lambda, \mu, \rho) = \frac{2(n\lambda+1)}{(1+\mu)^n}\left\{1 - \frac{n^n\left(1+\lambda-\frac{1+\mu}{\sqrt{2}}\right)^n}{n!\,(n\lambda+1)}\right\}. \tag{2.4}$$

Доказательство этой теоремы близко рассуждениям статьи [I]. Мы также используем многогранник $6\Sigma_\lambda$,

---

[*] Оценки Бомбиери [II], Грубера [I4], а также оценки [7, 4] трудно сравнивать между собой и с нашими оценками, ибо в этих работах не вычислены n_0. По-видимому, это n_0 очень велико и существенно больше нашего $n_0 = 700$. Вопросу вычисления n_0 в оценке Бомбиери предполагается посвятить депонент И.В. Ильина.

$$\tilde{I}_\lambda : \begin{cases} |x_i| \leq 1+\lambda & (i=1,\dots,n), \\ |x_i - x_j| \leq 2 & (i,j=1,\dots,n), \end{cases}$$

предложенный Б.Ф.Скубенко. Но при этом применяем следующую "теорему переноса" Морделла [20] : пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое, симметричное относительно начала тело объема $V(K)$ и пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ - решетка определителя $d(\Lambda)$; тогда если

$$V(K) \geq 2^{n-1} d(\Lambda),$$

то или K содержит фундаментальную область решетки Λ , или K содержит точку $x \in \Lambda$, $x \neq 0$. Это позволяет улучшить результат статьи [I] "асимптотически при $n \to \infty$ " вдвое. Главная же цель исследования, основные результаты которого мы приводим в этом параграфе, - оптимальный выбор с помощью ЭВМ параметров λ , μ , ρ для получения возможно более точных оценок вида (I.7).

Полагая

$$\rho = b_0 n^{-1/2}, \quad \lambda = b_1 \frac{\rho}{\log(1/\rho)}, \quad \mu = \frac{1}{b_2}\rho^2, \tag{2.5}$$

мы из теоремы I выводим следующее предложение

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть для некоторых вещественных постоянных $n_0 \geq 2$, b_0 , b_1 , $b_2 > 0$ выполнены следующие условия

$$\left.\begin{aligned} & b_0 < n_0^{1/2}, \quad b_0\left(\tfrac{1}{2}\log n_0 - \log b_0\right) < b_1 b_2 n_0^{1/2}, \\ & b_0^2 b_2 \leq 2\left(\tfrac{1}{2}\log n_0 - \log b_0\right)^2, \quad 2b_0 b_1 < n_0^{1/2}\left(\tfrac{1}{2}\log n_0 - \log b_0\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$b_1(4+b_2) + \ell^{(1)} + \ell^{(2)} + \ell^{(3)} < \log(\sqrt{2}+1), \tag{2.7}$$

где

$$\ell^{(1)} = 2b_1\left(4 + \frac{\log 2}{2} b_2\right) \Big/ \log\frac{n_0}{b_0^2},$$

$$\ell^{(2)} = 4\sqrt{2}\, b_1^2 b_2 / \log^2(n_0/b_0^2),$$

$$b^{(3)} = b_0 n_0^{-1/2}\left\{ \log(\sqrt{2}+1) + b_1(12+\sqrt{2}\,b_2)/\log\frac{n_0}{b_0^2} + 4b_1^2 b_2/\log\frac{n_0}{b_0^2} \right\}.$$

Тогда для любого целого числа $n \geq n_0$ имеет место оценка (I.7) с $\delta_n = \delta_n(b_0, b_1, b_2)$, где

$$\delta_n = 2\,\frac{\dfrac{2b_0b_1n^{1/2}}{\log(n/b_0^2)}+1}{1+\left(\dfrac{b_0^2}{b_2}\right)\left(\dfrac{1}{n}\right)}\left\{1-\frac{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2b_0b_1}{n^{1/2}\log(n/b_0^2)}-\dfrac{b_0^2}{b_2\sqrt{2}\,n}\right)^n n^n}{\left\{\left((2b_0b_1n^{1/2})/\log(n/b_0^2)\right)+1\right\} n!}\right\}. \qquad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть

$$\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_n(a, a') = a\,\frac{n^{1/2}}{\log(n/a')}, \quad a = \frac{4b_0b_1}{e^{b_0^2/b_2}}, \quad a' = b_0^2. \qquad (2.9)$$

Тогда при $n \geq 66$, $0 < b_0 \leq 3$, $0 < b_1 < 0.2$

$$\tilde{\delta}_n < \delta_n,$$

где $\delta_n = \delta_n(b_0, b_1, b_2)$ задано формулой (2.8). Поэтому по следствию I имеет место (I.7) с $\delta_n = \tilde{\delta}_n$ вида (2.9).

Осуществляя с помощью ЭВМ оптимальный выбор параметров b_0, b_1, b_2 (а с ними a и a') при данном n_0 из следствия I и замечания выводим следующее предложение.

СЛЕДСТВИЕ 2. При n имеет место неравенство (I.7) с $\delta_n = \delta_n(b_0, b_1, b_2)$ вида (2.8) и $\delta_n = \tilde{\delta}_n(a, a')$ вида (2.9), где n_0, b_0, b_1, b_2, a, a', δ_n и $\tilde{\delta}_n$ приводятся в следующей таблице

n_0	b_0	b_2	b_1	$\delta_n=\delta_n(b_0,b_1,b_2)$ см. (2.8) δ_{n_0}	a	a'	$\tilde{\delta}_n=\tilde{\delta}_n(a,a')$ см. (2.9) $\tilde{\delta}_{n_0}$
10^3	1.456242	7.338019	0,061369	2,873557	0,267751	2,120641	1,375403
6184	1,709419	6,933936	0.067815	4,436663	0,304236	2.922113	3,124373
10^4	1,744382	6.811837	0.069442	5.107510	0.309973	3.042869	3.827992
14221	1,763816	6,722574	0,070593	5.695771	0,313538	3,111047	4,436661
$5\cdot10^4$	1,801252	6.418317	0.074368	8.701215	0,323205	3,244509	7,494794

n_0	b_0	b_2	b_1	δ_{n_0}	a	a'	$\tilde{\delta}_{n_0}$
73520	1.805381	6.331895	0,075417	10.000027	0,325495	3,259401	8.804720
96632	1.806897	6,266441	0.076210	11.187890	0,327141	3,264877	10,000034
10^5	1.806917	6,265721	0,076219	11,203280	0,327160	3,264949	10.015509
157790	1,806805	6,171977	0,077353	13,310139	0,329410	3,264544	12,131657
196593	1.805913	6,128735	0,077876	14.484856	0,330414	3,261322	13,310148
$2\cdot 10^5$	1.805818	6,125371	0,077917	14,581473	0,330490	3.260979	13,407042
$5\cdot 10^5$	1,797671	5,959126	0,079939	20.939439	0,334204	3,231621	19,776611
10^6	1,788320	5,846640	0,081321	27,761954	0,336627	3,198088	26,604579
10^7	1,749780	5.543340	0,085147	73,473927	0,343036	3,061730	72,322707
10^8	1,711440	5,321601	0,088083	201.636178	0,347758	2,929027	200,482739

Эти таблицы (извлечение из которых приведено во введении, (I.8)) показывают, что

$$\left.\begin{aligned} \delta_n &> \delta_n^{(Б)} \quad \text{, если} \quad n \geqslant 157790, \\ \tilde{\delta}_n &> \delta_n^{(Б)} \quad \text{, если} \quad n \geqslant 196593, \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

что лучше оценки Бомбиери [II] (I.7) с

$$\delta_n = \delta_n^{(Б)} = (3 + 10^{-4})(2e - 1) = 13,314135\ldots \;;$$

они показывают, что

$$\left.\begin{aligned} \delta_n &> \delta_n^{(Д)} \quad \text{, если} \quad n \geqslant 6184, \\ \tilde{\delta}_n &> \delta_n^{(Д)} \quad \text{, если} \quad n \geqslant 14,221, \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

что лучше оценки Дэвенпорта [I2] (I.7) с

$$\delta_n = \delta_n^{(Д)} < 2e - 1 = 4.436564\ldots \ .$$

Значения n_0, $n \geqslant n_0$, в неравенствах (2.10), (2.11) являются наименьшими (что следует из вычислений, не приведенных в таблице).

При $n \to \infty$ выбор (2.5) параметров ρ, λ, μ – как можно доказать – дает их истинные порядки как функций от n; при этом оптимальным является следующий выбор коэффициентов b_0, b_1, b_2:

$$b_0 = \sqrt{2}\,, \quad b_2 = 4\,, \quad b_1 = \frac{\log(\sqrt{2}+1) - \tau\sqrt{2e}}{8}\,, \tag{2.12}$$

где $\tau > 0$, $\tau \to 0$ при $n \to \infty$. Полагая в следствии I значения (2.12) для b_0, b_1, b_2, получаем следующее предложения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дано вещественное число τ, $0 < \tau < 0.1$, и пусть для некоторого числа $n_0 \geqslant 9$

$$m^{(1)} + m^{(2)} < \tau\,, \tag{2.13}$$

где

$$m^{(1)} = \left\{ 0.50901188 + \frac{0.11779118}{\log(n_0/2)} \right\} \frac{1}{\log(n_0/2)}\,,$$

$$m^{(2)} = \left\{ 0.5345801 + \frac{1.1798753}{\log(n_0/2)} + \frac{0.11779118}{\log^2(n_0/2)} \right\} n_0^{1/2}.$$

Тогда для $n \geqslant n_0$ имеет место (I.7) с $\delta_n = \tilde{\tilde{\delta}}_n = \tilde{\tilde{\delta}}_n(\tau)$, где

$$\tilde{\tilde{\delta}}_n = \left\{ \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2e}} - \tau \right\} \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)} = (0.3779736\ldots - \tau)\frac{n^{1/2}}{\log(n/2)}\ . \tag{2.14}$$

Так как $m^{(1)} \to 0$, $m^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$, то из следствия 3 сразу же выводим:

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого вещественного числа $\tau > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\tau)$, что имеет место (I.7) с $\delta_n = \tilde{\tilde{\delta}}_n$ вида (2.14).

Наконец, по следствию 3 с помощью ЭВМ легко вычислить таблицу зависимости $n_0 = n_0(\tau)$ от τ:

СЛЕДСТВИЕ 5. Для $n \geqslant n_0$ имеет место оценка (I.7) с

$$\delta_n = \tilde{\tilde{\delta}}_n = \tilde{\tilde{\delta}}_n(n_0) = \alpha_{n_0} \frac{n^{1/2}}{\log(n/2)} , \qquad (2.15)$$

где n_0 и α приводятся в следующей таблице

n_0	10^3	10^4	16072	10^5	110522	$2\cdot 10^5$	216126	$5\cdot 10^5$	10^6	10^7	10^8
α_0	0,27	0.3098	0.3146	0.3279	0.3284	0.3314	0.3317	0.3353	0.3379	0.3443	0.3488
$\tilde{\tilde{\delta}}_{n_0}$	1.37411	3,63818	4.4366	9.5839	10.0000	12.8760	13.31014	19.0810	25.7504	70.588	196,788

Таким образом,

$\tilde{\tilde{\delta}}_n > \delta_n^{(Д)}$, если $n \geqslant 16072$, $\tilde{\tilde{\delta}}_n > \delta_n^{(Б)}$, если $n \geqslant 216126$,

причем, как показывают вычисления, это – неименьшие значения n , для которых выполняются эти неравенства.

Подробное изложение результатов § 2 и их полные доказательства содержатся в статье Андриясян А.К., Ильин И.В., Малышев А.В. К неоднородной гипотезе Минковского. Оценки чеботаревского типа для больших размерностей. – Редкол.журн. "Вестник ЛГУ. сер.матем., мех., астрон." Л., 1986, 45 с., библиогр. 31 назв. депонируемой в ВИНИТИ.

§ 3. Оценки для малых и "средних" размерностей

Сформулируем результаты, приводящие (при использовании ЭВМ) к более сильным оценкам для малых и "средних" $n \geqslant 17$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задан вещественный параметр α, $0 \leqslant \alpha < 1$ и пусть заданы вещественное число $\omega > 0$ и целое число $n_0 \geqslant 2$ с условием

$$\frac{\omega}{n_0} < \frac{(1-\alpha)\log(\sqrt{2}+1)}{2(2-\alpha)\sqrt{2}} = 0{,}3116126\ldots \frac{1-\alpha}{2-\alpha} . \qquad (3.1)$$

Рассмотрим совокупность всех[ж)] пар (r_1, r_2) целых чисел r_1, r_2 с условиями .

ж) Их конечное число, ибо из (3.2) и (3.3) следует:

$$r_1 - (2-\alpha) r_2 < \frac{4\omega}{\left\{\log(\sqrt{2}+1) - (2+\sqrt{2})\frac{\omega}{n_0}\right\}^2} .$$

$$r_1 - (2-\alpha)\, r_2\,, \tag{3.2}$$

$$0 \le r_2 < \frac{2\sqrt{\omega\left(r_1-(2-\alpha)r_2\right)} - \left\{\log(\sqrt{2}+1) - (2+\sqrt{2})\frac{\omega}{n_0}\right\}\left(r_1-(2-\alpha)r_2\right)}{(1-\alpha)\log(\sqrt{2}+1) - 2\sqrt{2}\,(2-\alpha)\frac{\omega}{n_0}}\,. \tag{3.3}$$

Фиксируем пару целых чисел (r_1, r_2), удовлетворяющую неравенствам (3.2), (3.3) и рассмотрим последовательность вещественных чисел $\tau_k = \tau_k(\omega, n_0) = \tau_k(r_1, r_2;\, \alpha, \omega, n_0)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, задаваемых формулой

$$\tau_k = \frac{e^{\frac{2(r_1-(2-\alpha)r_2)\omega}{k n_0}}}{\left\{ e^{\frac{4(r_1-(2-\alpha)r_2)\omega}{k n_0}} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

и условием $\tau_0 = 1$, так что

$$\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \quad \tau_k \longrightarrow \infty\,.$$

Пусть для каждой пары (r_1, r_2) с условиями (3.2) и (3.3) найдутся целое число $N = N(r_1, r_2;\, \alpha, \omega, n_0) \ge 2$ и индекс $k = k(r_1, r_2;\, \alpha, \omega, n_0) \ge 0$ с условием

$$\tau_k < N \le \tau_{k+1}\,, \tag{3.4}$$

для которых

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{k} \max\left\{0,\ \log\left(\frac{N}{\tau_t} - 1\right) + N\log\left(1 + \frac{1}{\tau_t}\right)\right\} + \\ &+ r_1\left\{\log\left(N\sqrt{2}\left(1+\frac{\omega}{n_0}\right)+1\right) + N\log\left(\sqrt{2}\left(1+\frac{\omega}{n_0}\right)-1\right)\right\} + \\ &+ r_2\left\{\log\left(N\sqrt{2}\left(1-\frac{(2-\alpha)\omega}{n_0}\right)-1\right) + N\log\left(\sqrt{2}\left(1-\frac{(2-\alpha)\omega}{n_0}\right)+1\right)\right\} < 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

(в случае $k = 0$ первое слагаемое в левой части неравенства (3.5) отсутствует). Тогда для $n \ge n_0$ имеет место неравенство (I.7), где

$$\delta_n = \frac{2(5-\alpha) - \left\{ 8\left(1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{n}\right)^n + 2\omega(1-\alpha)\left(1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{2n}\right)^{n-1} \right\}}{1-\alpha} -$$

$$- \frac{2n^n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{n!} \left(1 + \frac{(2+\sqrt{2})\omega}{n}\right)^n . \qquad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть

$$\tilde{\delta}_n = \frac{2(5-\alpha) - 8e^{-\frac{(1-\alpha)\omega}{2}}}{1-\alpha} - \frac{2\omega e^{-\frac{(1-\alpha)\omega}{2}}}{1 - \frac{(1-\alpha)\omega}{2n}} - \frac{2e^{(2+\sqrt{2})\omega}}{\sqrt{2\pi n}} \left\{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e\right\}^n . \qquad (3.7)$$

Тогда $\tilde{\delta}_n$ растет вместе с n и

$$\tilde{\delta}_n < \delta_n , \qquad (3.8)$$

где δ_n задано формулой (3.6). Поэтому в условиях теоремы 2 имеет место (2.7) с $\delta_n = \tilde{\delta}_n$ вида (3.7).

Параметры α, ω и k теоремы 2 (и замечания) при данном можно выбрать оптимальным образом, используя ЭВМ. Это приводит к следующим оценкам δ_n.

СЛЕДСТВИЕ. При $n \geq n_0$ имеет место неравенство (I.7) с $\delta_n = \delta_n(\alpha, \omega, n)$ вида (3.6) и $\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_n(\alpha, \omega, n)$ вида (3.7), где n_0, α, ω, а также выбранное k и δ_{n_0}, $\tilde{\delta}_{n_0}$ приводятся в следующей таблице

n_0	α	k	ω	δ_{n_0}	$\tilde{\delta}_{n_0}$
17	0,120	3	0,759526	3,376512	3,351198
50	0,050	6	1,909802	5,492556	5,451329
100	0,030	12	3,604880	7,576274	7,534645
200	0,010	19	6,538214	9,262725	9,240779
500	0,320	9	7,644332	11,761180	11,747552
700	0,446	7	8,267710	13,310384	13,298611
1000	0,630	5	8,820434	15,947218	15,936983

10000	0.880	13	41.928696	56.505779	56.501929
50000	0.920	6	69.394120	87.123726	87.122580
10^5	0.950	33	214.493833	159.238001	159.237603
10^6	0.980	26	223.875000	311.637039	311.636812
10^7	0.990	27	478.875000	641.641055	641.641009

К сожалению, из за большого объема вычислений при $n \geq 10^8$ мы не смогли оптимизировать выбор к. Заметим, что $\tilde{\delta}_n$, вычисленное при данном n_0, монотонно возрастает по n. Поэтому оценки (I.9) содержатся в приведенной таблице. К сожалению, величина δ_n при данных ω и α оказывается более сложной функцией n. Подсчеты чисел n подряд (для $17 \leq n \leq 100$) показывают, что при соответствующей (при каждом n) оптимизации ω и α величина δ_n возрастает с n, так что оценки (I.9) могут быть усилены.

Оценки (I.7) теоремы 2, замечания и следствия I сильнее оценок Морделла [I9] и Дэвенпорта [I2] уже при $n \geq 17$; при $n \geq 700$ они сильнее оценок Бомбиери [II].

Дадим НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теоремы 2.

I°. Пусть λ, α, μ - вещественные числа с условиями

$$0 \leq \lambda \leq 2, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \mu \leq \sqrt{2}(1+\lambda) - 1 . \tag{3.9}$$

Мы рассматриваем тела $\underset{\sim}{\mathfrak{I}} = \underset{\sim}{\mathfrak{I}}_{\lambda,\alpha}$ и $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\lambda,\alpha,\mu}$:

$$\underset{\sim}{\mathfrak{I}}: \left\{ \begin{array}{l} |x_i| \leq 1+\lambda \quad (i=1,\dots,n), \\ |x_i - x_j| \leq 2 \quad (i,j=1,\dots,n), \\ |x_i - x_j + x_k| \leq 3 + \alpha \max\limits_t \{|x_t| - 1, 0\} \quad (i,j,k=1,\dots,n;\ i \neq k), \end{array} \right\} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{T}: \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{\mathfrak{I}} \\ |x_1| + \dots + |x_n| \leq \frac{n}{\sqrt{2}}(1+\mu). \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

Вычисляется:

$$V(\underset{\sim}{\mathfrak{I}}_{\lambda,\alpha}) = 2^n \Delta_{\lambda,\alpha}, \tag{3.12}$$

где

$$\Delta_{\lambda,\alpha}=\frac{5-\alpha}{1-\alpha}-\left(\frac{4}{1-\alpha}+(n-2)\lambda\right)\left(1-\frac{(1-\alpha)\lambda}{2}\right)^{n-1},$$

и оценивается

$$V(\gamma_{\lambda,\alpha,\mu})\geqslant 2^n\Delta'_{\lambda,\alpha,\mu},\ \Delta'_{\lambda,\alpha,\mu}=\Delta_{\lambda,\alpha}-\frac{n^n}{n!}\left(1+\lambda-\frac{1+\mu}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{3.12}$$

2^0. Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что в ее условиях для любой решетки $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ определителя

$$d(\Lambda)=\delta_n, \tag{3.13}$$

где δ_n имеет вид (3.6), и для любого вектора $\gamma\in\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant n_0$

$$M_n=\inf_{y\in\Lambda+\gamma}|y_1\dots y_n|\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}. \tag{3.14}$$

Если $M_n=0$, то неравенство (3.14) тривиально. Поэтому далее считаем, что $M_n>0$, $M_n=a^n$, $a=a(\Lambda,\gamma)>0$. Для простоты считаем, что точная нижняя граница в (3.14) достигается. Тогда не нарушая общности, можно считать, что

$$\alpha=(a,\dots,a)\in\Lambda+\gamma=\Lambda+\alpha,$$

причем неравенство (3.14) равносильно неравенству

$$a\leqslant 2^{-1/2}. \tag{3.15}$$

Для $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{Z}^n$ обозначим:

$$F(z)=\prod_{i=1}^{n}|z_i+1|.$$

Тогда по определению a для любой точки $x\in\Lambda$

$$F\left(\frac{x}{a}\right)\geqslant 1. \tag{3.16}$$

3^0. Рассмотрим тело $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_{\lambda,\alpha,0}$, определяемое неравенствами (3.11) при $\mu=0$. Тогда в силу (3.13), (3.6) и (3.12) $V(\mathcal{Y})\geqslant 2^{n-1}d(\Lambda)$.

и по теореме переноса Морделла [20] (она сформулирована в § 2: или $\mathcal{T}$ содержит фундаментальную область решетки Λ ; или найдется точка $\tilde{x}$ с условиями

$$\tilde{x}\in\mathcal{T}, \quad \tilde{x}\in\Lambda, \quad \tilde{x}\neq 0 . \tag{3.17}$$

В случае существования в $\mathcal{T}$ фундаментальной области Λ неравенство (3.15), а с ним и теорема 2, просто следует из последнего неравенства (3.11) с $\mu=0$.

4°. Поэтому далее пусть существует точка $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$ с условиями (3.17). Из (3.16) выводим:

$$F\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right)F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\geqslant 1, \quad \prod_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\tilde{x}_i}{a}\right)^2-1\right|\geqslant 1, \quad \max_i|\tilde{x}_i|>2^{1/2}a . \tag{3.18}$$

Для доказательства (3.15) предположим противное: пусть

$$a>2^{-1/2}. \tag{3.19}$$

Заменяя в случае необходимости $\tilde{x}$ на $-\tilde{x}$ и перенумеровывая координаты $\tilde{x}$ с учетом (3.18) и (3.19), мы можем считать, что

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x}_1=\max|\tilde{x}_i|, \quad \tilde{x}_1=1+\theta, \quad 0<\theta\leqslant\lambda, \\ \tilde{x}_1\geqslant\tilde{x}_2\geqslant\dots\geqslant\tilde{x}_{r_1}>a, \quad \tilde{x}_{r_1+i}<-a \ (i=1,\dots,r_2), \\ a\geqslant|\tilde{x}_{r+1}|\geqslant\dots\geqslant|\tilde{x}_{r+s}|, \quad r+s=n . \end{array}\right\} \tag{3.20}$$

Обозначаем для $z=(z_1,\dots,z_n)$

$$R_1(z)=\prod_{i=1}^{r_1}|z_i+1|, \quad R_2(z)=\prod_{r_1+1}^{r_1+r_2}|z_i+1|,$$

$$R(z)=R_1(z)R_2(z)=\prod_{i=1}^{r}|z_i+1|, \quad S(z)=\prod_{i=r+1}^{r+s}|z_i+1|,$$

так что

$$F(z)=R(z)\,S(z). \tag{3.21}$$

Обозначим также

$$X_1=\sum_{i=1}^{r_1}\tilde{x}_i, \quad X_2=-\sum_{i=r_1+1}^{r}\tilde{x}_i, \quad X=X_1+X_2=\sum_{i=1}^{r}|\tilde{x}_i|, \quad Y=\sum_{i=r+1}^{n}|x_i| .$$

5^0. Из (3.17), (3.10) и (3.18) выводится, что

$$r_1-(2-\alpha)\,r_2>0. \tag{3.22}$$

6^0. Пусть $\lambda<(3\sqrt{2}-2)(8-2\alpha)$. Из

$$F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\geqslant 1$$

(см. (3.16)) выводим

$$\log S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)>(r_1-r_2)\log(\sqrt{2}+1)-\left\{(2+\sqrt{2})\,r_1-(2-\alpha)(2-\sqrt{2})\,r_2\right\}\theta.$$

С другой стороны из (3.18) следует:

$$\frac{Y}{a}\leqslant 2\sqrt{s\,(r_1-(2-\alpha)\,r_2)\,\theta}\,.$$

Так как

$$\log S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\leqslant\frac{Y}{a}\;,$$

то мы получаем первое основное неравенство

$$\begin{gathered}2\sqrt{s\{r_1-(2-\alpha)\,r_2\}\,\lambda}+\lambda\left\{(2+\sqrt{2})\,r_1-(2-\alpha)(2-\sqrt{2})\,r_2\right\}-\\-(r_1-r_2)\log(\sqrt{2}+1)>0.\end{gathered} \tag{3.23}$$

7^0. Из (3.16) следует

$$F\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right)\left\{F\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N\geqslant 1\;, \tag{3.24}$$

где $N\geqslant 2$ – целое число, удовлетворяющее (3.4). Но

$$F\left(\frac{Nx}{a}\right)\left\{F\left(\frac{-x}{a}\right)\right\}^N=R\left(\frac{Nx}{a}\right)\left\{R\left(\frac{-x}{a}\right)\right\}^N S\left(\frac{Nx}{a}\right)\left\{S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N. \tag{3.25}$$

Доказывается, что

$$\begin{gathered}R\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right)\left\{R\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N<\exp\Big(r_1\left\{\log(N\sqrt{2}\,(1+\theta)+1)+N\log(\sqrt{2}\,(1+\theta)-1)\right\}+\\+r_2\left\{\log(N\sqrt{2}\,(1-(2-\alpha)\theta)-1)+N\log(\sqrt{2}\,(1-(2-\alpha)\theta)+1)\right\}\Big)\,.\end{gathered} \tag{3.26}$$

Для оценки $S\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right)\left\{S\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N$ разобъем $S(z)$ при данном N на два сомножителя

$$S(z) = S_1(z)\, S_2(z)\,, \tag{3.27}$$

где

$$S_1(z) = \prod_{i=r+1}^{r+s_1} |z_i + 1|\,, \quad S_2(z) = \prod_{i=r+s_1+1}^{n} |z_i + 1|\,,$$

причем

$$\left|\frac{N\tilde{x}_i}{a}\right| \geqslant 1 \quad , \text{ если } \quad i = r_1 + 1, \dots, r_1 + s_1\,,$$

$$\left|\frac{N\tilde{x}_i}{a}\right| < 1 \quad , \text{ если } \quad i = r_1 + s_1 + 1, \dots, n\,.$$

Доказывается, что

$$S_1\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right)\left\{ S_1\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N \leqslant \prod_{t=1}^{K} \max\left\{1, \left(\frac{N}{\tau_t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{\tau_t}\right)^N\right\}\,, \tag{3.28}$$

$$S_2\left(\frac{N\tilde{x}}{a}\right)\left\{ S_2\left(\frac{-\tilde{x}}{a}\right)\right\}^N \leqslant 1\,. \tag{3.29}$$

Соединяя оценки (3.24), (3.26), (3.28), (3.29) и учитывая (3.25) и (3.27), мы после логарифмирования получаем неравенство

$$\sum_{t=1}^{K} \log\left(\max\left\{1, \left(\frac{N}{\tau_t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{\tau_t}\right)^N\right\}\right) +$$

$$+ r_1 \left\{ \log\left(N\sqrt{2}(1+\lambda)+1\right) + N \log\left(\sqrt{2}(1+\lambda) - 1\right)\right\} + \tag{3.30}$$

$$+ r_2 \left\{ \log\left(N\sqrt{2}\left(1-(2-\alpha)\lambda\right) - 1\right) + N \log\left(\sqrt{2}\left(1-(2-\alpha)\lambda\right) - 1\right)\right\}\,.$$

8°. При $\lambda = \omega/n$, $n \geqslant n_0$ в условиях теоремы 2 для каждой возможной пары (r_1, r_2) неравенство (3.30) противоречит неравенству (3.5). Поэтому предположение (3.19) не верно. Тем самым мы получили оценку (3.15), равносильную теореме 2.

Подробное изложение результатов § 3, в частности, полное доказательство теоремы 2 (без предположения достижимости M_n), см. в работе :

Андриясян А.К., Ильин И.В., Малышев А.В. К неоднородной гипотезе Минковского. Применение ЭВМ к оценкам чеботаревского типа. – Редкол.журн. "Вестник ЛГУ, сер.матем., мех. и астроном". Л., 1986 ,
которая депонируется в ВИНИТИ.

Литература

1. М у х с и н о в Х.Х. Уточнение оценок арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм для больших размерностей. – В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.106, с.82–103; исправление см. [3].
2. М у х с и н о в Х.Х. Об оценках в неоднородной гипотезе Минковского для малых размерностей. – В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.106, с.104–133.
3. М у х с и н о в Х.Х. К неоднородной гипотезе Минковского (письмо в редакцию). – В кн.: Исследования по теории чисел.8. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.121, с.195–196.
4. Н а р з у л л а е в Х.Н., С к у б е н к о Б.Ф. Уточнение оценки арифметического минимума произведения неоднородных линейных форм. – В кн.: Исследования по теории чисел.5. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.82, с.88–94.
5. С к у б е н к о Б.Ф. Доказательство гипотезы Минковского о произведении линейных неоднородных форм от n переменных для $n \leq 5$. – В кн.: Исследования по теории чисел.2. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1973, т.33, с.6–36.
6. С к у б е н к о Б.Ф. Новый вариант доказательства неоднородной гипотезы Минковского для $n=5$. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.142, с.240–253.
7. С к у б е н к о Б.Ф. К гипотезе Минковского при больших n. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.148, с.218–224.
8. С к у б е н к о Б.Ф. Существуют квадратные вещественные матрицы любого порядка $n \geq 2880$, не являющиеся DOTU -матрицами. – В кн.: Исследования по теории чисел.7. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1981, т.106, с.134–136.
9. Ч е б о т а р е в Н.Г. Заметки по алгебре и теории чисел. – Уч.зап.Казанск.ун-та, 1934,т.94,№ 7, с.3–16. Перепеч.:

Собр.соч., т.I, М.-Л., 1949, с.208-221.

10. B a n b a h R.P., W o o d s A.C. Minkowski's conjecture for $n=5$: a theorem of Skubenko. - J.Number Theory, 1980, v.12, N 1, p.27-48.

11. B o m b i e r i E. Sul teorema di Tschebotarev. - Acta arithm., 1963, v.8, N 3, p.273-281.

12. D a v e n p o r t H. On a theorem of Tschebotareff. - J. London Math.Soc., 1946, v.21, N 1, p.28-34. Corr.: ibid., 1949, v.24, p.316.

13. D y s o n F.J. On the product of four non-homogeneous linear forms. - Ann.of Math.(2), 1948, v.49, p.82-109.

14. G r u b e r P. Eine Erweiterung des Blichfeldtschen Satzes mit einer Anwendung auf inhomogene Linearformen. - Monatsh. Math., 1967, Bd.71, N 2, S.143-147.

15. K o k s m a J.F. Diophantische Approximationen. - Berlin, 1936, viii + 157 S.

16. L e k k e r k e r k e r C.G. Geometry of numbers. - Groningen - Amsterdam, 1969, viii + 510 p.

17. M i n k o v s k i H. Diophantische Approximationen. - Leipzig, 1907, viii + 235 S.

18. M o r d e l l L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. - Vierteljahrschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich, 1940, Bd.85, Beiblatt, p.47-50.

19. M o r d e l l L.J. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms(II). - J.London Math.Soc., 1960, v.35, N 1, p.91-97.

20. M o r d e l l L.J. Note on the product of n inhomogeneous linear forms. - J.Number Theory, 1972, v.4, p.405-407.

21. R e m a k R. Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, I-II. - Math.Z., 1923, Bd.17, S.1-34; 1923, Bd.18, S.173-200.

22. W o o d s A.C. On a theorem of Tschebotareff. - Duke Math. J., 1958, v.25, N 4, p.631-637.