

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Петров, Прямой вариационный метод расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений,
Докл. АН СССР, 1981, том 257, номер 6, 1323–1327

<https://www.mathnet.ru/dan44404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

17 мая 2025 г., 11:17:45



А.Г. ПЕТРОВ

ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

(Представлено академиком Л.И. Седовым 12 XI 1980)

Вариационный принцип Рябушинского успешно применяется для доказательства теорем существования и единственности кавитационных течений, а также для исследования других свойств общего характера ^(1, 2). В настоящей работе дан прямой вариационный метод расчета как плоских, так и пространственных течений по схеме Рябушинского. Метод основан на известных вариационных соотношениях, связанных с принципом Рябушинского, и применяется для определения коэффициента сопротивления и отношения ширины к длине каверны в зависимости от числа кавитации.

Доказано, что формулы главного приближения при малых числах кавитации совпадают асимптотически с точными решениями, а для чисел кавитации порядка единицы относительная ошибка не превышает нескольких процентов. Таким образом, получены простые аналитические зависимости для коэффициента сопротивления и геометрических параметров каверны, которые обладают высокой точностью практически для всех чисел кавитации.

1. Соотношения для вариаций. Рассмотрим поверхность (контур) Σ , обтекаемый пространственным (плоским) стационарным потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Скорость на бесконечности направлена по оси x и равна v_∞ , давление на бесконечности равно p_∞ . Рассмотрим функционал поверхности (контура) Σ

$$(1) \quad U = (p_\infty - p_0) V - \frac{1}{2} v_\infty^2 M,$$

где V — объем (площадь) тела, ограниченного Σ , M — присоединенная масса тела, $p_0 < p_\infty$ — некоторое постоянное давление.

Как известно ⁽¹⁾, вариация функционала U определяется по формуле

$$(2) \quad \delta U = \int_{\Sigma} (p - p_0) \delta n \, dS,$$

где δn — перемещение варьируемой поверхности Σ по нормали, внешней к телу, p — давление жидкости на границе Σ при стационарном обтекании, которое определяется при помощи интеграла Бернулли.

Рассмотрим обтекание по схеме Рябушинского. На свободной части границы Σ_1 давление и скорость постоянны: $p = p_0$, $v = v_0$, остальные части границы Σ_0 и Σ'_0 — смоченные границы поверхностей, обтекаемой и симметрично расположенной, на которой замыкается каверна.

Для вариации всей границы Σ , реализующей течение Рябушинского, формула

(2) для вариации δU примет вид

$$(3) \quad \delta U = \int_{\Sigma_0} (p - p_0) \delta n \, dS + \int_{\Sigma'_0} (p - p_0) \delta n \, dS.$$

Если смоченные границы Σ_0 и Σ'_0 не варьируются, то $\delta U = 0$, что и составляет вариационный принцип Рябушинского.

2. Сила сопротивления. Для силы сопротивления F , действующей на конус Σ_0 , обтекаемый по схеме Рябушинского, в ⁽²⁾ получена точная формула

$$(4) \quad 2Fl_x = 3U, \quad F = \int_{\Sigma_0} (p - p_0) n_x \, dS,$$

где l_x — расстояние от центра каверны до вершины конуса (полудлина каверны).

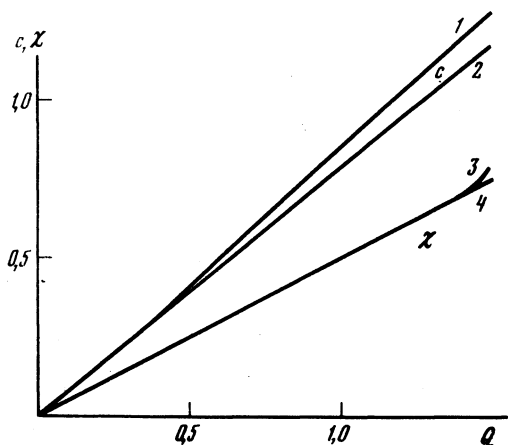


Рис. 1

Ниже будет получена аналогичная точная формула для клина в плоской задаче и приближенная формула для тел иной формы с оценкой погрешности. Формулы для силы типа (4) оказываются хорошим приближением для тел произвольной формы при малых числах кавитации.

Для того чтобы это показать, рассмотрим семейство $\Sigma(a)$ геометрически подобных границ, симметричных относительно осей x, y , где a — характерный размер Σ . Вариация параметра подобия a определяет вариации границы δn , функционала U и полудлины каверны l_x , причем l_x пропорциональна a : $\delta l_x = l_x \delta a/a$, фун-

кционал U для плоского случая пропорционален a^2 : $\delta U = 2U\delta a/a$, для пространственного — a^3 : $\delta U = 3U\delta a/a$. С учетом этого из (3) получим

$$(5) \quad iU \frac{\delta a}{a} = 2 \int_{\Sigma_0} (p - p_0) N l_x \frac{\delta a}{a},$$

где по определению принято $\delta n = N\delta l_x$, целое число i в плоской задаче $i = 2$, в пространственной $i = 3$.

Величины n_x и N на Σ_0 определяются по формулам

$$(6) \quad n_x = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad N - n_x = \frac{(x - l_x) dy - y dx}{l_x \sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

где x и y — координаты точки на Σ_0 .

Выражение $N - n_x \equiv 0$ только для конуса и клина. Поэтому только в этих случаях формула (4) оказывается точной. В общем случае имеет место асимптотическая формула

$$(7) \quad 2Fl_x = iU(1 + O(l/l_x)), \quad l/l_x \ll 1,$$

где l — характерная длина границы Σ_0 . Остаточный член в формуле (7) нетрудно оценить при помощи (6).

3. Вариационный метод. Рассмотрим семейство границ $\Sigma(l_x, l_y)$, определяемых двумя параметрами: $2l_x$ — длина, $2l_y$ — ширина. Функционал U , определенный на Σ по формуле (1), является функцией двух переменных $U = U(l_x, l_y)$, которую можно представить в виде

$$(8) \quad U = \frac{\rho v_\infty^2}{2} V(Q - m(\chi)),$$

$$Q = \frac{p_\infty - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = \frac{v_0^2 - v_\infty^2}{v_\infty^2},$$

где Q — число кавитации, m — присоединенная масса, отнесенная к объему V , зависит от одного безразмерного параметра $\chi = l_y/l_x$.

Из (7) и (8) можно определить коэффициент сопротивления, отнесенный к площади миделевого сечения каверны, который для плоского и пространствен-

ного случаев соответственно имеет вид

$$(9) \quad c = \frac{F}{\rho v_{\infty}^2 l_y} = \frac{V}{2l_x l_y} (Q - m(\chi)),$$

$$(10) \quad c = \frac{2F}{\rho v_{\infty}^2 \pi l_y^2} = \frac{3V}{2\pi l_x l_y^2} (Q - m(\chi)).$$

Эти формулы точные для клина и конуса и асимптотические в смысле (7) для тел иной формы.

Зависимость от числа кавитации Q отношения осей каверны χ можно получить из принципа Рябушинского. Для этого нужно проварьировать U по параметру l_y при фиксированном l_x . В соответствии с принципом Рябушинского $\partial U / \partial l_y = 0$, отсюда получим

$$(11) \quad Q = m + \frac{V}{l_x \partial V / \partial l_y} \frac{dm}{d\chi}.$$

Для определения конкретных зависимостей $c(\chi)$, $Q(\chi)$ необходимо задать конкретный вид семейства $\Sigma(l_x, l_y)$. Самые простые зависимости можно получить, если в качестве $\Sigma(l_x, l_y)$ выбрать семейство эллипсов (эллипсоидов вращения относительно оси x) с полуосями l_x, l_y . Вместе с тем, как покажет последующее сравнение с точными численными расчетами и экспериментальными данными, эти зависимости окажутся весьма точными в широком диапазоне чисел кавитации. Такое совпадение не случайно и обусловлено тем, что каверны имеют форму, близкую к эллипсу (эллипсоиду) (на это свойство каверн обращают внимание все экспериментаторы⁽³⁻⁷⁾, начиная с Райхардта⁽⁵⁾).

Для плоского случая формулы (9) и (11) дают

$$(12) \quad V = \pi l_x l_y, \quad m = \chi, \quad c = \frac{\pi}{4} Q, \quad \chi = \frac{1}{2} Q.$$

Для пространственного случая из (10) и (11) получим

$$(13) \quad V = \frac{4\pi}{3} l_x l_y^2, \quad m = -1 + (1 - \chi^{-2})(A(\chi) - \chi^{-2})^{-1},$$

$$A(\chi) = (1 - \chi^2)^{-1/2} \ln(\chi^{-1} + \sqrt{\chi^{-2} - 1}),$$

$$\chi \frac{dm}{d\chi} = (A(\chi) - \chi^{-2})(1 - 2m\chi^{-2}), \quad c(\chi) = \chi \frac{dm}{d\chi}, \quad Q = m + \frac{1}{2} \chi \frac{dm}{d\chi}.$$

4. Сравнение с точной теорией плоских каверн. На рис. 1 даны графики зависимостей от числа кавитации Q отношения осей каверны $\chi = l_y / l_x$ и коэффициента сопротивления c . Цифрами 1 и 3 обозначены кривые $c(Q)$ и $\chi(Q)$, рассчитанные по точным формулам^(1, 6, 8) для обтекания пластинки по схеме Рябушинского; кривые 2, 4 соответствуют этим же функциям $c(Q)$ и $\chi(Q)$, рассчитанные по приближенным формулам (12).

Относительная ошибка приближения (12) для $c(Q)$ и $\chi(Q)$ при $Q = 0,5$ составляет соответственно 4 и 0,25%, при $Q = 1$ — соответственно 6,5 и 1%, а при $Q = 1,5$ — соответственно 8 и 3%.

При $Q \ll 1$ формулы (12) совпадают с точными асимптотическими выражениями функций $c(Q)$ и $\chi(Q)$. В пределе $Q \rightarrow 0$ эллиптическая форма каверны переходит в параболу $y^2 = 2gx$, $g = l_y^2 / l_x$. Как следует из (12), параметр параболы связан с силой по формуле $F = \rho \pi v_{\infty}^2 g / 2$. Эти результаты в точности совпадают с формулами С.А. Чаплыгина^(8, 9) для асимптотического закона расширения плоских струй при обтекании по схеме Кирхгофа.

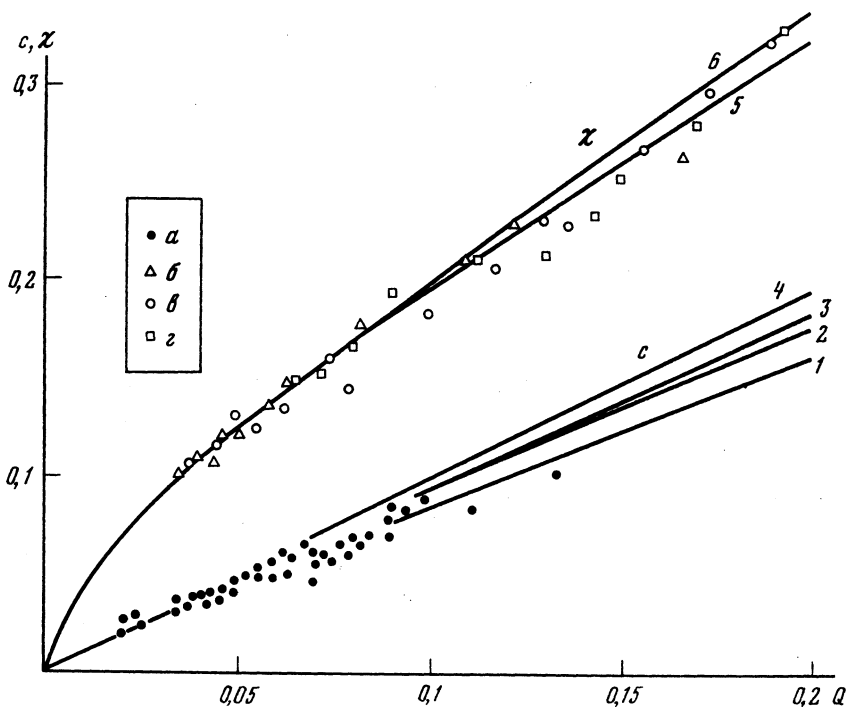


Рис. 2

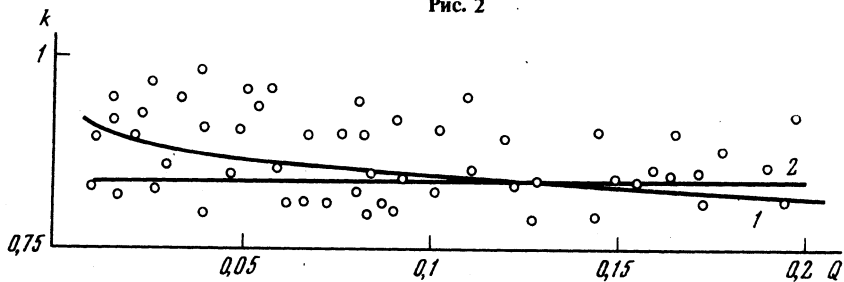


Рис. 3

5. Сравнение с асимптотической теорией тонких осесимметричных каверн. Из формул (13) можно получить следующие асимптотические формулы для $\chi \ll 1$:

$$(14) \quad m = \chi^2 \left(\ln \frac{2}{\chi} - 1 \right), \quad Q = \chi^2 \left(\ln \frac{4}{\chi^2} - \frac{5}{2} \right), \quad c = \chi^2 \left(\ln \frac{4}{\chi^2} - 3 \right).$$

Для $Q \ll 1$ из (14) можно получить следующие асимптотические зависимости:

$$(15) \quad \chi^2 = Q \left(\ln \frac{4}{Q} + \ln \ln \frac{4}{Q} - \frac{5}{2} \right)^{-1}, \quad c = Q - \frac{Q}{2 \ln 4/Q}.$$

Главные члены асимптотических выражений (15) $\chi^2 = Q / \ln(1/Q)$, $c = Q$ в точности совпадают с асимптотическими формулами Гарабедяна (2).

Рассмотрим закон расширения струй, вытекающий из формулы (14) для коэффициента сопротивления c , которую при помощи (10) можно записать в виде

$$(16) \quad \frac{l_y^2}{l_x} = \left(\frac{2F}{\rho \pi v_\infty^2 \ln(l_x^2/l_y^2)} \right)^{1/2}.$$

При $Q \ll 1$ эллипсоидальная каверна переходит в параболоид с параметром l_y^2/l_x . С учетом (16) его уравнение имеет вид

$$(17) \quad y^2 \approx 2 \left(\frac{2F}{\rho \pi v_\infty^2 \ln(l_x^2/l_y^2)} \right)^{1/2} x.$$

При $Q \rightarrow 0$ при постоянной силе F параметр параболоида стремится к нулю обратно пропорционально $\sqrt{\ln(l_x^2/l_y^2)}$. Это является отражением того факта, что асимптотическое решение струи происходит медленнее, чем по параболе⁽⁸⁾.

Интересно отметить, что в окрестности $x \sim l_x$, очевидно, y является величиной порядка l_y и уравнение свободной границы (17) в точности совпадает с асимптотическим законом расширения осесимметричной струи, найденной М.И. Гуревичем⁽⁸⁾.

Другие результаты кавитационных течений в приближении тонкого тела получены в^(3, 13, 14).

6. Сравнение с численными расчетами осесимметричных каверн. Численным расчетам осесимметричных каверн посвящено большое число работ, однако существенный прогресс был достигнут лишь в последнее время. Подробный анализ численных методов проведен в работе⁽¹⁰⁾, в которой получены, по-видимому, наиболее убедительные данные расчетов осесимметричных каверн по схеме типа Рябушинского. В этой же работе проведено сравнение с результатами расчетов других авторов.

На рис. 2 цифрами 1 и 5 обозначены зависимости $c(Q)$ и $\chi(Q)$, определяемые по формуле (13); 2, 3, 4 – зависимости $c(Q)$, найденные численно в работах соответственно^(10, 11, 12), 6 – зависимость $\chi(Q)$, найденная численно в⁽¹⁰⁾. Как показывает сравнение, аппроксимацию зависимостей $c(Q)$ и $\chi(Q)$ при помощи простых формул (13) следует признать удовлетворительной.

Сравнение с экспериментальными данными. Подробное сравнение численных расчетов с различными экспериментальными данными приведено в работе⁽¹⁰⁾. Поэтому, не останавливаясь подробно на этом вопросе, приведем три типичных примера, которые указывают на удовлетворительное согласие решения (13) с экспериментом.

На рис. 2 темными точками a обозначены экспериментальные данные⁽⁷⁾ для $c(Q)$, точками $b, в, г$ – экспериментальные данные Райхардта⁽⁵⁾ $\chi(Q)$ для дисков, диаметры которых соответственно равны 6,35; 12,7 и 25,4 мм.

На рис. 3 цифрой 1 обозначена зависимость $k = c/Q$, определенная по формуле (13); 2' – эмпирическая формула $k = 0,84$, предложенная Эпштейном, светлыми точками – результаты опытов Эпштейна^(4, 6).

Автор благодарит О.В. Воинова за обсуждение результатов работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
9 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, Струи, следы и каверны, М., "Мир", 1964. ² P.R. Garabedian, Pacific J. Math., № 6, 611 (1956). ³ Г.В. Логвинович, Гидродинамика течений со свободными границами, Киев, "Наукова думка", 1969. ⁴ Л.А. Эпштейн, Методы теории размерности и подобия в задачах гидромеханики судов, Л., "Судостроение", 1970. ⁵ Р. Кнэпп и др., Кавитация, М., "Мир", 1974. ⁶ А.Д. Перник, Проблемы кавитации, Л., "Судостроение", 1966. ⁷ И.Т. Егоров и др., Искусственная кавитация, Л., "Судостроение", 1971. ⁸ М.И. Гуревич, Теория струй идеальной жидкости, М., "Наука", 1979. ⁹ С.А. Чаплыгин, Тр. ЦАГИ, в. 240 (1935). ¹⁰ Л.Г. Гувезский, Численный анализ кавитационных течений. Препринт, № 40–79, СО АН СССР, Новосибирск, 1980. ¹¹ А.Н. Иванов, Гидродинамика развитых кавитационных течений, Л., "Судостроение", 1980. ¹² С.А. Brennen, J. Fluid Mech., v. 37, Part 4 (1969). ¹³ С.С. Григорян, Прикл. матем. и мех., т. 23, в. 5 (1955). ¹⁴ Ю.Л. Якимов, Мех. жидкости и газа, № 5 (1980).