Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Об одной задаче А. Н. Колмогорова,
Докл. АН СССР, 1985, том 283, номер 2, 313–314

https://www.mathnet.ru/dan47100

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
15 мая 2025 г., 03:54:01

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

Л.В. РОЗОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А.Н. КОЛМОГОРОВА

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 1 VI 1984)

Пусть $V(x)$, $U(x)$ – две функции распределения; $V_n(x)$, $U_n(x)$ – функции распределения сумм n соответствующих независимых случайных величин (т.е. $V_n(x) = V^{*n}(x)$, $U_n(x) = U^{*n}(x)$, $n \geqslant 1$). Спрашивается, при каких условиях и в каких зонах имеют место соотношения

$$(1)\qquad 1 - V_n(x) \sim 1 - U_n(x), \qquad V_n(-x) \sim U_n(-x), \qquad n \to \infty,$$

если известно, что распределения V и U совпадают при всех достаточно больших по абсолютной величине значениях аргумента.

Ниже приводится одно из возможных решений этой задачи, предложенной в [1], стр. 497, под названием "задача А.Н. Колмогорова".

Т е о р е м а 1. *Пусть*

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,dV(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dV(x) < \infty.$$

Если при некотором $a \geqslant 0$ и некотором целом $s \geqslant 2$

$$V(x) = U(x), \qquad |x| \geqslant a,$$

$$(3)\qquad \int_{-a}^{a} x^l d(V - U)(x) = 0, \qquad 1 \leqslant l \leqslant s,$$

то равномерно по $x \leqslant n^{s/(s+1)}/\rho_n$ выполняются соотношения (1). *Здесь последовательность $\{\rho_n\}$ сколь угодно медленно стремится к бесконечности.*

Условие (3), очевидно, выполняется, если у распределений V и U совпадают первые s моментов.

Зону выполнения (1) в условиях теоремы 1 нельзя расширить, не делая дополнительных предположений.

В самом деле, пусть V и U – функции распределения невырожденных, ограниченных по абсолютному значению, случайных величин. Из теоремы Крамера ([1], теорема 6.1.1) следует, что в случае выполнения условий (2), (3) асимптотическое поведение вероятности $1 - V_n(x)$ $(1 - U_n(x))$ в зоне $0 \leqslant x \leqslant n^{s/(s+1)}/\rho_n$ определяется первыми s или $s + 1$ моментами распределения $V\,(U)$ в зависимости от того, выполняется или нет условие $\liminf \rho_n = \infty$, и, следовательно, в условиях (3) и при $\liminf \rho_n < \infty$ соотношения (1) в зоне $x \leqslant n^{s/(s+1)}/\rho_n$ могут уже не иметь места.

Отметим, что условия выполнения соотношения (1) в зоне вида $[0, \Lambda_n]$ получены также в [2], однако в [2] величина Λ_n существенно зависит от поведения функции $1 - V(x)$ на бесконечности.

Далее приведем решение "одностороннего" варианта задачи А.Н. Колмогорова. Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть $s \geqslant 2$ целое, функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям $\Lambda(z) \uparrow \infty$, $\Lambda(z)/z^{(s-1)/(s+1)} \downarrow 0$, $z \uparrow \infty$. Пусть выполняется условие* (2) *и, кроме того, при некотором a*

$$(4)\qquad V(x) = U(x), \qquad x \geqslant a;$$

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{a} x^l dV(x) = \int_{-\infty}^{a} x^l dU(x), \qquad 1 \leqslant l \leqslant s.$$

Если

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{|y|^{s+1}}{z+|y|} d(V+U)(y) = o(z^s/\psi^{-1^2}(z)), \quad z \to \infty,$$

где $\psi^{-1}(z)$ – *функция, обратная к* $\psi(z) = z/\Lambda(z)$, *то*

$$(7) \qquad 1 - V_n(x) \backsim 1 - U_n(x), \qquad n \to \infty,$$

равномерно по $x \leqslant \sqrt{n}\,\Lambda(\sqrt{n})$.

Следствие. *Пусть* $\dfrac{s-2}{s} \leqslant \alpha < \dfrac{s-1}{s+1}$, *где целое* $s \geqslant 2$. *Если выполняются условия* (2), (4), (5) *и, кроме того,*

$$\int_{-\infty}^{-z} |y|^s d(V+U)(y) = o(z^{s-2/(1-\alpha)}), \qquad z \to \infty,$$

то (7) *выполняется равномерно по* $x \leqslant cn^{(\alpha+1)/2}$ *при любом* $c > 0$.

Как и в теореме 1, зону выполнения (7) в условиях теоремы 2, вообще говоря, нельзя расширить. Условие (6) также нельзя ослабить. Соответствующие примеры нехитро строятся при помощи "односторонних" теорем с больших уклонениях (см. [3–5]).

Всесоюзный научно-исследовательский
институт торфяной промышленности, Ленинград

Поступило
6 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с. 2. *Амосова Н.Н.* – Матем. заметки, 1983, т. 33, вып. 3, с. 463–471. 3. *Осипов Л.В.* – Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, вып. 2, с. 320–341. 4. *Розовский Л.В.* – Там же, 1981, т. 26, вып. 4, с. 847–857. 5. *Розовский Л.В.* – ДАН, 1983, т. 273, № 2, с. 301–306.

УДК 517.977.55 МАТЕМАТИКА

Д.Б. СИЛИН

РАЗРЫВНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 13 VI 1984)

В настоящей статье мы исследуем линейные задачи оптимального управления, в которых минимум функционала достигается на разрывных на множестве положительной меры управлениях. В работах [1, 2] установлено, что существуют задачи быстродействия, обладающие этим свойством. При этом обнаружено, что множество пар начальных и конечных состояний, для которых любое оптимальное управление разрывно на множестве положительной меры, может быть весьма "бо-