Е. Н. Михалкин, О решении уравнения пятой степени, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, номер 6, 20–30

Известия вузов. Математика
2009, № 6, с. 20–30

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Е.Н. МИХАЛКИН

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация. В статье устанавливается связь между двумя подходами к решению алгебраического уравнения пятой степени: подходами Эрмита–Кронекера (на основе модулярного эллиптического уравнения) и Меллина (на основе гипергеометрических рядов).

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрический ряд.

УДК: 511.334

Abstract. In this paper we establish the relationship between two approaches to the solution of algebraic fifth-degree equations, namely, the Hermite–Kronecker method (based on the modular elliptic equation) and the Mellin method (based on hypergeometric series).

Keywords: algebraic equation, hypergeometric series.

1. Общая схема решения уравнения пятой степени

В 1789 г. шведский математик Бринг [1], использовав преобразование Чирнгауза, свел общее алгебраическое уравнение пятой степени к уравнению вида

$$y^5 + 5y = a \tag{1}$$

(см. также [2], [3]). Известно ([2], [4]), что уравнение (1) разрешимо в терминах модулярных уравнений. Справедлива

Теорема (Эрмит–Кронекер)**.** *Решения уравнения*

$$y^5 + 5y = a$$

выражаются формулой

$$y_l(a) = \frac{a}{\omega_l^2(a) + 5}, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

где

$$\omega_l(a) = \frac{(v_\infty - v_l)(v_{l+1} - v_{l-1})(v_{l+2} - v_{l-2})}{\sqrt{5}\, f^3(\tau)} \tag{3}$$

(*индексы при* v *понимаются по модулю* 5)*,* f *и* a *связаны соотношением*

$$f^{12}(\tau) = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 256}}{2}. \tag{4}$$

Поступили: 09.04.2007, окончательный вариант 06.03.2008.

Работа выполнена в рамках грантов Президента РФ МК-2539.2008.1 и НШ-2427.2008.1, а также гранта Сибирского федерального университета по НМ проекту № 45.2007.

Здесь $v_0, \ldots, v_4, v_\infty$ — некоторые растяжения и сдвиги модулярной функции

$$u = f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k-1}) \Big|_{q=e^{i\pi\tau}},$$

а именно,

$$v_0 = f\left(\frac{\tau}{5}\right), \quad v_1 = f\left(\frac{\tau+96}{5}\right), \quad v_2 = f\left(\frac{\tau-48}{5}\right), \quad v_3 = f\left(\frac{\tau+48}{5}\right),$$

$$v_4 = f\left(\frac{\tau-96}{5}\right), \quad v_\infty = f\left(5\tau\right). \tag{5}$$

Параметр a из (1) однозначно выражается через модулярные функции

$$f(\tau),\ f_1(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1}) \Big|_{q=e^{i\pi\tau}}, \quad f_2(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k}) \Big|_{q=e^{i\pi\tau}}$$

равенством

$$\frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)} = a. \tag{6}$$

В [2] также показано, что значения $v_0, \ldots, v_4, v_\infty$ удовлетворяют модулярному уравнению

$$v^6 - u^5 v^5 + 4uv + u^6 = 0.$$

В данной работе дается решение модулярного уравнения на основе формулы Семушевой–Циха [5]. Затем выводится формула для решения уравнения (1) в виде ряда с указанием области сходимости.

2. Функция $\psi(\tau)$ и ее фундаментальная область

Для выяснения свойств функции $\psi(\tau) = \frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}$ исследуем некоторые свойства функции $f(\tau)$. В [2] показано, что в области

$$D = \{\operatorname{Im}\tau > 0,\ |\operatorname{Re}\tau| < 1,\ |\tau| > 1\}$$

функция $f^{24}(\tau)$ принимает каждое ненулевое значение лишь один раз. При этом некоторые значения принимаются этой функцией на границе области D. Договоримся далее рассматривать лишь те τ, для которых $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Приведем некоторые свойства функций $f^{24}(\tau)$ и $f^{12}(\tau)$ для случая, когда τ лежит на мнимой оси, а также на границе области D.

С1. В [2] показано, что $f(i) = \sqrt[4]{2}$. Из определения функции $f^{24}(\tau)$ легко увидеть, что когда τ пробегает вверх по мнимой оси от i до бесконечности, тогда $f^{24}(\tau)$ принимает действительные значения и возрастает от 64 до $+\infty$.

С2. Пусть τ пробегает по лучу $\tau = 1 + \eta i$ (η изменяется от 0 до $+\infty$, $\eta \neq 0$). В этом случае $f^{24}(\tau)$ изменяется от $-\infty$ до 0 (не принимая при этом значение нуль).

С3. Воспользовавшись тем, что преобразование $\tau \to \frac{\tau-1}{\tau+1}$ переводит дугу окружности $\tau = e^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$, в луч ηi, $\eta \geq 1$, а также тождествами

$$f(\tau) f\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right) = \sqrt{2}, \tag{7}$$

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = f(\tau), \tag{8}$$

доказанными в [2], получаем, что в случае, когда τ лежит на единичной окружности $|\tau| = 1$, где τ изменяется от i до ± 1, функция $f^{24}(\tau)$ изменяется от 64 (в точке i) до 0.

Далее отметим некоторые свойства функции $f^{12}(\tau)$.

С4. Аналогично свойству С1 функции $f^{24}(\tau)$ получаем, если τ пробегает вверх по мнимой оси от i до бесконечности, то $f^{12}(\tau)$ принимает действительные значения и возрастает от 8 до $+\infty$.

С5. В случае, когда $|\operatorname{Re}\tau| = 1$, действительная часть функции $f^{12}(\tau)$ обращается в нуль, причем $\operatorname{Im} f^{12}(\tau)$ изменяется от 0 до $\mp\infty$, когда $\operatorname{Re}\tau = \pm 1$ и $\operatorname{Im}\tau$ изменяется от 0 до $+\infty$ (данное свойство следует непосредственно из определения функции $f^{12}(\tau)$).

С6. Пользуясь равенствами (7) и (8), получаем, что при $|\tau| = 1$, где τ изменяется от i до ± 1, $f^{12}(\tau)$ изменяется от 8 до 0.

Из свойств С5, С6 следует

Утверждение 1. Всюду в области D действительная часть функции $f^{12}(\tau)$ положительная (на границе D — неотрицательная).

Доказательство. Действительно, если в какой-либо внутренней точке τ_0 области D имеем $\operatorname{Re} f^{12}(\tau) < 0$, то, соединив отрезком, целиком лежащим в D, точку τ_0 с граничной полуокружностью, получим, в силу непрерывности $f(\tau)$ в D, что в одной из внутренних точек отрезка $\operatorname{Re} f^{12}(\tau) = 0$. Но $f^{12}(\tau)$ принимает в D чисто мнимые значения лишь на граничных лучах. $\square$

Таким образом, для каждого ненулевого значения $b = f^{24}(\tau)$ функция $f^{12}(\tau)$ принимает в D то из значений $\pm\sqrt{b}$, действительная часть которого положительная. Если же действительная часть $\pm\sqrt{b}$ равна нулю, то значению $f^{12}(\tau)$ соответствует τ, находящееся на граничных лучах (см. С5). Следовательно, с учетом С6 справедливо

Следствие 1. В области D функция $f^{12}(\tau)$ принимает лишь один раз каждое значение, действительная часть которого положительна, кроме значений из отрезка $[0, 8]$.

Далее, в силу тождества ([2], с. 268)

$$\left(\frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}\right)^2 = f^{12}(\tau) - \frac{64}{f^{12}(\tau)} \tag{9}$$

для изучения функции $\psi(\tau)$ полезно рассмотреть функцию $\xi(\tau) = f^{12}(\tau) - \frac{64}{f^{12}(\tau)}$.

Покажем, что для функции $\xi(\tau)$ справедливо

Утверждение 2. *В замыкании области D функция $\xi(\tau)$ принимает любое комплексное значение. В области D каждое значение принимается этой функцией не более одного раза.*

Доказательство. Сначала покажем, что функцией $\xi(\tau)$ в области D или на ее границе принимается любое комплексное значение. В самом деле, если бы для некоторого значения a функция $\xi(\tau) \neq a$, то $f^{24}(\tau) - af^{12}(\tau) - 64 \neq 0$, а тогда $f^{12}(\tau)$ не принимает в D ни одного из двух значений $\frac{a\pm\sqrt{a^2+256}}{2}$. Это противоречит следствию 1.

Далее покажем, что ни для каких $\tau_1 \neq \tau_2$, лежащих в области D, не выполняется равенство $\xi(\tau_1) = \xi(\tau_2)$. Нетрудно убедиться, что последнее равенство выполняется в случае, когда

$$f^{12}(\tau_1)f^{12}(\tau_2) = -64. \tag{10}$$

Для этого достаточно составить следующую цепочку равенств:

$$\xi(\tau_1) = \xi(\tau_2) \Leftrightarrow f^{12}(\tau_1) - \frac{64}{f^{12}(\tau_1)} = f^{12}(\tau_2) - \frac{64}{f^{12}(\tau_2)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f^{12}(\tau_1) - f^{12}(\tau_2) = 64\,\frac{f^{12}(\tau_2) - f^{12}(\tau_1)}{f^{12}(\tau_1) f^{12}(\tau_2)} \Leftrightarrow f^{12}(\tau_1) f^{12}(\tau_2) = -64$$

(последний переход $\Leftrightarrow$ сделан в силу того, что функция $f^{12}(\tau)$ принимает в D каждое значение не более одного раза). Равенство (10) показывает, что $\xi(\tau_1) = \xi(\tau_2)$ в D тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} f^{12}(\tau_k)$, $k = 1, 2$, имеют противоположные знаки либо одновременно обращаются в нуль. В D возможна лишь ситуация, когда $\operatorname{Re} f^{12}(\tau_1) = \operatorname{Re} f^{12}(\tau_2) = 0$. В этом случае τ_1 и τ_2 лежат на граничных к D лучах. Итак, во внутренних точках области D функция $\xi(\tau)$ принимает каждое значение не более одного раза. □

Теперь перейдем к рассмотрению функции $\psi(\tau) = \frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}$. Справедливо равенство

$$\psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\psi(\tau). \tag{11}$$

Действительно, используя свойства функций $f(\tau), f_1(\tau), f_2(\tau)$, доказанные в [2], получаем

$$\psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{f_1^8(-\frac{1}{\tau}) - f_2^8(-\frac{1}{\tau})}{f^2(-\frac{1}{\tau})} = \frac{f_2^8(\tau) - f_1^8(\tau)}{f^2(\tau)} = -\psi(\tau).$$

В силу того, что преобразование $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ переводит область D в

$$D_1 = \left\{\operatorname{Im}\tau > 0,\ |\operatorname{Re}\tau| < 1,\ \left|\tau - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2},\ \left|\tau + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\},$$

в силу равенства (9), связывающего функции $\xi(\tau)$ и $\psi(\tau)$, утверждения 2 для функции $\xi(\tau)$ в D, а также равенства (11) получаем

Утверждение 3. В замыкании области D_1 функция $\psi(\tau)$ принимает любое комплесное значение. В области D_1 каждое значение принимается функцией $\psi(\tau)$ не более одного раза.

Следствие 2. Уравнение (6) разрешимо для любого a в области D_1 либо на ее границе.

3. Нахождение множества непрерывности функции $u^{12}(a) = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 256}}{2}$

В начале данного раздела речь пойдет о выборе знака перед радикалом в представлении функции $f^{12}(\tau)$ (упомянутом в разделе 1). Как следует из [2], при одном из двух значений радикала $\sqrt{a^4 + 256}$, где $a = \frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}$, справедливо равенство (4). Опишем способ нахождения нужного значения радикала. Отметим, что на основании следствия 2 достаточно рассмотреть значения τ из D_1. В утверждении 1 было показано, что во внутренних точках области D, а также на граничной к D полуокружности $\operatorname{Re} f^{12}(\tau) > 0$. Что же касается правой части (4), то так как

$$\frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 256}}{2} \cdot \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 256}}{2} = -64,$$

то возможны следующие случаи: 1) оба выражения $\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 256}}{2}$ действительные, причем одно из них отрицательное, а другое положительное; 2) выражения $\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 256}}{2}$ комплексные, причем действительная часть одного из выражений отрицательная, а другого – положительная, при этом мнимые части рассматриваемых выражений ненулевые; 3) рассматриваемые выражения чисто мнимые, при этом знаки мнимых частей совпадают.

Следовательно, в первом случае одно из двух выражений в правой части (4) можно выбрать, взяв арифметический квадратный корень из выражения a^4+256; во втором случае действительная часть выражения, стоящего в правой части (4), должна быть положительной. Что же касается третьего случая, то τ лежит на граничных к D лучах. Ограничимся рассмотрением первых двух случаев.

Пусть теперь τ — произвольное число, лежащее в области D_2. Отображение $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ переводит область D_2 в область D. Равенства (8) и (11) показывают, что при замене $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ обе части равенства (4) не изменятся. Таким образом, выбор знака $\pm$ перед радикалом в (4) в случае, когда $\tau \in D_2$, можно осуществлять как при $\tau \in D$. Итак, если τ — внутренняя точка области D_1, то выбор знака в выражении (4) осуществляется следующим условием:

$$\arg\sqrt{a^4+256} \in \begin{cases} [0;\frac{\pi}{2}), & \text{если } 0 \le \arg(a^4+256) < \pi, \\ (-\frac{\pi}{2};0), & \text{если } \pi < \arg(a^4+256) < 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому для $a = \frac{f_1^8(\tau)-f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}$ функция $\theta(a) = \sqrt{a^4+256}$ является непрерывной при $a^4+256 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Так как $a^4+256<0$ на лучах $(\operatorname{Re} a)^2 = (\operatorname{Im} a)^2$, где $|a|>4$, то полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. Функция $u^{12}(a) = \frac{a^2+\sqrt{a^4+256}}{2}$ является непрерывной в односвязной области плоскости переменного a, полученной удалением из $\mathbb{C}$ четырех лучей $(\operatorname{Re} a)^2 = (\operatorname{Im} a)^2$, где $|a|>4$.

4. Решение модулярного уравнения с помощью гипергеометрического ряда

Как было сказано в разделе 1, значения v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_∞, перечисленные в виде значений функции $f(\tau)$, являются корнями модулярного уравнения

$$v^6 - u^5v^5 + 4uv + u^6 = 0, \tag{12}$$

в котором $u = f(\tau)$. Запишем его в форме Меллина [6]

$$z^6 - iu^4z^5 + \frac{4i}{u^4}z - 1 = 0,$$

сделав подстановку $z = \frac{v}{u}i$.

Найдем решение этого уравнения. Заметим, что в уравнении при $|u| \ll 1$ коэффициент в слагаемом при z^5 является бесконечно малым, а в слагаемом при z — бесконечно большим. Поэтому, для решения рассматриваемого уравнения воспользуемся формулой Семушевой–Циха для аналитического продолжения гипергеометрического ряда в виде рядов Пюизо ([5]; о формулах аналитического продолжения гипергеометрических рядов см. также [7]). Согласно ей при малых $|u|$ корни уравнения запишутся в виде

$$z_j = \frac{u^4}{4i}e^{\frac{\pi ji}{3}} \sum_{|k|\ge 0} \frac{1}{k_1!\,k_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2} e^{-\frac{\pi ji}{3}(2k_1+k_2)}, \quad j=0,\dots,5.$$

Тогда корни уравнения (12) следующие:

$$v^{(j)} = -\frac{u^5}{4} e^{\frac{\pi j i}{3}} \sum_{|k|\geq 0} \frac{1}{k_1!\,k_2!} \frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)} \left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2} e^{-\frac{\pi j i}{3}(2k_1+k_2)} \tag{13}$$

(каждый из корней $v^{(j)}$ совпадает с некоторым v_k, $k = 0, \ldots, 4, \infty$). Найдем область сходимости рядов. Для этого достаточно найти область сходимости ряда

$$\sum_{|k|\geq 0} \frac{1}{k_1!\,k_2!} \frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)} \left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2} \tag{14}$$

с помощью формулы из [8] (также об областях сходимости рассматриваемого ряда см. [9]). Согласно [8] граница области сходимости рассматриваемого ряда задается параметризацией Горна–Капранова

$$|x_1| = \left|\frac{u^{24}}{4^5}\right| = \frac{q_1(4q_1+5q_2)^4}{(5q_1+6q_2)^5}, \quad |x_2| = \left|\frac{u^{24}}{4^6}\right| = \frac{q_2(4q_1+5q_2)^5}{(5q_1+6q_2)^6}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Делая замену $t := \frac{q_2}{q_1}$ и пользуясь тем, что $4|x_2| = |x_1|$, приходим к уравнению

$$4\frac{t(4+5t)^5}{(5+6t)^6} = \frac{(4+5t)^4}{(5+6t)^5}.$$

Решая последнее уравнение, с учетом $t > 0$ получаем $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Вычисления показывают, что при этом значении t модуль $|u^{12}| = 8$. Очевидно, ряд (14) сходится при $|u^{12}| \ll 1$. Таким образом, справедливо

Утверждение 5. Гипергеометрические ряды (13) сходятся при $|u^{12}| < 8$.

Для того чтобы найти те значения параметра a уравнения (1), при которых $|u^{12}| < 8$ (напомним, что связь между a и $u = f(\tau)$ выражается равенством (4)), докажем

Утверждение 6. Для $a \in \mathbb{C}$, модуль

$$|a^2 + \sqrt{a^4+256}| = 16 \tag{15}$$

лишь при $(\operatorname{Re} a)^2 = (\operatorname{Im} a)^2$, где $|a| \leq 4$.

Доказательство. Из вида произведения

$$(a^2 + \sqrt{a^4+256})(a^2 - \sqrt{a^4+256}) = -256$$

следует, что при $|a^2 + \sqrt{a^4+256}| = 16$ значения $a^2 \pm \sqrt{a^4+256}$ симметричны относительно мнимой оси (плоскости переменного a). После сдвига на $-a^2$ рассматриваемые выражения примут вид $\pm\sqrt{a^4+256}$ и, следовательно, будут симметричными относительно нуля. Однако такой сдвиг возможен лишь тогда, когда a^2 — чисто мнимое. Итак, $a = be^{\frac{\pi i}{4}(1+2k)}$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

Найдем все значения b, для которых выполняется (15). При $a = be^{\frac{\pi i}{4}(1+2k)}$ выражение $|a^2+\sqrt{a^4+256}|$ примет вид $|\pm b^2 i+\sqrt{-b^4+256}|$, и для $0 \leq b \leq 4$ имеем $|\pm b^2 i+\sqrt{-b^4+256}| = 16$. Для $b > 4$ выражение $|\pm b^2 i + \sqrt{-b^4+256}| \neq 16$. □

Теперь перейдем к нахождению всех тех значений a, при которых модуль функции $u^{12}(a) = \frac{a^2+\sqrt{a^4+256}}{2}$ меньше восьми. Напомним, что в утверждении 4 было показано, что рассматриваемая функция является непрерывной в каждом из четырех секторов $(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 < 0$, $(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 > 0$.

Несложно убедиться, что при чисто мнимых (ненулевых) значениях a функция $u^{12}(a)$ принимает действительные значения, причем $0 < u^{12}(a) < 8$, а при действительных (ненулевых) a функция $u^{12}(a)$ также действительная, причем $u^{12}(a) > 8$.

Итак, получили, что $0<u^{12}(a)<8$ при чисто мнимых значениях $a \neq 0$, модуль $|u^{12}(a)| = 8$ лишь на отрезках $(\operatorname{Re} a)^2 = (\operatorname{Im} a)^2$, где $|a| \leq 4$. Так как $u^{12}(a)$ непрерывна при $(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 < 0$, то в этих секторах $|u^{12}(a)| < 8$.

Воспользовавшись тем условием, что при действительных (ненулевых) a значения $u^{12}(a) > 8$, и рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что в секторах $(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 > 0$ выполняется неравенство $|u^{12}(a)| > 8$.

Сформулируем утверждение 5 с учетом полученного неравенства для функции $|u^{12}(a)|$ в секторах $(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 < 0$.

Теорема 1. *Гипергеометрические ряды* (13), *суженные на* $u^{12} = \frac{a^2+\sqrt{a^4+256}}{2}$, *сходятся в секторах*

$$(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 < 0.$$

5. Представление решения уравнения (1) в виде сужения гипергеометрических рядов на однопараметрический сдвиг

Следуя схеме решения уравнения (1), для нахождения y_0 требуется вычислить квадрат произведения

$$((v_\infty - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3))^2, \tag{16}$$

где v_j — сдвиги и растяжения (5) функции $f(\tau)$. Значения v_j являются корнями уравнения (12). В разделе 4 корни уравнения (12) были представлены в виде гипергеометрических рядов (13) и обозначены $v^{(k)}$. Сгруппируем $v^{(k)}$ таким образом, чтобы квадрат произведения $((v^{(j_0)} - v^{(j_1)})(v^{(j_2)} - v^{(j_3)})(v^{(j_4)} - v^{(j_5)}))^2$, $j_k = 0, \dots, 5$, $j_m \neq j_n$, совпал с (16).

Для этого достаточно разбить $v^{(j)}$ на 3 пары. Такой выбор удобнее сделать, когда параметр a в уравнении (1) принимает чисто мнимое значение. Как было показано выше, в этом случае τ лежит на окружности $\tau = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, фундаментальной области D_1 функции $\psi(\tau)$. Покажем, что с помощью преобразований $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ и $\tau \to \tau \pm 2$ величины $\frac{\tau+4}{5}$ и $\frac{\tau-4}{5}$ можно перевести на единичную окружность области D_1, а величины 5τ и $\frac{\tau}{5}$, $\frac{\tau+2}{5}$ и $\frac{\tau-2}{5}$ можно перевести так, чтобы соответствующие пары были симметричными относительно мнимой оси $\operatorname{Im}\tau$. Для краткости письма договоримся под $A \xrightarrow{\tau\to g(\tau)} B$ понимать $B = g(A)$, под b будем понимать $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Тогда при $\tau = e^{i\varphi}$ имеем

$$\frac{\tau}{5} = \frac{e^{i\varphi}}{5} \xrightarrow{\tau_0\to-\frac{1}{\tau_0}} -\frac{5}{e^{i\varphi}} = -5e^{-i\varphi}, \quad 5\tau = 5e^{i\varphi},$$

$$\frac{\tau-4}{5} = \frac{e^{i\varphi}-4}{5} \xrightarrow{\tau_0\to-\frac{1}{\tau_0}} -\frac{5}{e^{i\varphi}-4} = \frac{5\cos\varphi-20}{8\cos\varphi-17} + 5i\frac{\sin\varphi}{17-8\cos\varphi} =$$
$$= \frac{25b^2+15}{25b^2+9} + i\frac{10b}{b^2+9} \xrightarrow{\tau_1\to\tau_1-2} -\frac{25b^2+3}{25b^2+9} + 10i\frac{b}{25b^2+9} \xrightarrow{\tau_2\to-\frac{1}{\tau_2}} \frac{25b^2+3}{25b^2+1} +$$

$$+10i\frac{b}{25b^2+1} \xrightarrow{\tau_3\to\tau_3-2} \frac{-25b^2+1}{25b^2+1}+10i\frac{b}{25b^2+1}.$$

Значение последнего выражения лежит на единичной окружности с центром в начале координат.

Аналогично, после применения к $\frac{\tau+4}{5}$ преобразований $\tau_0\to-\frac{1}{\tau_0}$, $\tau_1\to\tau_1+2$, $\tau_2\to-\frac{1}{\tau_2}$, $\tau_3\to\tau_3+2$ оно переходит в значение $\frac{25-b^2}{25+b^2}+10i\frac{b}{25+b^2}$, также лежащее на единичной окружности.

Далее, применяя последовательно преобразования $\tau_0\to-\frac{1}{\tau_0}$, $\tau_1\to\tau_1-2$ к выражению $\frac{\tau-2}{5}$, получим, что $\frac{\tau-2}{5}$ переходит в $\frac{3-3b^2}{1+9b^2}+10i\frac{b}{1+9b^2}$, а с помощью преобразований $\tau_0\to-\frac{1}{\tau_0}$, $\tau_1\to\tau_1+2$, $\tau_2\to-\frac{1}{\tau_2}$ выражение $\frac{\tau+2}{5}$ переходит в $\frac{-3+3b^2}{1+9b^2}+10i\frac{b}{1+9b^2}$.

Теперь применим свойства функции $f(\tau): f(\tau\pm2)=e^{\mp\frac{\pi i}{12}}f(\tau)$, $f(-\frac{1}{\tau})=f(\tau)$, доказанные в [2], к полученным выше выражениям:

$$v_1=f\left(\frac{\tau+96}{5}\right)=e^{-\frac{5\pi i}{6}}f\left(\frac{\tau-4}{5}\right)=e^{-\frac{11\pi i}{12}}f\left(-\frac{25b^2+3}{25b^2+9}+10i\frac{b}{25b^2+9}\right)=$$

$$=e^{-\frac{11\pi i}{12}}f\left(\frac{25b^2+3}{25b^2+1}+10i\frac{b}{25b^2+1}\right)=-f\left(\frac{-25b^2+1}{25b^2+1}+10i\frac{b}{25b^2+1}\right),$$

$$v_4=f\left(\frac{\tau-96}{5}\right)=e^{\frac{5\pi i}{6}}f\left(\frac{\tau+4}{5}\right)=-f\left(\frac{25-b^2}{25+b^2}+10i\frac{b}{25+b^2}\right).$$

В силу того, что при $\tau=e^{i\varphi}$ функция $f(\tau)$ действительная, то v_1, v_4 — действительные.

С помощью аналогичных действий приходим к следующим выражениям для v_2 и v_3:

$$v_2=f\left(\frac{\tau-48}{5}\right)=e^{\frac{5\pi i}{12}}f\left(\frac{\tau+2}{5}\right)=i\cdot f\left(\frac{-3+3b^2}{1+9b^2}+10i\frac{b}{1+9b^2}\right), \tag{17}$$

$$v_3=f\left(\frac{\tau+48}{5}\right)=e^{-\frac{5\pi i}{12}}f\left(\frac{\tau-2}{5}\right)=-i\cdot f\left(\frac{3-3b^2}{1+9b^2}+10i\frac{b}{1+9b^2}\right). \tag{18}$$

Так как аргументы функции $f(\tau)$ в выражениях (17), (18) симметричны относительно мнимой оси $\operatorname{Re}\tau=0$, то выражения v_2 и v_3 сопряжены. По этой же причине и пара v_0, v_∞ сопряжена.

Таким образом, среди корней $v^{(j)}=-iuz_j(u)$ модулярного уравнения (где $z_j(u)$ — это ряды (13)) искомыми парами будут следующие: $v^{(0)}$ и $v^{(3)}$, $v^{(1)}$ и $v^{(5)}$, $v^{(2)}$ и $v^{(4)}$.

Теперь найдем результат умножения $(v^{(0)}-v^{(3)})(v^{(1)}-v^{(5)})(v^{(2)}-v^{(4)})$, т.е. значение выражения, квадрат которого совпадает с (16). Для этого вычислим отдельно каждую из разностей, входящую в произведение:

$$v^{(0)}-v^{(3)}=-\frac{u^5}{4}\sum_{|k|\geq0}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2}(1+e^{-\pi(2k_1+k_2)i})=$$

$$=-\frac{u^5}{2}\sum_{\substack{k_2\text{ — четные,}\\|k|\geq0}}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2}=$$

$$=-\frac{u^5}{2}\sum_{|k|\geq0}\frac{1}{k_1!(2k_2)!}\frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{2k_2}.$$

С помощью аналогичных действий приходим к следующим рядам для $v^{(1)}-v^{(5)}$ и $v^{(2)}-v^{(4)}$:

$$v^{(1)}-v^{(5)}=\frac{u^5}{2}i\sum_{|k|\geq 0}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2}\sin\frac{\pi}{3}(2k_1+k_2-1),$$

$$v^{(2)}-v^{(4)}=-\frac{u^5}{2}i\sum_{|k|\geq 0}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+6k_2)}{\Gamma(2+4k_1+5k_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{k_2}\sin\frac{2\pi}{3}\left(2k_1+k_2+\frac{1}{2}\right).$$

Поэтому

$$(v^{(0)}-v^{(3)})(v^{(1)}-v^{(5)})(v^{(2)}-v^{(4)})=-\frac{u^{15}}{8}\sum_{\substack{|k|\geq 0,\\ |l|\geq 0,\\ |m|\geq 0}}\frac{1}{k_1!(2k_2)!\,l_1!\,l_2!\,m_1!\,m_2!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)}\frac{\Gamma(1+5l_1+6l_2)}{\Gamma(2+4l_1+5l_2)}\frac{\Gamma(1+5m_1+6m_2)}{\Gamma(2+4m_1+5m_2)}\left(\frac{u^{24}}{4^5}\right)^{k_1+l_1+m_1}\left(\frac{u^{24}}{4^6}\right)^{2k_2+l_2+m_2}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi}{3}(2l_1+l_2-1)\sin\frac{2\pi}{3}\left(2m_1+m_2+\frac{1}{2}\right).$$

После достаточно очевидных действий выражение для $(v^{(0)}-v^{(3)})(v^{(1)}-v^{(5)})(v^{(2)}-v^{(4)})$ запишется в виде

$$\frac{u^{15}}{32}\sum_{\substack{|k|\geq 0,\\ |l|\geq 0,\\ |m|\geq 0}}\frac{(-1)^{l_2}}{k_1!(2k_2)!\,l_1!\,l_2!\,m_1!\,m_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)}\frac{\Gamma(1+5l_1+6l_2)}{\Gamma(2+4l_1+5l_2)}\frac{\Gamma(1+5m_1+6m_2)}{\Gamma(2+4m_1+5m_2)}\times$$

$$\times z_1^{k_1}z_2^{2k_2}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}w_1^{l_1}w_2^{l_2}w_1^{m_1}w_2^{m_2}+e^{-\frac{\pi i}{3}}\xi_1^{l_1}\xi_2^{l_2}\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}+w_1^{l_1}w_2^{l_2}\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}+\xi_1^{l_1}\xi_2^{l_2}w_1^{m_1}w_2^{m_2}\right),$$

где $z_1=\frac{u^{24}}{4^5}$, $z_2=\frac{u^{24}}{4^6}$, $w_1=\frac{u^{24}}{4^5}e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $w_2=\frac{u^{24}}{4^6}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, $\xi_1=\frac{u^{24}}{4^5}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, $\xi_2=\frac{u^{24}}{4^6}e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Преобразуя полученное выражение, приходим к окончательному ответу для произведения $(v^{(0)}-v^{(3)})(v^{(1)}-v^{(5)})(v^{(2)}-v^{(4)})$:

$$\frac{u^{15}}{32}\sum_{\substack{|k|\geq 0,\\ |l|\geq 0,\\ |m|\geq 0}}\frac{(-1)^{l_2}}{k_1!(2k_2)!\,l_1!\,l_2!\,m_1!\,m_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)}\frac{\Gamma(1+5l_1+6l_2)}{\Gamma(2+4l_1+5l_2)}\frac{\Gamma(1+5m_1+6m_2)}{\Gamma(2+4m_1+5m_2)}\times$$

$$\times\frac{\zeta_0^{k_1+2k_2}}{4^{2k_2+l_2+m_2}}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\zeta_1^{l_1+m_1}\zeta_2^{l_2+m_2}+e^{-\frac{\pi i}{3}}\zeta_1^{l_2+m_2}\zeta_2^{l_1+m_1}+\zeta_1^{l_1+m_2}\zeta_2^{l_2+m_1}+\zeta_1^{l_2+m_1}\zeta_2^{l_1+m_2}\right),$$

где $\zeta_j=\frac{u^{24}}{4^5}\varepsilon^j$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Тогда ω_0 в равенстве (3) примет вид

$$\omega_0=\pm\frac{u^{12}}{32\sqrt{5}}\sum_{\substack{|k|\geq 0,\\ |l|\geq 0,\\ |m|\geq 0}}\frac{(-1)^{l_2}}{k_1!(2k_2)!\,l_1!\,l_2!\,m_1!\,m_2!}\frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)}\frac{\Gamma(1+5l_1+6l_2)}{\Gamma(2+4l_1+5l_2)}\frac{\Gamma(1+5m_1+6m_2)}{\Gamma(2+4m_1+5m_2)}\times$$

$$\times\frac{\zeta_0^{k_1+2k_2}}{4^{2k_2+l_2+m_2}}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\zeta_1^{l_1+m_1}\zeta_2^{l_2+m_2}+e^{-\frac{\pi i}{3}}\zeta_1^{l_2+m_2}\zeta_2^{l_1+m_1}+\zeta_1^{l_1+m_2}\zeta_2^{l_2+m_1}+\zeta_1^{l_2+m_1}\zeta_2^{l_1+m_2}\right).$$

Теперь подставим полученное значение ω_0 в равенство (2). Заметим, что при чисто мнимых a корень y_0 уравнения (1) также является чисто мнимым. Действительно, из проведенных выше рассуждений для рассматриваемых значений a следует, что величина ω_0 действительная, и в силу (2) y_0 чисто мнимое. В частности, $y_0(6i) = i$. Полученный результат совместно с теоремой 1 и формулой (4), связывающей параметр a уравнения (1) со значением модулярной функции $u = f(\tau)$, сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Ветвь решения $y(a)$ уравнения* (1) *с условием $y(6i) = i$ находится по формуле*

$$y(a) = \frac{a}{\omega^2(a) + 5}.$$

Величина $\omega(a)$ выражается суммой гипергеометрических рядов

$$\omega(a) = \frac{t}{32\sqrt{5}} \sum_{\substack{|k|\geq 0,\\ |l|\geq 0,\\ |m|\geq 0}} \frac{(-1)^{l_2}}{k_1!(2k_2)!\,l_1!\,l_2!\,m_1!\,m_2!} \frac{\Gamma(1+5k_1+12k_2)}{\Gamma(2+4k_1+10k_2)} \frac{\Gamma(1+5l_1+6l_2)}{\Gamma(2+4l_1+5l_2)} \frac{\Gamma(1+5m_1+6m_2)}{\Gamma(2+4m_1+5m_2)} \times$$

$$\times \frac{\zeta_0^{k_1+2k_2}}{4^{2k_2+l_2+m_2}} \left(e^{\frac{\pi i}{3}} \zeta_1^{l_1+m_1} \zeta_2^{l_2+m_2} + e^{-\frac{\pi i}{3}} \zeta_1^{l_2+m_2} \zeta_2^{l_1+m_1} + \zeta_1^{l_1+m_2} \zeta_2^{l_2+m_1} + \zeta_1^{l_2+m_1} \zeta_2^{l_1+m_2} \right), \quad (19)$$

вычисленных при $\zeta_j = \frac{t^2}{4^5}\varepsilon^j$, где

$$t = \frac{a^2 + \sqrt{a^4+256}}{2}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$ *— первообразный корень степени 3 из единицы.*

Как функциональные ряды переменного a, они сходятся в секторах

$$(\operatorname{Re} a)^2 - (\operatorname{Im} a)^2 < 0.$$

Отметим, что каждый из четырех рядов в (19) представляется суммой девяти гипергеометрических рядов от переменных $\left(\frac{t^2}{4^5}, \frac{t^4}{4^{12}}, \frac{t^6}{4^{15}}, \frac{t^6}{4^{18}}, \frac{t^6}{4^{15}}, \frac{t^6}{4^{18}}\right)$. Таким образом, участвующие в теореме 2 ряды можно интерпретировать как сужения шестикратных гипергеометрических рядов переменных $(z_1, z_2, w_1, w_2, s_1, s_2)$ на однопараметрический сдвиг

$$z_1 = \frac{t^2}{4^5}, \quad z_2 = \frac{t^4}{4^{12}}, \quad w_1 = \frac{t^6}{4^{15}}, \quad w_2 = \frac{t^6}{4^{18}}, \quad s_1 = \frac{t^6}{4^{15}}, \quad s_2 = \frac{t^6}{4^{18}}$$

(предполагается, что степени переменных z_i, w_i, s_i обозначают соответственно k_i, l_i, m_i).

Литература

[1] Bring E.S. *Meletamata quaedam mathematica circa transformationem aequationen algebraicarum.* – Uppsala. – 1786. – V. 107.

[2] Прасолов В.В., Соловьев Ю.П. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения.* – М.: Факториал, 1997. – 288 с.

[3] Клейн Ф. *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.* – М.: Наука, 1989. – 336 с.

[4] Чеботарев Н.Г. *Теория Галуа.* – М.: Объединенное научн.-техн. изд. НКТП СССР, 1936. – 154 с.

[5] Семушева А.Ю., Цих А.К. *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений* // Комплексный анализ и дифферен. операторы (к 150-летию С.В. Ковалевской). – 2000. – С. 134–146.

[6] Mellin H.J. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1921. – V. 172. – P. 658–661.

[7] Пассаре М., Цих А.К., Чешель А.А. *Кратные интегралы Меллина–Барнса как периоды многообразий Калаби–Яу с несколькими модулями* // Теор. и матем. физика. – 1996. – Т. 109. – № 3. – С. 381–394.

[8] Семушева А.Ю. *Об областях сходимости гипергеометрических рядов многих переменных* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 4. – С. 888–897.

[9] Passare M., Tsikh A. *Algebraic equations and hypergeometric series* // The legacy of N.H. Abel. – Springer-Verlag. – 2004. – P. 653–672.

Е.Н. Михалкин

доцент, кафедра математического анализа и методики его преподавания,
Красноярский государственный педагогический университет,
660049, г. Красноярск, ул. Лебедевой, д. 89,

`e-mail:` mikhalkin@bk.ru

E.N. Mikhalkin

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis and Teaching Principles,
Krasnoyarsk State Pedagogical University,
89 Lebedeva str., Krasnoyarsk, 660049 Russia,

`e-mail:` mikhalkin@bk.ru