А. Ф. Вакуленко, Унитарная регуляризация в многочастичной задаче рассеяния, *Докл. АН СССР*, 1979, том 249, номер 4, 825–828

Доклады Академии наук СССР
1979. Том 249, № 4

УДК 517.9 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.Ф. ВАКУЛЕНКО

УНИТАРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В МНОГОЧАСТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 20 VIII 1979)

Теория рассеяния для системы трех частиц была построена в работе Л.Д. Фаддеева ([1]). Этой же задаче посвящены работы ([2], [3]), содержащие определенные технические усовершенствования. Задача рассеяния для систем с большим числом частиц изучалась в ([4-6]). В настоящей статье рассматриваются системы с произвольным конечным числом, никакая подсистема которых не имеет связанных состояний и виртуальных уровней. Для таких систем доказываем полноту волновых операторов. Доказательства проводятся индукцией по числу частиц. Строим унитарный оператор, трансформирующий оператор энергии системы в оператор, по своим качествам подобный двухчастичному оператору Шредингера. Структура этого унитарного оператора, который называем унитарным регуляризатором, близка к структуре волнового оператора, и при его построении используются только волновые операторы для подсистем. Метод, который мы используем, был ранее развит применительно к многочастичной модели Фридрихса ([7], [8]).

Автор приносит глубокую благодарность В.С. Буслаеву за постановку задачи и внимание к работе.

1. Введем класс гладких в смысле Фридрихса операторов, действующих в пространстве $L_2(R^n)$. Пусть S^{n-1} – сфера в R^n и $\alpha > 0$. Обозначим $W_2^\alpha(S^{n-1})$ пространство Соболева, которое считаем вложенным в $L_2(S^{n-1})$. Обозначим Q^α пространство операторов в $L_2(S^{n-1})$, для которых конечна норма $\|A\|_{Q^\alpha} = \|A\|_{L_2 \to W_2^\alpha} + \|A^*\|_{L_2 \to W_2^\alpha}$. Известно, что операторы из Q^α компактны. Отображение π, сопоставляющее функции $f \in L_2(R^n)$ функцию $g \in L_2(R^+, L_2(S^{n-1}))$, определенную следующим образом: $g(t, \omega) = t^{\frac{n-1}{2}} f(t, \omega)$, $t \in R^+$, $\omega \in S^{n-1}$ является изоморфизмом. Будем говорить, что оператор K, действующий в $L_2(R^n)$, принадлежит классу Λ, если $\pi K \pi^{-1}$ – интегральный оператор, заданный формулой

$$(\pi K \pi^{-1} f)(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\, \mathscr{K}(x, y) f(y) dy,$$

и для некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > ½$, $\theta > ½$, функция $\mathscr{K}$: $R^+ \times R^+ \to Q^\alpha$ удовлетворяет условиям:

1. $\|\mathscr{K}(x)\|_{Q^\alpha} \leqslant \mathrm{const}(1 + |x|)^{-\theta}$;
2. $\|\mathscr{K}(x+h) - \mathscr{K}(x)\|_{Q^\alpha} \leqslant \mathrm{const}|h|^\beta (1 + |x|)^{-\theta}$;
3. $\mathscr{K}$ обращается в нуль на границе области $R^+ \times R^+$;
4. $\|\mathscr{K}(tx) - \mathscr{K}(x)\|_{Q^\alpha} \leqslant \mathrm{const}|t - 1|^\gamma (1 + |x|)^{-\theta}$; $t \in (1, 2)$.

Последнее условие означает, что на выделенных направлениях функция $\mathscr{K}$ обладает повышенной гладкостью. Для $K \in \Lambda$ определим оператор ΓK, задав $\pi(\Gamma K)\pi^{-1}$ как интегральный оператор с ядром $\sqrt{xy}(x^2 - y^2 - io)^{-1}\mathscr{K}(x, y)$. Множество таких операторов обозначим через $\Gamma\Lambda$. Подробное изложение метода Фридрихса и, в частности, свойств операции Γ можно найти в ([9]).

2. Определим теперь оператор энергии системы нескольких квантовых частиц и сформулируем основной результат работы. Все рассмотрения будем проводить в импульсном представлении. Пространство состояний системы Ω обозначим через $\mathcal{H}_\Omega$. Если система из нескольких подсистем $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, то $\mathcal{H}_\Omega = \mathcal{H}_{\Omega_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{\Omega_m}$. Для системы, состоящей всего из одной частицы, $\mathcal{H}_\Omega = L_2(R^3)$, для системы n частиц $\mathcal{H}_\Omega = L_2(R^{3n})$, при этом фиксировано разложение $R^{3n} = R^3 \oplus \ldots \oplus R^3$. Вектор $p \in R^{3n}$ можно записать в виде $(p_1, \ldots, p_n)$, где $p_s \in R^3$; в R^{3n} выделим подпространство R_Ω, заданное уравнением $p_1 + \ldots + p_n = 0$, и ортогональное к нему подпространство R'_Ω. Имеет место разложение $\mathcal{H}_\Omega = L_2(R_\Omega) \otimes L_2(R'_\Omega) = \mathfrak{H}_\Omega \otimes \mathfrak{H}'_\Omega$. Аналогично, для каждой подсистемы Ω_1, содержащей не менее двух частиц, определено разложение

$$(1) \qquad \mathcal{H}_\Omega = \mathfrak{H}_{\Omega_1} \otimes \mathfrak{H}'_{\Omega_1} \otimes \mathcal{H}_{\Omega_2},$$

где Ω_2 – дополнительная к Ω_1 подсистема. Оператор кинетической энергии системы H^0_Ω действует в $\mathcal{H}_\Omega$ согласно формуле $(H^0_\Omega f)(p) = |p|^2 f(p)$. Оператор взаимодействия возьмем в виде суммы ΣV_{Ω_1}, где суммирование проводится по всем подсистемам Ω_1, содержащим не менее двух частиц, и оператор V_{Ω_1} в разложении (1) имеет вид $v_{\Omega_1} \otimes I \otimes I$. Мы потребуем, чтобы оператор v_{Ω_1} был симметричным и принадлежал классу Λ (если взаимодействие в системе потенциально, то наши условия примерно соответствуют убыванию потенциала как $r^{-\alpha}$ с $\alpha > 2$). Оператор полной энергии системы есть $H_\Omega = H^0_\Omega + \Sigma V_{\Omega_1}$, причем сумму следует определять с помощью квадратичных форм. В представлении $\mathcal{H}_\Omega = \mathfrak{H}_\Omega \otimes \mathfrak{H}'_\Omega$ имеем: $H^0_\Omega = h^0_\Omega \otimes I + I \otimes h'_\Omega$ и $H_\Omega = h_\Omega \otimes I + I \otimes h'_\Omega$.

Связанным состояниям системы Ω соответствуют собственные значения оператора h_Ω, принадлежащие точечному спектру. В этой работе мы рассматриваем только такие системы, никакая подсистема которых не имеет связанных состояний и так называемых виртуальных уровней, определение которых будет дано ниже. Волновой оператор w_Ω определяется как предел $\text{s-lim} \exp(ith_\Omega) \cdot \exp(-ith^0_\Omega)$ при $t \to -\infty$. Из определения следует, что w_Ω – изометрический оператор, и выполняется соотношение $h_\Omega w_\Omega = w_\Omega h^0_\Omega$, называемое сплетающим свойством. Волновой оператор w_Ω называется полным, если $w_\Omega w^*_\Omega = P$, где P – проектор на абсолютно-непрерывное подпространство оператора h_Ω. Одновременно с w_Ω удобно рассматривать оператор W_Ω, определенный как предел $\text{s-lim} \exp(itH_\Omega) \cdot \exp(-itH^0_\Omega)$ при $t \to -\infty$. Между W_Ω и w_Ω имеется простая связь, а именно $W_\Omega = w_\Omega \otimes I$. Если система Ω состоит из нескольких подсистем $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, то волновой оператор W_Ω выражается через волновые операторы для подсистем W_{Ω_s}, действующие в $\mathcal{H}_{\Omega_s}$, следующим образом: $W_\Omega = W_{\Omega_1} \otimes \ldots \otimes W_{\Omega_m}$. Разбиения системы Ω на непересекающиеся подсистемы $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, где $m \geqslant 2$, будем обозначать буквой A.

Определим по индукции связную часть $W^{\text{св}}_\Omega$ оператора W_Ω. Если система состоит из одной частицы, то $W^{\text{св}}_\Omega = I$; для произвольной системы Ω положим $W^{\text{св}}_\Omega = W_\Omega - \Sigma(\otimes W^{\text{св}}_{\Omega_s})$, где суммирование проводится по всем разбиениям A. Связная часть оператора w_Ω определится из равенства $W^{\text{св}}_\Omega = w^{\text{св}}_\Omega \otimes I$. Основной результат работы

Теорема 1. *Пусть во всех подсистемах системы Ω отсутствуют связанные состояния и виртуальные уровни, тогда существует полный волновой оператор w_Ω; при этом, если в самой системе нет виртуального уровня и связанных состояний с неотрицательной энергией, то $w^{\text{св}}_\Omega \in \Gamma\Lambda$.*

3. Унитарный регуляризатор, существование которого утверждается в теореме 2, является в нашем подходе основным средством исследования оператора

энергии системы многих частиц. Этап построения унитарного регуляризатора примерно соответствует выводу интегральных уравнений с компактным оператором для ядра резольвенты.

Т е о р е м а 2. *Пусть для любой подсистемы* Ω_1 *системы* Ω *выполнено* $w^{\text{св}}_{\Omega_1} \in \Gamma\Lambda$, *тогда существует унитарный оператор "u" такой, что* $u^* h_\Omega u - h^0_\Omega \in \Lambda$.

Зафиксируем теперь систему Ω, ее подсистемы будем обозначать буквами a, b, c. Для подсистемы a обозначим через Λ_a и $\Gamma\Lambda_a$ классы операторов, действующих в $\mathcal{H}_\Omega$ и имеющих в разложении (1) (в котором в качестве Ω_1 следует взять a) вид соответственно $K \otimes I \otimes I$ и $\Gamma K \otimes I \otimes I$, где $K \in \Lambda$. В дальнейших построениях будем пользоваться следующим утверждением.

Л е м м а 1. *Пусть* $a \cap b \neq \phi$, *положим* $a \cup b = c$. *Тогда*

$$\Lambda_a(\Gamma\Lambda_b) \subset \Lambda_c; \quad (\Gamma\Lambda_a)(\Gamma\Lambda_b) \subset \Gamma\Lambda_c.$$

Опишем план доказательства теоремы 2. Нам удобнее строить не сам оператор u, а оператор U, действующий в $\mathcal{H}_\Omega$ и равный $u \otimes I$. Тогда U должен быть унитарным, и должно быть выполнено: $U^* H_\Omega U - H^0_\Omega \in \Lambda_\Omega$. Оператор U будем искать в виде

$$U = \sum_A \Big(\bigotimes_{a \in A} W^{\text{св}}_a \Big) + U^{\text{св}}, \tag{2}$$

где $U^{\text{св}}$ – некоторый оператор из $\Gamma\Lambda_\Omega$. Пользуясь сплетающим свойством, нетрудно установить равенство $H_\Omega U - U H^0_\Omega = \sum V_b \big(\bigotimes_{a \in A} W^{\text{св}}_a \big) + \sum V_b U^{\text{св}}$. В первой сумме берутся такие b и A, что, если $a \in A$, то $a \cap b \neq \phi$. Из леммы 1 следует, что правая часть равенства принадлежит Λ_Ω. Если предположить, что оператор U унитарен, то из $H_\Omega U - U H^0_\Omega \in \Lambda_\Omega$ следует, что $U^* H_\Omega - H^0_\Omega \in \Lambda_\Omega$. Таким образом, нам осталось показать, что слагаемое $U^{\text{св}}$ в (2) можно выбрать таким образом, что U будет унитарным. Здесь мы могли бы следовать общей схеме, приведенной в ([8]), однако оказывается, что унитарный оператор вида (2) можно построить явно. Обозначим $|a|$ число частиц в подсистеме a. Рассмотрим произведение

$$U = \prod_{|a|=2} G_a \ldots \prod_{|a|=n-1} G_a . \tag{3}$$

Произведение $\prod G_a$ берется в некотором фиксированном порядке по всем подсистемам a с $|a| = p$. Операторы G_a определяются по индукции следующим образом: пусть $b \subsetneq \Omega$, тогда при вычеркивании всех сомножителей G_a с $a \not\subset b$ произведение должно равняться $W_b \otimes I_{\mathcal{H}_c}$, где c – дополнительная к b подсистема. С помощью леммы 1 можно установить, что каждый сомножитель в (3) унитарен и имеет вид $I + G'_a$, где $G'_a \in \Gamma\Lambda_a$, и все произведение имеет вид (2). Родственный представлению (3) факт, а именно, факторизация матрицы рассеяния при $n = 3$, получен в работе ([10]), см. также ([11]).

4. Теорему 1 можно теперь доказать по индукции. Пусть для всех подсистем системы Ω теорема 1 верна, тогда выполнены условия теоремы 2 и можно построить унитарный регуляризатор u. Обозначим оператор $u^* h_\Omega u$ через h, оператор h^0_Ω через h^0. Тогда имеем: $h = h^0 + v$, где $v \in \Lambda$. Положим $w = s\text{-}\lim \exp(ith)\exp(-ith^0)$ при $t \to -\infty$. Нетрудно показать, что $(u - I)\exp(-ith^0) \to 0$ при $t \to -\infty$, из этого следует, что $w_\Omega = uw$. Тем самым, полнота оператора w_Ω эквивалентна полноте w. Оператор h лишь в несущественных деталях отличается от известной модели Фридрихса ([12]), поэтому можно утверждать, что оператор w является полным. Для доказательства второго утверждения теоремы 1 нужно показать, что оператор w имеет вид $I + T$, где $T \in \Gamma\Lambda$. Действительно, если это

так, то $w_\Omega^{\text{св}} = uT + u^{\text{св}}$, и по лемме 1 оператор $w_\Omega^{\text{св}}$ принадлежит ГΛ. Завершается индукционное построение применением следующего утверждения:

Теорема 3. *Оператор h не имеет сингулярного непрерывного спектра, собственные значения h могут накапливаться только к нулю. При отсутствии неотрицательных собственных значений и виртуального уровня волновой оператор имеет вид $I + T$, где $T \in$ ГΛ.*

Виртуальным уровнем в нуле мы, следуя ([1]), называем такое решение однородного уравнения, соответствующего уравнению для ядра резольвенты при $z = 0$, которое не связано с собственной функцией оператора h. Заметим, что, используя иную технику, автор работы ([13]) доказал, что при $n = 3$ собственных значений лишь конечное число.

Ленинградское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило 23 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л.Д. Фаддеев*, Тр. МИАН, т. 69 (1963). [2] *J. Ginibre, B. Moulin*, Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A, v. 21, 97 (1974). [3] *Д.Р. Яфаев*, Теоретич. и матем. физ., т. 37, 1, 68 (1978). [4] *Ф.А. Березин*, ДАН, т. 163, 795 (1965). [5] *J.M. Sigal*, Memoires Am. Math. Soc., v. 16, 2, 209 (1978). [6] *К. Нерр*, Helv. phys. acta, v. 42, 3, 425 (1969). [7] *В.С. Буслаев, А.Ф. Вакуленко*, Вестн. ЛГУ, т. 13, 22 (1977). [8] *А.Ф. Вакуленко*, ДАН, т. 245, № 6, 1348 (1979). [9] *Н. Данфорд, Д. Шварц*, Линейные операторы, т. 3, М., "Мир", 1974. [10] *R. Newton*, J. Math. Phys., v. 15, 3, 338 (1974). [11] *А.Ф. Вакуленко*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 84, 23 (1979). [12] *Л.Д. Фаддеев*, Тр. МИАН, т. 73, 292 (1964). [13] *Д.Р. Яфаев*, Матем. сб., т. 106. 4, 622 (1978).

УДК 517.994

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, В.А. СОЛОННИКОВ

НАХОЖДЕНИЕ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА, ИМЕЮЩИХ БЕСКОНЕЧНУЮ ДИССИПАЦИЮ*

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 20 VIII 1979)

Во всех известных нам работах, посвященных нахождению решений стационарных краевых задач для уравнений Навье – Стокса (речь будет идти только о несжимаемых жидкостях), эти решения (или определяемые отклонения от них) имеют конечный интеграл Дирихле по области, в которой они находятся. Это объясняется тем фактом, что основной априорной оценкой, от которой отправлялись все исследователи, являлась оценка интеграла Дирихле. Однако имеется немало интересных задач, в которых ожидаемые решения обязаны иметь бесконечный интеграл Дирихле. Например, для известного течения Пуазейля в цилиндрической трубе интеграл Дирихле по всей бесконечной трубе неограничен. Поэтому надо было выяснить сначала характер роста возможных решений однородных краевых задач. Приведем одну из установленных нами теорем (типа Фрагмена–Линделёфа).

---

* Результаты данной работы были доложены на Всесоюзной конференции по нелинейным задачам гидродинамики и смежным вопросам, происходившей в Ленинграде, в ЛОМИ, в апреле 1979 г.