Н. Н. Фимин, В. А. Чуянов, Ветвление решений кинетических уравнений и ударные волны, *Матем. моделирование*, 1997, том 9, номер 10, 120–124

https://www.mathnet.ru/mm1471

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **9** номер **10** год **1997**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

© *Н.Н. Фимин, В.А. Чуянов*

Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проекта МНТЦ № 115-95

Работа посвящена исследованию возможности ветвления решений нелинейного кинетического уравнения типа Больцмана. Получены общие условия возникновения бифуркации тривиального решения указанного уравнения. На примере задачи об ударной волне в одномерной системе проанализированы физические следствия данного явления.

A BRANCHING OF SOLUTIONS OF KINETIC EQUATIONS AND THE SHOCK WAVES

N.N. Fimin, V.A. Chuyanov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow

The present paper is dedicated to investigation of phenonomenon of nonlinear Boltzmann-like kinetic equation solutions branching. The common properties of this equation trivial solution bifurcation origin are determined. As example of weak shock-wave problem in one-dimensional case the physical consequences of this phenomenon are analyzed.

Приложения теории ветвления решений нелинейных уравнений к проблемам математической физики в таких областях, как нелинейная механика, гидро- и газодинамика, перенос нейтронов широко известны (см. [1] и цитированную там литературу). Успешное применение методов указанной теории к вопросам динамики флотирующей [2] и стратифицированной [3] жидкости, задаче о течении Куэтта [4] и проблеме Бенара [5] ставит вопрос о возможности ее приложения к задаче об ударной волне.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых физических аспектов явления бифуркации решений кинетических уравнений типа Больцмана или Юлинга-Уленбека [6]; основным ее содержанием является анализ возможности возникновения ударных волн и исследование их структуры в астрофизических объектах.

В контексте простейшей классической задачи об ударной волне подразумевается, что поток газа параллелен оси абсцисс x, и все параметры задачи не зависят от времени и двух остальных координат; газ находится в равновесии на бесконечности вверх и вниз по потоку; функции распределения при $x = \pm\infty$ являются равновесными максвелловскими распределениями

$\Phi_\pm=\Phi(\rho_\pm,u_\pm,T_\pm)\equiv\rho_\pm(2\pi RT_\pm)^{-3/2}\exp(-(\mathbf{c}-\boldsymbol{\alpha}_\pm)^2/(2RT_\pm))$, $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_\pm;0;0\}$, где параметры $\rho_\pm=\rho(x=\pm\infty)$ – плотность, $\alpha_\pm=\alpha(x=\pm\infty)$ – массовая скорость, $T_\pm=T(x=\pm\infty)$ - температура удовлетворяют известным соотношениям Рэнкина-Гюгонио [7]. Существующие аналитические методы исследования структуры ударной волны опираются на различные приближенные модели уравнения Больцмана (Бхатнагара-Гросса-Крука [8], полиномиальную Л.Сировича [9], эллипсоидальную статистическую [10] и т.п.) или на возможность приближенного разложения решения исходного точного нелинейного уравнения по степеням $\varepsilon=(p_--p_+)/(p_-+p_+)$ [11], аналогичного в некотором смысле разложению Гильберта; здесь $p_\pm=\rho_\pm RT_\pm$, R – универсальная газовая постоянная. Наиболее распространенным подходом является моментный метод Мотт-Смита и его модификации [12], однако, как и все перечисленные, он обладает определенными недостатками: сложность подбора эмпирических коэффициентов и малая согласованность с результатами расчетов с использованием уравнений Навье-Стокса при $M\to1$ (M – число Маха).

Целесообразен поиск новых подходов к исследованию задачи об ударной волне (особенно основанных на рассмотрении точного нелинейного уравнения). Рассматриваемый ниже метод, по-видимому, обладает большей универсальностью, чем существующие.

Рассмотрим общую постановку задачи. Пусть имеется нелинейный ограниченный оператор $\hat{Q}(\alpha,f)$: $\mathbb{R}^1\times X(\mathbb{R}^3)\to Y(\mathbb{R}^3)$, $\alpha\in\mathbb{R}^1$ – параметр, X,Y – банаховы пространства; будем полагать, что $\hat{Q}$ является Фреше-аналитическим по обоим аргументам в некоторой окрестности $O_{\alpha,f}=O_\alpha\times O_f$ точки $(\alpha=0,f=0)$:

$$\hat{Q}(\alpha,f)=\sum_{n,s=1}^{\infty}(s!)^{-1}\cdot(n!)^{-1}\cdot(\partial^{s+n}\hat{Q}(0,0)/\partial\alpha^s\partial f^n)\cdot\alpha^s\cdot f^n, \tag{1}$$

$$\hat{Q}(\alpha,f=0)\equiv0,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}^1,\quad \partial\hat{Q}(\alpha,0)/\partial f\equiv\hat{L}(\alpha)[.]. \tag{2}$$

Пусть выполнено

Предположение 1. а) $\exists\alpha_0\in O_\alpha$: $\hat{Q}_\alpha(\alpha_0,0)=0$;

б) $\exists f^{(0)}\in Ker\hat{L}(\alpha_0)$, $nul\ \hat{L}(\alpha_0)=1$;

в) $codim\ Ran\ \hat{L}(\alpha_0)\equiv codim\ L_1=1$;

г) $\hat{Q}_{\alpha,\alpha}(\alpha_0,0)\in L_1$, $(\hat{Q}_{f,\alpha}(\alpha_0,0))[f^{(0)}]\notin L_1$.

Тогда можно показать [13], что в некоторой окрестности точки $(\alpha_0, f=0)\in\mathbb{R}^1\times X(\mathbb{R}^3)$ уравнение

$$\hat{Q}(\alpha,f)=0,\qquad \hat{Q}:\mathbb{R}^1\times X(\mathbb{R}^3)\to Y(\mathbb{R}^3), \tag{3}$$

помимо тривиального (см.(2)) имеет второе решение (точнее, вторую ветвь решения) $f_0(\alpha)\not\equiv0$: $\hat{Q}(\alpha,f_0(\alpha))=0$. В частности, если $\hat{Q}$ – столкновительный член в уравнении Больцмана, то $f_0(\alpha)=\Phi_+/\Phi_--1$, где $\Phi_\pm$ определены выше.

Рассмотрим более общее, чем (3) уравнение (абстрактное стационарное кинетическое):

$$\hat{Q}_1(\alpha,f)\equiv(\alpha+v_x)\cdot\partial f(x,\mathbf{v})/\partial x-\hat{Q}(\alpha,f)=0,\quad \mathbb{R}^3\ni\mathbf{v}=\{v_x;v_y;v_z\}, \tag{4}$$

$$\hat{Q}_1:\mathbb{R}^1\times E_1\to\mathbb{R}^1\times E_2,\qquad E_1=AC^1(\mathbb{R}^1;X(\mathbb{R}^3)),\qquad E_2=AC(\mathbb{R}^1;Y(\mathbb{R}^3)),$$

$$(\partial f(x,.)/\partial x\in AC(\mathbb{R}^1;.))\Leftrightarrow(f(x,.)\in AC^1(\mathbb{R}^1;.)),$$

где пространство абсолютно непрерывных функций $AC(\mathbb{R}^1;X)\ni f(x,\mathbf{v})$, таких, что $f\to0$ при $x\to-\infty$ или $x\to+\infty$, обладает нормой $\|f(x,\mathbf{v})\|_{AC}=\int_{-\infty}^{+\infty}\|\partial f/\partial x\|_k dx$; $\forall\alpha\in\mathbb{R}^1$

$((v_x+\alpha)\hat{E})^{-1}$ неограничен $(-\infty \le v_x+\alpha \le +\infty$, $\hat{E}$ – тождественный оператор). Очевидно, $f=0$ есть тривиальное решение (4).

Применим двустороннее преобразование Лапласа [14] к производной Фреше $\partial\hat{Q}_1(\alpha,0)/\partial f$ для того, чтобы изучить ее спектральные свойства:

$$\hat{Q}_2(\alpha,f) \equiv \hat{F}_{Lap}((\partial\hat{Q}_1(\alpha,0)/\partial f)[f]) = \beta(v_x+\alpha)f^{(L)} - \hat{L}(\alpha)f^{(L)}, \tag{5}$$

$$\hat{F}_{Lap}[f] = f^{(L)}(\beta,\mathbf{v}) = \beta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\mathbf{v}) \cdot \exp(-\beta x) \cdot dx, \tag{5a}$$

где $\hat{Q}_2(\alpha,f)$ – ограниченное (по норме графика) отображение в полосе сходимости указанного преобразования (5а) [14]. Оно определяет $(v_x+\alpha)\hat{E}$-спектр [15] $\Sigma_{gen}(\hat{L}(\alpha))$ оператора $\hat{L}(\alpha)$, то есть множество таких $\beta \in \mathbb{C}$, что $(\beta(v_x+\alpha)\hat{E}-\hat{L}(\alpha))^{-1}$ не существует или не ограничен как отображение $Y \to X$; будем полагать, что выполнено

Предположение 2. *Обобщенный спектр $\Sigma_{gen}(\hat{L}(\alpha))$ лежит на вещественной оси в комплексной β-плоскости, причем непрерывный $(v_x+\alpha)$ спектр равен $C\Sigma_{gen}(\hat{L}(\alpha)) = [-\infty;\beta_{(-)}] \cup [\beta_{(+)};+\infty]$, $-\beta_{(-)} = \beta_{(+)}$, $\beta_{(\pm)} \in \mathbb{R}^1$; обобщенное простое собственное значение $\beta_0(\alpha) \in \mathbb{R}^1$, причем при $\alpha \ge \alpha_0$ $\beta_0(\alpha) \ge 0$, а при $\alpha \le \alpha_0$ $\beta_0(\alpha) \le 0$.*

Из Предположений 1,2 вытекает справедливость следующего утверждения (которое можно доказать, используя Теорему 1.7 работы [16]):

Теорема. *Существует окрестность $\mathcal{O}_* \subset \mathbb{R}^1 \times AC(\mathbb{R}^1;X(\mathbb{R}^3))$ точки $(\beta_0;f=0)$, где существует вторая ветвь решения уравнения* (4), $\Phi_0(\alpha,x) \not\equiv 0$, *такая, что при* $\alpha \ge \alpha_0$: $\Phi_0(\alpha,-\infty) \equiv 0$, $\Phi_0(\alpha,+\infty) \equiv f_0(\alpha)$, а *при* $\alpha \le \alpha_0$: $\Phi_0(\alpha,+\infty) \equiv 0$, $\Phi_0(\alpha,-\infty) \equiv f_0(\alpha)$.

Решение $\Phi_0(\alpha,x)$ моделирует ударную волну.

Если рассмотреть два семейства проекционных операторов, ассоциированных с $\beta_0(\alpha)$ [13]:

$$\hat{P}_1(\alpha) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma(\beta_0)} (\beta(v_x+\alpha) - \hat{L}_1)^{-1}(v_x+\alpha)d\beta \ : \ X \to X, \tag{6}$$

$$\hat{P}_2(\alpha) = (2\pi i)^{-1} \cdot \int_{\Gamma(\beta_0)} (v_x+\alpha)(\beta(v_x+\alpha) - \hat{L}_1)^{-1}d\beta \ : \ Y \to Y,$$

где $\Gamma(\beta_0)$ – замкнутый контур на β-плоскости, содержащий точки β_0, и разложение $f = a\phi_0 + b$, $a(x)\phi_0(\alpha) = \hat{P}_1(\alpha)f$, $b(\alpha,x) = (\hat{E}-\hat{P}_1(\alpha))f$, то, применяя к исходному уравнению (4) $\hat{P}_2(\alpha)$ и $\hat{E}-\hat{P}_2(\alpha)$, получим (после некоторых преобразований [13]) так называемое уравнение бифуркации Ляпунова-Шмидта относительно профиля ударной волны $a(x)$:

$$da/dx = \beta_0(\alpha) \cdot a(x) - \beta_1(\alpha) \cdot a^2(x) + \hat{\beta}_2(a,b), \tag{7}$$

$$\beta_1(\alpha) \in \mathbb{R}^1, \ \hat{\beta}_2: AC^1(\mathbb{R}^1) \times AC(\mathbb{R}^1;(\hat{E}-\hat{P}_1(\alpha))X) \to AC(\mathbb{R}^1).$$

Это дифференциальное уравнение Риккати возмущенное операторным слагаемым $\hat{\beta}_2$. Поскольку $\|\hat{\beta}_2(a,b)\|_{AC} = O(a-a_0)^2$, а $\beta_0(\alpha) = O(\alpha-\alpha_0)$, $\|a(x)\|_{AC} = O(\alpha-\alpha_0)$, задача о структуре ударной волны оказывается связанной с задачей о ветвлении решений уравнения (7), причем тривиальной ветвью полагается решение невозмущенного уравнения Риккати: $a_R(x) = (\beta_0(\alpha)/\beta_1(\alpha)) \cdot (\exp(\beta_0(\alpha)x)/ /(\exp(\beta_0(\alpha)x)+1)$.

Заметим, что профиль ударной волны сходного вида получается при разложении решения анализируемого уравнения по степеням $\varepsilon = (p_- - p_+)/(p_- + p_+)$.

Однако наличие малого по норме операторного слагаемого $\hat{\beta}_2(a,b)$ позволяет утверждать, что профиль ударной волны описывается функцией $a(x)= =a_R(x)(1+\vartheta(\beta_0 x))$, где $\vartheta(\beta_0 x)$ – решение следующего уравнения:

$$d\vartheta/ds+(\exp(s)/(\exp(s)+1))(\vartheta^2+\vartheta)=\beta_0(\alpha)(\exp(-s)+1)\hat{\beta}_2(a,b),$$

которое можно решать (с учетом явного вида $\hat{\beta}_2(a,b)$) с точностью до членов порядка $O(\alpha-\alpha_0)^N$, $N\geq 2$. При этом $f=a_R(x)(1+\vartheta)\phi_0+b(\alpha,x)$. Отсюда следует, что фактически ударная волна обладает профилем, являющимся суперпозицией профиля Ландау-Хохлова (гиперболический тангенс [17]) и ангармонических затухающих (на бесконечности) колебаний малой амплитуды.

Рассмотренный выше математический аппарат применим не только к классическому уравнению Больцмана, но также и к квантовому уравнению Юлинга-Уленбека, учитывающему статистику взаимодействующих частиц (Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна).

Рассмотрим некоторые прикладные аспекты полученных строгих результатов на примере астрофизических задач.

Следуя [18], предположим, что застывшая звезда погружена в газ, рассматриваемый как сплошная среда; на бесконечности газ движется относительно звезды со скоростью $\alpha_- > c_s$ (скорости звука). В поле тяготения линии тока искривляются (с одновременным увеличением скорости частиц); в хвосте потока, примыкая к сфере Шварцшильда, расположена вытянутая поверхность ударной волны. Пересекая ее фронт, газ теряет компоненту скорости, перпендикулярную к фронту (параллельная фронту, т.е. направленная по радиусу, компонента остается без изменения). Существует критический прицельный параметр ℓ_k такой, что при $\ell>\ell_k$ скорость частиц больше параболической, и вещество вытекает на бесконечность, а при $\ell<\ell_k$ вещество после сжатия падает на звезду; при этом в ударной волне происходит эффективная переработка кинетической энергии в излучение. Установленная выше неоднородность структуры ударной волны, таким образом, должна при аккреции вызывать модуляции излучения даже при постоянной плотности набегающего потока газа; при этом амплитуда модуляций может быть значительной – возможно, даже до остановки аккреции за счет светового давления по направлению кумулятивного выброса струи по другую сторону (относительно набегающего потока) звезды. Подобные качественные соображения могут служить для объяснения короткопериодических пульсаций рентгеновского излучения нейтронных звезд.

В качестве следующей физической иллюстрации следствий развитой выше теории ударной волны рассмотрим диссипацию энергии, приводящую к охлаждению нейтронной звезды на первых стадиях после коллапса. Основным ее механизмом при $T>4\cdot 10^8$ К являются нейтринные потери [19] за счет урка-процессов. Приблизительно за $t_0\sim 20$ с после коллапса радиус и распределение плотности нейтронной звезды достигают стационарного состояния ввиду уменьшения температуры и сильного вырождения вещества (для $M_{star}\approx 1{,}4M$, M – масса Солнца). В течение этого промежутка времени в связи с относительно малой прозрачностью толщи звезды для нейтрино весьма существенную роль должен играть механизм, связанный с выходом на поверхность сферических ударных волн (если рассматривать вещество звезды как бинарную электрон-нейтронную систему, кинетику которой можно описывать с помощью уравнения Юлинга-Уленбека). Поэтому мы вновь приходим к возможности короткопериодических флуктуаций (теперь уже нейтринного) излучения, обусловленной структурой ударных волн и проистекающей не только из геометрии процесса [20].

Теория ударных волн находит применение также при описании динамики процессов в сверхновых звездах – в частности, на стадиях эжекции вещества и адиабатической (Седова-Тейлора) [21]. При этом, как известно, вначале происходит сброс периферической оболочки, в результате чего к центру идет волна разрежения (впоследствие отражающаяся от него); при гидродинамическом описании здесь обычно используется оболочечное приближение (thin-shell approximation), фактически не учитывающее в явном виде структуру ударной волны. Если же, используя развитый выше формализм, ввести в рассмотрение найденную выше неоднородность ее фронта, можно существенно уточнить динамику расширения сверхновой; в частности, по-видимому, из-за отклонения от закона уменьшения плотности вещества $n \sim R^{-2}$ (R – расстояние от центра звезды), получаемого с помощью упомянутого приближения (или, что то же, теоремы вириала), результатом взрыва сверхновой является образование, имеющее фрактальную структуру (как, например, Крабовидная туманность). Ангармонические модуляции плотности на фронте ударной волны, получаемые выше, данный факт объясняют непосредственно (поскольку в этом случае $n \sim \sum_{k=1}^{\infty} n_k R^{-h}$, $n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, h – рациональное (не целое) число, близкое к 2 [22]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis. Applications to mathematical physics. – New York-Berlin-Heidelberg-London: Springer-Verlag, 1985, 976p.
2. *Жевандров* П.Х. Корабельные волны на поверхности флотирующей жидкости // ЖВМиМФ, 1988, т. 28, №7, с. 1110-1115.
3. *Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. – М.: Наука, 1986.
4. *Kirchgasser K., Kielhofer H.* Stability and bifurcation in fluid mechanics. // Rocky Mount. J. Math., 1973, v. 3, №2, p. 275-318.
5. *Fujita H., Kato T.* On the Navier-Stokes initial value problem. // Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, v. 16, №3, p. 269-315.
6. *Uehling E.A., Uhlenbeck G.E.* Transport theory in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. // Phys. Rev., 1933, v. 43, № 7, p. 552-569.
7. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. – М.: Мир, 1976, 554с.
8. *Anderson D.G.* Numerical solutions of the Krook equation. // J. Fluid Mech., 1966, v. 25, №2, p. 271-287.
9. *Sirovich L.* Kinetic modelling of gas mixtures. // Phys. Fluids, 1962, v. 5, №8, p. 908-918.
10. *Segal B.M., Ferziger J.H.* Shock-wave stucture , using , nonlinear model Boltzmann equation. // Phys, Fluids, 1972, v. 15, № 15, p. 1233-1247.
11. *Cercignani C.* Bifurcation problems in fluid mechanics. // Meccanica, 1970, V. 5, №7, p. 7-16.
12. *Salwen H., Grosch C.E.* Extension of the Mott-Smith method for a one-dimensional shock wave. // Phys. Fluids, 1964, v. 7, №2, p. 180-190.
13. *Фимин Н.Н., Чуянов В.А.* Бифуркация решений абстрактного кинетического уравнения. – Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН №16 за 1997, 26с.
14. *Ван дер Поль Г., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. – М.: ИИЛ, 1952, 508с.
15. *Crandall M.G., Rabinowitz P.H.* Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. // Arch. Rat. Mech. Anal., 1973, v. 52, №2, p. 161-180.
16. *Crandall M.G., Rabinowitz P.H.* Bifurcation from simple eigenvalue. // J. Funct. Anal., 1971, v. 8, №2, p. 321-340.
17. *Зарембо Л.К., Тимошенко В.И.* Нелинейная акустика. – М.: МГУ, 1984, 184с.
18. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1967, 656с.
19. *Бисноватый-Коган Г.С.* Физические вопросы теории звездной эволюции. – М.: Наука, 1989, 488с.
20. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966, 520с.
21. *Ostriker J.P., McCee C.F.* Astrophysical blastwaves. // Rev. Mod. Phys., 1988, v. 60, №1, p. 1-68.
22. *Coleman P.H., Pietronero L.* The fractal structure of the Universe. // Phys. Rep., 1992, v. 213, №6, p. 313-389.

Поступила в редакцию 28.07.97.