Ю. М. Раппопорт, О некоторых интегральных свойствах модифицированных функций Бесселя,
Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2015, том 15, выпуск 2, 167–171

Библиографический список

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I // Math. Ann. 1923. Vol. 89, № 1–2. P. 103–121.
2. *Lind J., Marshall D. E., Rohde S.* Collisions and spirals of Loewner traces // Duke Math. J. 2010. Vol. 154, № 3. P. 527–573.
3. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic Functions. Vol. 1. London, New York : Academic Press, 1976.
4. *Earle C. J., Epstein A. L.* Quasiconformal variation of slit domains // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 129, № 11. P. 3363–3372.
5. *Prokhorov D., Zakharov A.* Harmonic measures of sides of a slit perpendicular to the domain boundary // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 394, № 2. P. 738–743.
6. *Kager W., Nienhuis B., Kadanoff L. P.* Exact solutions for Loewner evolutions // J. Statist. Phys. 2004. Vol. 115, № 3–4. P. 805–822.
7. *Radó T.* Sur la représentations conforme de domaines variables // Acta Sci. Math. (Szeged). 1922–1923. Vol. 1, № 3. P. 180–186.
8. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966.
9. *Markouchevitch A.* Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables // Матем. сб. 1936. Т. 1(43), № 6. С. 863–886.
10. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Analysis and Mathematical Physics / eds. D. Gustafsson, A. Vasil'ev. Berlin : Birkhauser, 2009. P. 455–463.
11. *Ivanov G., Prokhorov D., Vasil'ev A.* Non-slit and singular solutions to the Löwner equation // Bull. Sci. Mathem. 2012. Vol. 136, № 3. P. 328–341.

УДК 517.584

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Ю. М. Раппопорт

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт автоматизации проектирования Российской Академии наук, Москва, jmrap@landau.ac.ru

Представлены новые интегральные тождества для модифицированных функций Бесселя произвольного комплексного порядка. Изучены свойства интегральных преобразований Лебедева – Скальской.

Ключевые слова: модифицированные функции Бесселя комплексного порядка, интегральные преобразования Конторовича – Лебедева, интегральные преобразования Лебедева – Скальской.

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$ И $\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)$

Можем записать вещественную и мнимую часть модифицированных функций Бесселя комплексного порядка в виде

$$\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x) = \frac{K_{\alpha+i\beta}(x) + K_{\alpha-i\beta}(x)}{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x) = \frac{K_{\alpha+i\beta}(x) - K_{\alpha-i\beta}(x)}{2i},$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (также называемая функцией Макдональда).

Функции $K_{i\beta}(x)$, $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$ и $\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)$ имеют интегральные представления [1, 2]

$$K_{i\beta}(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cos(\beta t)\,dt,$$

$$\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t)\cos(\beta t)\,dt, \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t)\sin(\beta t)\,dt. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что возможно переписать $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$ в виде косинус-преобразования Фурье

$$\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} F_C[e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t); t \to \beta] \tag{3}$$

и $\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)$ в виде синус-преобразования Фурье

$$\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} F_S[e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t); t \to \beta]. \tag{4}$$

Формулы обращения имеют соответственно вид

$$F_C[\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x); \beta \to t] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t),$$
$$F_S[\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x); \beta \to t] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t),$$

или в интегральной форме

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)\cos(t\beta)\,d\beta = \frac{\pi}{2}e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t), \tag{5}$$
$$\int_0^\infty \operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)\sin(t\beta)\,d\beta = \frac{\pi}{2}e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t). \tag{6}$$

Для вычисления определенных интегралов от функций $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$ и $\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)$ полезны интегральные тождества, сводящие эту задачу к вычислению некоторых других интегралов от элементарных функций.

Утверждение 1. *Если f абсолютно интегрируемо на $[0,\infty)$, то справедливы следующие равенства:*

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x) f(\beta)\,d\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t) F_C(t)\,dt, \tag{7}$$
$$\int_0^\infty \operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x) f(\beta)\,d\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t) F_S(t)\,dt, \tag{8}$$

где $F_C(t)$ — косинус-преобразование Фурье от $f(\beta)$ и $F_S(t)$ — синус-преобразование Фурье от $f(\beta)$.

Доказательство. Умножив обе части равенств (1) и (2) на $f(\beta)$, интегрируя по β от 0 до ∞ и применяя теорему Фубини для сингулярных интегралов с параметром, получим формулы (7) и (8).□

Утверждение 2. *Если f абсолютно интегрируемо на $[0,\infty)$, то справедливы следующие равенства:*

$$\int_0^\infty \operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x) F_C(\beta)\,d\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cosh(\alpha t) f(t)\,dt, \tag{9}$$
$$\int_0^\infty \operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x) F_S(\beta)\,d\beta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t) f(t)\,dt. \tag{10}$$

Доказательство. Утверждение следует из формул (5)–(6) и из теоремы Фубини. □

Равенства (7)–(10) полезны для упрощения и вычисления различных интегралов, содержащих $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$ и $\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)$.

Представление (1) может быть использовано для нахождения преобразования Лапласа от $\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)$.

Из (1) для всех $\alpha \in [0,\infty)$, $\beta \in [0,\infty)$ следуют неравенства [3–5]

$$|\operatorname{Re} K_{\alpha+i\beta}(x)| \leqslant K_\alpha(x), \qquad |\operatorname{Re} K_{1/2+i\beta}(x)| \leqslant K_{1/2}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \tag{11}$$

из (2) для всех $\alpha \in [0,\infty)$, $\beta \in [0,\infty)$ следуют неравенства [3–5]

$$|\operatorname{Im} K_{\alpha+i\beta}(x)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-x\cosh t}\sinh(\alpha t)\,dt \leqslant K_\alpha(x), \qquad |\operatorname{Im} K_{1/2+i\beta}(x)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}. \tag{12}$$

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕБЕДЕВА

Интегральные преобразования, содержащие интегрирование по индексу функции Бесселя, играют значительную роль при решении некоторых классов задач математической физики [1–5]. В частности, для решения смешанных краевых задач для уравнения Гельмгольца в клиновидных и конических областях используются интегральные преобразования Конторовича – Лебедева и Лебедева – Скальской [3, 4]:

$$F(\beta) = \int_0^\infty f(x) K_{i\beta}(x)\, dx, \qquad 0 \leqslant \beta < \infty, \tag{13}$$

$$F_+(\beta) = \int_0^\infty f(x) \frac{K_{1/2+i\beta}(x) + K_{1/2-i\beta}(x)}{2}\, dx, \qquad 0 \leqslant \beta < \infty, \tag{14}$$

$$F_-(\beta) = \int_0^\infty f(x) \frac{K_{1/2+i\beta}(x) - K_{1/2-i\beta}(x)}{2i}\, dx, \qquad 0 \leqslant \beta < \infty. \tag{15}$$

Формулы обращения для преобразований (13)–(15) имеют соответственно вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty \beta \sinh(\pi\beta) F(\beta) K_{i\beta}(x)\, d\beta, \qquad 0 < x < \infty, \tag{16}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \cosh(\pi\beta) F_+(\beta) \frac{K_{1/2+i\beta}(x) + K_{1/2-i\beta}(x)}{2}\, d\beta, \qquad 0 < x < \infty, \tag{17}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \cosh(\pi\beta) F_-(\beta) \frac{K_{1/2+i\beta}(x) - K_{1/2-i\beta}(x)}{2i}\, d\beta, \qquad 0 < x < \infty. \tag{18}$$

Таким образом, интегральные преобразования Лебедева – Скальской $F_+(\beta)$ и $F_-(\beta)$ функции $f(x)$ определяются на вещественной положительной полуоси по формулам

$$REK[f(x); \beta] = \int_0^\infty f(x) \operatorname{Re} K_{1/2+i\beta}(x)\, dx, \tag{19}$$

$$IMK[f(x); \beta] = \int_0^\infty f(x) \operatorname{Im} K_{1/2+i\beta}(x)\, dx \tag{20}$$

и записываются в виде

$$F_+(\beta) = REK[f(x); \beta], \qquad F_-(\beta) = IMK[f(x); \beta].$$

Из неравенств (11), (12) следует, что для всех $\beta \in (0, \infty)$

$$|F_+(\beta)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty |f(x)| e^{-x} x^{-1/2}\, dx \tag{21}$$

и

$$|F_-(\beta)| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_0^\infty |f(x)| e^{-x} x^{-1/2}\, dx. \tag{22}$$

Утверждение 3. *Если следующее условие для функции $f(x)$ справедливо*

$$f(x) e^{-x} x^{-1/2} \in L(0, \infty),$$

то интегральные преобразования Лебедева – Скальской $F_+(\beta)$ и $F_-(\beta)$ определены, интегралы (19), (20) *сходятся равномерно по β и определяют непрерывную функцию от β, ограниченную для $\beta \in [0, \infty)$.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенств (21), (22) и из критерия равномерной сходимости интегралов с параметром. □

Интегралы (19), (20) поэтому определены, сходятся равномерно по β и определяют непрерывную функцию от β.

Доказательство формул обращения и равенств Парсеваля для этих преобразований получено в [6–11].

Интегральные преобразования Конторовича – Лебедева могут быть выражены через общие интегральные преобразования Мейера специального индекса и аргумента.

Якубовичем (S. B. Yakubovich) [12] рассмотрены интегральные преобразования типа Лебедева с произвольным комплексным индексом, т. е. с функциями $\mathrm{Re}\, K_{\alpha+i\beta}(x)$ и $\mathrm{Im}\, K_{\alpha+i\beta}(x)$ в ядре.

Таким образом при использовании указанных преобразований возникает необходимость в аппроксимации и вычислении модифицированных функций Бесселя произвольного комплексного порядка $K_{\alpha+i\beta}(x)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Тематической программы по обратным задачам анализа изображений филдсовского института.

Библиографический список

1. *Saitoh S.* Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications. Pitman Res. Notes in Math. Series. Vol. 369. L. : Addison Wesley Longman Ltd., 1997. 280 p.
2. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transform. Theory and Applications. L.; N.Y.; Washington D.C. : Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004. 386 p.
3. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Некоторые интегральные преобразования, родственные преобразованию Конторовича – Лебедева // Вопросы матем. физики. Л. : Наука. Ленингр. отд-ние, 1976. С. 68–79.
4. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Конторовича – Лебедева // Прикл. матем. и мех. 1974. Т. 38, № 6. С. 1090–1097.
5. *Yakubovich S. B.* Index Transforms. Singapore; New Jersey; L.; Hongkong : World Scientific Publishing, 1996. 248 p.
6. *Поручиков В. Б., Раппопорт Ю. М.* Формулы обращения для модифицированных преобразований Конторовича – Лебедева // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 542–546.
7. *Раппопорт Ю. М.* Некоторые свойства модифицированных преобразований Конторовича – Лебедева // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 724–727.
8. *Rappoport J. M.* Some results for modified Kontorovitch – Lebedev integral transforms // Proceedings of the 7th International Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis. Marcel Dekker Inc., 2000. P. 473–477.
9. *Rappoport J. M.* The properties, inequalities and numerical approximation of modified Bessel function // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2006. Vol. 25. P. 454–466.
10. *Rappoport J. M.* About modified Kontorovitch – Lebedev integral transforms and their kernels. Preprint / L. : Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mathematics, 2009. 09P/001, 31 p.
11. *Rappoport J. M.* Some integral equations with modified Bessel function // Proceedings of the 5th ISAAC Congress. More Progresses in Analysis. Singapore; New Jersey; L.; Hongkong : World Scientific Publishing, 2009. P. 269–278.
12. *Yakubovich S. B.* Beurling's theorems and inversion formulas for certain index transforms // Opuscula Mathematica. 2009. Vol.29, № 1. P. 93–110.

On Some Integral Properties of Modified Bessel Functions

J. M. Rappoport

Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Apt. 8, Build. 27, Vlasov st., 117335, Moscow, Russia, jmrap@landau.ac.ru

New integral equaties for modified Bessel functions of an arbitrary complex order are presented. The properties of Lebedev – Skalskaya integral transforms are investigated.

Key words: modified Bessel functions of the complex order, Kontorovich – Lebedev integral transforms, Lebedev – Skalskaya integral transforms.

This work was partially supported by a Thematic Programme on Inverse Problems in Imaging of the Fields Institute.

References

1. Saitoh S. *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*. Pitman Res. Notes in Math. Series, vol. 369, Addison Wesley Longman Ltd., London, UK, 1997, 280 p.
2. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transform. Theory and Applications. London, New York, Washington D.C., Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004, 386 p.
3. Lebedev N. N., Skalskaya I. P. Some integral transforms related to Kontorovich – Lebedev transform. *Problems of mathematical physics*. Leningrad, Nauka, 1976, pp. 68–79 (in Russian).
4. Lebedev N. N., Skalskaya I. P. Dual integral

equations connected with Kontorovich – Lebedev transform. *Prikl. Matem. i Mekhan.* [Appl. Math. Mech.], 1974, vol. 38, no. 6, pp. 1090–1097 (in Russian).
5. Yakubovich S. B. *Index Transforms*. Singapore, New Jersey, London, Hongkong, World Scientific Publishing, 1996, 248 p.
6. Poruchikov V. B., Rappoport J. M. Inversion formulas for modified Kontorovich – Lebedev transforms. *Differetial'niye Uravneniya*. [Differ. Equations], 1984, vol. 20, no. 3, pp. 542–546 (in Russian).
7. Rappoport J. M. Some properties of modified Kontorovich – Lebedev transforms. *Differetial'niye Uravneniya*. [Differ. Equations], 1985, vol. 21, no. 4, pp. 724–727 (in Russian).
8. Rappoport J. M. Some results for modified Kontorovich – Lebedev integral transforms. *Proceedings of the 7th International Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis*, Marcel Dekker Inc., 2000, pp. 473–477.
9. Rappoport J. M. The properties, inequalities and numerical approximation of modified Bessel function. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2006, vol. 25, pp. 454–466.
10. Rappoport J. M. *About modified Kontorovitch – Lebedev integral transforms and their kernels*. Preprint / London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mathematics, 2009. 09P/001, 31 p.
11. Rappoport J. M. Some integral equations with modified Bessel function. *Proceedings of the 5th ISAAC Congress*, More Progresses in Analysis, World Scientific Publishing, 2009, pp. 269–278.
12. Yakubovich S. B. Beurling's theorems and inversion formulas for certain index transforms. *Opuscula Mathematica*, 2009, vol. 29, no. 1, pp.93–110.

УДК 517.917

ОЦЕНКА СВЕРХУ ЧИСЛА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ n-Й СТЕПЕНИ

В. Б. Тлячев[1], **А. Д. Ушхо**[2], **Д. С. Ушхо**[3]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Tlyachev@adygnet.ru
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Uschho76@rambler.ru
[3]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Damirubych@mail.ru

Показано, что полиномиальное векторное поле n-й степени на плоскости имеет не более $2n+1$ $(2n+2)$ инвариантных прямых при n — четном (нечетном) и $n \geq 3$, если оно имеет особую точку, которой инцидентны $n+1$ инвариантных прямых и n параллельных между собой инвариантных прямых с определенным угловым коэффициентом.

Ключевые слова: полиномиальное векторное поле, инвариантная прямая, особая точка, прямая изоклина.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, и $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}$, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — взаимно-простые многочлены.

Определение 1 (см. [1]). Прямую линию $ax+by+c=0$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, называют *инвариантной прямой линией* системы (1), если выполняется равенство $aP(x,y)+bQ(x,y) \equiv (ax+by+c)R(x,y)$, где $R(x,y)$ — многочлен с действительными коэффициентами.

Отметим, что степень многочлена $R(x,y)$ не выше $n-1$ [2, с. 17]. Всюду в дальнейшем условимся использовать термин «инвариантная прямая» вместо «инвариантная прямая линия». Понятие