Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Бугаенко, Золотое сечение и числа Фибоначчи,
Квант, 2008, номер 6, 29–31

https://www.mathnet.ru/kvant2916

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
15 декабря 2025 г., 18:28:28

мер, в их правые части дополнительные слагаемые, квадратичные по J и R:

$$\frac{dJ}{dt} = a_{11}J + a_{12}R - \gamma J^2 , \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = a_{21}J + a_{22}R - \gamma R^2 .$$

Параметр γ должен быть положительным – тогда с ростом J и R скорости dJ/dt и dR/dt изменения этих функций будут падать, что и предотвратит их неограниченный рост.

Посмотрим, как повлияет эта нелинейность на развитие событий в уже рассмотренном выше случае «Любовь/антипатия с первого взгляда» для второй пары (см. рис.4). Чтобы не менять полученные ранее результаты в том интервале, где $J(t)$ и $R(t)$ не очень велики, надо выбрать $\gamma \ll 1$ – тогда дополнительными нелинейными слагаемыми в уравнениях (2) можно пренебречь. Положим, например, $\gamma = 0{,}1$ (и, естественно, добавим новые слагаемые в программу Mathematica). Результат решения подправленной системы уравнений показан на рисунке 8. Видно, что любовь партнеров через 10 лет насыщается.

Итак, ограничение любви (или ненависти) можно объяснить нелинейностью чувств, заложенной в нас Природой.

Нужно ли всерьез относиться ко всему вышеизложенному? И да, и нет. Конечно, наивно думать, что столь простая модель действительно может описать все многообразие отношений между влюбленными. Например, она не включает в себя взаимодействие персонажей с другими людьми. Еще одно неучтенное осложнение состоит в том, что вид уравнений или, по крайней мере, значения входящих в него параметров могут меняться со временем. Это называется неавтономностью, и поэты давно ее заметили:

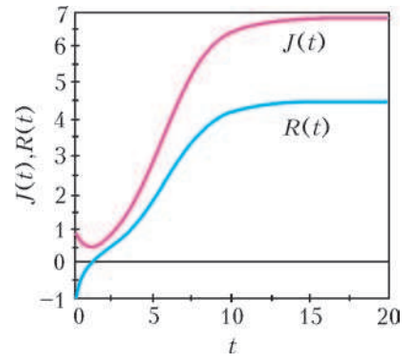

Рис.8. Насыщение отношений

Весной фантазия мужчины
Легко склоняется к любви.
(А.Теннисон, «Локсли-Холл»)

Но даже у примитивных моделей есть то положительное свойство, что их опровержение или усовершенствование заставляет глубже взглянуть на суть явления, выявить новые, не учтенные ранее факторы, оценить границы применимости старой модели, выработать другой язык описания и, в конечном счете, предложить более точную новую модель.

Хотелось бы, однако, чтобы в рассматриваемом случае такая модель не появлялась как можно дольше!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Золотое сечение и числа Фибоначчи

В.БУГАЕНКО

Основные определения

Пусть на отрезке AB расположена точка M. Она делит отрезок на две части. Если отношение длин большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей части, то говорят, что точка делит отрезок *в крайнем и среднем отношении*, а само это отношение называют *золотым сечением*. Если считать, что $AM \geq MB$, то приведенное условие записывается в виде соотношения

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} . \qquad (1)$$

Существование и единственность золотого сечения мы докажем чуть ниже.

Последовательность, первые два члена которой равны единице, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих, называется *последовательностью Фибоначчи*, а ее члены – *числами Фибоначчи*. Вот несколько первых членов последовательности Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

На первый взгляд, золотое сечение и числа Фибоначчи никак не связаны между собой. Более того, они относятся к разным разделам математики: золотое сечение – к геометрии, а числа Фибоначчи – к алгебре. Однако же удивительным образом во многих задачах, связанных с золотым сечением, возникают числа Фибоначчи. И наоборот, в задачах о числах Фибоначчи появляется золотое сечение. С некоторыми такими примерами мы познакомимся в этой статье. Кроме того, мы увидим, что золотое сечение является пределом некоторых естественным образом возникающих числовых последовательностей. Таким образом, мы получим наглядную иллюстрацию того, что вся математика едина, а различные ее разделы (алгебра, геометрия, математический анализ) тесно взаимосвязаны.

Для начала рассмотрим две несложные геометрические задачи, приводящие к понятию золотого сечения.

Золотой прямоугольник

Задача 1. *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на две части, одна из которых является квадратом, а вторая – прямоугольником, подобным исходному?*

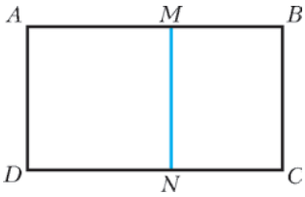

Рис. 1

Решение. Очевидно, что, для того чтобы прямоугольник был разрезан на два прямоугольника, линия разреза должна быть параллельна его стороне. Пусть данный прямоугольник $ABCD$ разрезан прямой MN так, что образовались квадрат $AMND$ и прямоугольник $BCNM$ (рис.1). Тогда условие подобия прямоугольников $ABCD$ и $BCNM$ запишется в виде

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB};$$

учитывая, что $BC = AM$, получаем соотношение (1), а это и означает, что точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении. Поэтому такой прямоугольник существует, и отношение его сторон равно золотому сечению. Будем называть его *золотым прямоугольником*.

Золотые треугольники

Задача 2. *Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разрезать на два различных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному?*

Решение. Обозначим исходный треугольник ABC. Линия разреза, очевидно, должна проходить через одну из его

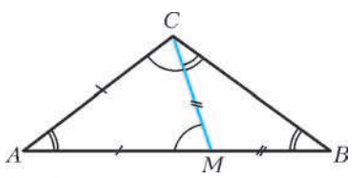

Рис. 2

вершин. Пусть линией разреза будет отрезок CM, где M – точка на стороне AB. Разберем отдельно два случая, когда AB – основание и когда AB – боковая сторона треугольника.

Пусть AB – основание, а C – вершина равнобедренного треугольника ABC (рис.2). Пусть треугольник CMB подобен треугольнику ABC, а ACM – не равный ему равнобедренный треугольник. Тогда $AM = AC = BC$, $MB = MC$. Из подобия следует

$$\frac{AC}{MB} = \frac{AB}{BC};$$

заменяя AC в числителе левой части и BC в знаменателе правой части на AM, получаем соотношение (1). А это и означает, что точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. Таким образом, искомый равнобедренный треугольник таков, что отношение его основания к боковой стороне равно золотому сечению.

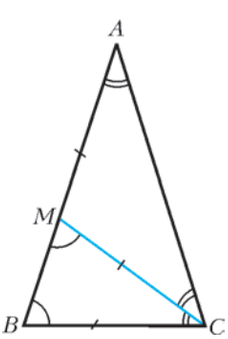

Рис. 3

Теперь пусть основанием треугольника является BC (рис.3). Очевидно, что из двух частей подобным треугольнику ABC может являться только BCM. Имеем $BC = CM = MA$ и $AB = AC$. Из подобия следует

$$\frac{BC}{MB} = \frac{AB}{BC},$$

и, заменяя BC на AM, опять получаем соотношение (1). Значит, и в этом случае точка M делит отрезок в крайнем и среднем отношении. В этом треугольнике отношение стороны к основанию равно золотому сечению.

Итак, мы нашли два типа искомых треугольников. В обоих случаях отношение сторон такого треугольника равно золотому сечению. Во втором случае это отношение боковой стороны к основанию, и треугольник получается остроугольным, а в первом случае – наоборот, золотому сечению равно отношение основания к боковой стороне, и в этом случае треугольник тупоугольный. Каждый из двух типов золотых треугольников разрезается на два золотых треугольника разных типов.

Золотое сечение

Пришло время доказать существование и единственность золотого сечения, а заодно и вычислить его значение. Итак, пусть точка M делит отрезок AB в крайнем и среднем отношении, и предположим, что $AM > MB$. Обозначим $AM = a$, $MB = b$, $a/b = \varphi$. По условию, $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, или $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, откуда получаем равенство

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \qquad (2)$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно φ:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение имеет корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, однако лишь один из них является положительным числом. Следовательно, искомое отношение φ равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Углы золотых треугольников

Найдем, чему равны углы золотых треугольников. Сначала рассмотрим тупоугольный золотой треугольник (см. рис.2). Обозначим угол при его основании через α. Тогда $\angle CAB = \angle CBA = \angle BCM = \alpha$. Следовательно, $\angle AMC = 2\alpha$, как внешний угол треугольника MBC. Отсюда $\angle ACM = \angle AMC = 2\alpha$, и $\angle ACB = 3\alpha$. Получаем, что сумма углов треугольника ABC равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы тупоугольного золотого треугольника равны $36°$, $36°$ и $108°$.

Теперь перейдем к остроугольному золотому треугольнику (см. рис.3). На этот раз обозначим через α угол BAC при вершине. Тогда $\angle ACM = \alpha$, поскольку треугольник MAC равнобедренный, и $\angle BCM = \alpha$, поскольку треугольники ABC и CMB подобны. Таким образом, угол при основании треугольника ABC равен 2α, поэтому сумма углов треугольника равна 5α, откуда $\alpha = 36°$. Итак, углы остроугольного золотого треугольника равны $36°$, $72°$ и $72°$.

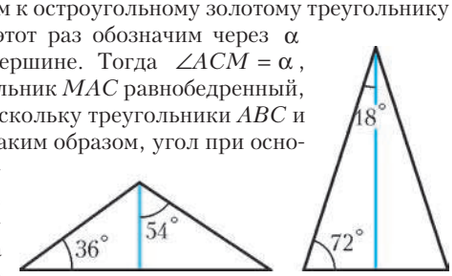

Рис. 4

Разрезав золотые треугольники по оси симметрии на два равных прямоугольных треугольника (рис. 4), можно легко найти тригонометрические функции некоторых углов, связанных с этими треугольниками:

$$\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; \quad \sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Эти равенства дают возможность найти тригонометрические функции всех углов, кратных $18°$. Они дополняют хорошо известные «табличные» синусы и косинусы углов, кратных $30°$ и $45°$.

Правильный пятиугольник

Если провести все диагонали правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис.5), то получится правильная пятиконечная звезда, высекающая внутри себя меньший правильный пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. Углы правильного пятиугольника равны $108°$, а углы при лучах правильной пятиконечной звезды равны $36°$. Эти же величины являются углами золотых треугольников. Поэтому в получившейся конструкции можно найти много золотых треугольников, некоторые из них разрезаны на меньшие золотые треугольники описанным выше способом. Например, золотой тупоугольный треугольник ABC разрезан линией BD_1 на два золотых треугольника. Один из них – треугольник BD_1C – в свою очередь разрезан на два меньших золотых треугольника отрезком BE_1. А отрезок AE_1 разрезает золотой остроугольный треугольник ABD на два золотых треугольника.

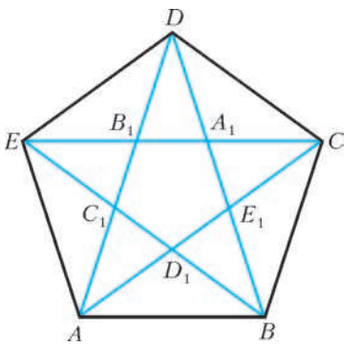

Рис. 5

Золотые треугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Действительно, для этого достаточно построить два отрезка, отношения длин которых равно φ. Затем из двух длинных и одного короткого получается остроугольный золотой треугольник, а из двух коротких и одного длинного – тупоугольный. Осталось показать, как увеличить данный отрезок в φ раз. Один из возможных способов – это действовать «в лоб». Пусть мы имеем отрезок длины b. Сначала строим прямоугольный треугольник с катетами b и $2b$. Его гипотенуза равна $\sqrt{5}b$. Затем эту гипотенузу удлиняем на b и результат делим пополам.

Тем самым, мы умеем строить с помощью циркуля и линейки угол в $108°$, являющийся углом правильного пятиугольника. А значит, мы попутно нашли решение классической задачи о построении правильного пятиугольника. Действительно, для этого достаточно построить пятизвенную ломаную с равными звеньями и углами по $108°$. После откладывания пятого звена она замкнется, и тем самым будет получен правильный пятиугольник. Основанный на той же идее, но более изящный способ построения правильного пятиугольника приведен в упражнении 2.

Число φ и последовательность Фибоначчи

Найдем приближенное значение числа φ: $\varphi = 1{,}61803\ldots$ Обратная величина к φ равна $0{,}61803\ldots$ Золотое сечение – единственное положительное число, обратное к которому получается вычитанием единицы. Это следует из равенства (2). Аналогично, из равенства (3) получаем, что для возведения числа φ в квадрат достаточно добавить к нему единицу: $\varphi^2 = 1 + \varphi$. Зададимся вопросом: можно ли так же просто вычислить другие степени числа φ? Воспользовавшись формулой для квадрата, получаем искомые формулы для последующих степеней:

$$\varphi^3 = \left(\varphi^2\right)\varphi = (1+\varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + (1+\varphi) = 1 + 2\varphi;$$

$$\varphi^4 = \left(\varphi^3\right)\varphi = (1+2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = 2 + 3\varphi;$$

$$\varphi^5 = \left(\varphi^4\right)\varphi = (2+3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi;$$

$$\ldots$$

Нетрудно заметить закономерность:

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n\varphi, \qquad (4)$$

где f_n – последовательность Фибоначчи. Ее легко доказать, используя метод математической индукции. В качестве базы индукции можно взять уже проверенные равенства для $n = 2$ и 3. А шаг индукции заключается в простой выкладке:

$$\varphi^{n+1} = \left(\varphi^n\right)\varphi = \left(f_{n-1} + f_n\varphi\right)\varphi =$$

$$= f_{n-1}\varphi + f_n\varphi^2 = f_{n-1}\varphi + f_n(\varphi+1) =$$

$$= \left(f_{n-1} + f_n\right)\varphi + f_n = f_n + f_{n+1}\varphi.$$

Рассмотрим теперь число $\bar{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ – отрицательный корень уравнения (3). Для его n-й степени выполняется такая же формула, как и для числа φ:

$$\bar{\varphi}^n = f_{n-1} + f_n\bar{\varphi}. \qquad (5)$$

Действительно, доказывая формулу (4), мы пользовались лишь тем, что число φ является корнем уравнения (3), а значит, она останется верной при замене φ на другой корень того же уравнения. Вычтя (5) из (4), получаем $\varphi^n - \bar{\varphi}^n = f_n(\varphi - \bar{\varphi})$, откуда следует $f_n = \dfrac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$, или, после замены φ и $\bar{\varphi}$ на их явные выражения,

$$f_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (6)$$

Эта формула позволяет вычислять число Фибоначчи непосредственно через его номер, не вычисляя все предыдущие, и называется *формулой Бинэ*. На первый взгляд может показаться удивительным, что иррациональное выражение, стоящее в ее правой части, дает целое число при любом n.

Записав формулу Бинэ в виде разности

$$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad (7)$$

заметим, что вычитаемое в правой части является числом, по модулю меньшим $1/\sqrt{5}$, а его знак зависит от четности n. Поэтому n-е число Фибоначчи можно вычислить как ближайшее целое число к $f_n = \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$. При этом округление происходит в меньшую сторону при четных n и в большую сторону при нечетных n.

Замечательные пределы, связанные с золотым сечением

Фундаментальное значение золотого сечения обосновывается также тем, что φ является пределом некоторых простых и естественным образом определенных числовых последовательностей. В качестве примера приведем два бесконечных выражения для числа φ:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}, \qquad (8)$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}. \qquad (9)$$

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 29)

Для обоснования формулы (8) рассмотрим задаваемое ею число φ (мы пока не знаем, что это и есть золотое сечение, а лишь будем это доказывать). Заметим, что в правой части формулы под знаком корня стоит сумма двух слагаемых – единицы и выражения, совпадающего со всей правой частью формулы. Отсюда получаем уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$, легко сводящееся к квадратному уравнению (3). Нам подходит лишь положительный корень этого уравнения, следовательно, рассматриваемое число φ и есть золотое сечение. Аналогично, формула (9) сводится к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, которое опять же приводит нас к квадратному уравнению (3). А значит, число φ, определяемое формулой (9), также равно золотому сечению.

Конечно же, приведенные в предыдущем абзаце рассуждения не являются вполне строгими. Чтобы избавиться от этого недостатка и придать им строгость, нужно прежде всего определить, что означают бесконечные выражения в правых частях формул (8) и (9). Правая часть формулы (8) – это, по определению, предел последовательности

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ корней}}. \qquad (10)$$

Она задается рекуррентным соотношением

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}.$$

Таким образом, уравнение $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ возникает как переход к пределу в правой и левой частях рекуррентного соотношения. Такой переход допустим, если рассматриваемая последовательность сходится. То же самое касается и правой части формулы (9), означающей предел последовательности

$$b_n = \left.1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{1}}}}\right\} n \text{ «этажей»}, \qquad (11)$$

которая может быть задана рекуррентно:

$$b_1 = 1, \quad b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Переход к пределу в этом соотношении приводит нас к уравнению $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Обе рассматриваемые последовательности состоят из положительных чисел, поэтому искомый предел не может быть отрицательным, а значит, можно ограничиться рассмотрением лишь неотрицательных корней уравнений. Для завершения доказательства формул (8) и (9) осталось лишь доказать, что рассматриваемые последовательности (10) и (11) сходятся. Оставим это в качестве упражнения для читателей, знакомых с теоремой Больцано–Вейерштрасса.

Напоследок докажем, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи стремится к золотому сечению. Применяя формулу Бинэ и воспользовавшись тем, что $\frac{\bar{\varphi}}{\varphi} < 1$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{n+1}-\bar{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n-\bar{\varphi}^n} = \varphi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right)^{n}} = \varphi.$$

Более подробную информацию о числах Фибоначчи можно почерпнуть в книге Н.Н.Воробьева [1]. Советуем также прочитать соответствующие главы из книг замечательного популяризатора математики Мартина Гарднера [2, 3] и посвященную золотому сечению главу из классической книги Гарольда Кокстера [4].

Упражнения

1. Обоснуйте следующий способ деления отрезка AB в крайнем и среднем отношении с помощью циркуля и линейки (рис.6). На перпендикуляре к отрезку AB в точке B откладывается отрезок BC, равный половине отрезка AB. Точки A и C соединяются отрезком и на нем откладывается отрезок CK, равный CB. На отрезке AB откладывается отрезок AM, равный AK. Точка M является искомой.

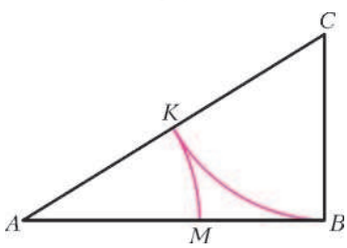

Рис. 6

2. Обоснуйте следующий способ построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки (рис.7). В окружности с центром O проводится диаметр BC и перпендикулярный ему радиус OA. Далее радиус OB делится пополам точкой D. На отрезке DC откладывается отрезок DE, равный DA. Отрезок AE равен стороне правильного пятиугольника, вписанного в исходную окружность. Осталось отложить его последовательно пять раз в виде хорд исходной окружности.

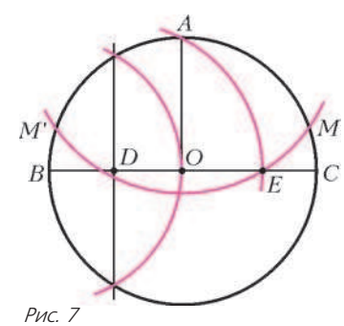

Рис. 7

3. Перечислите все равнобедренные треугольники, которые можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

4. Докажите с помощью формулы бинома Ньютона, что правая часть формулы Бинэ является целым числом при любом n.

5. Назовем последовательность, каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих (а первые два члена могут быть произвольными), *обобщенной последовательностью Фибоначчи*. Найдите формулу, выражающую произвольный член обобщенной последовательности Фибоначчи через ее номер n и два первых члена a и b.

6. Докажите, что последовательности (10) и (11) сходятся.

7. Докажите, что общий член последовательности (11) может быть записан в виде $b_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Литература

1. *Н.Н.Воробьев*. Числа Фибоначчи. (М.: Наука, 1992)
2. *М.Гарднер*. Математические головоломки и развлечения. Глава 23: Число φ – золотое сечение. (М.: Мир, 1999)
3. *М.Гарднер*. Математические новеллы. Глава 32: Числа Фибоначчи. (М.: Мир, 2000)
4. *Г.С.М.Кокстер*. Введение в геометрию. Глава 11: Золотое сечение и филлотаксис. (М.: Наука, 1966)