



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. L. Pavlov, On the maximal size of tree in a random forest,
Diskr. Mat., 2022, Volume 34, Issue 4, 69–83

<https://www.mathnet.ru/eng/dm1729>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

May 14, 2025, 21:25:16



О максимальном объеме дерева случайного леса

© 2022 г. Ю. Л. Павлов*

Рассматриваются леса Гальтона–Ватсона, состоящие из N корневых деревьев и n некорневых вершин. Распределение числа прямых потомков каждой частицы образующего лес критического ветвящегося процесса имеет правильно меняющийся хвост и бесконечную дисперсию. Доказана предельная теорема для максимального объема дерева, когда $N, n \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \infty$. Эта теорема справедлива в значительно более широкой области изменения параметров N и n , чем это было известно ранее.

Работа выполнена при поддержке средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Ключевые слова: лес Гальтона–Ватсона, объем дерева, степень вершины, предельные теоремы

1. Введение

В статьях [1, 2] рассматривались случайные леса Гальтона–Ватсона, содержащие N корневых деревьев и n некорневых вершин. Предполагалось, что в образующих такие леса критических ветвящихся процессах распределения числа прямых потомков частиц имеют конечные математические ожидания, но бесконечные дисперсии. В последние годы методы теории ветвящихся процессов успешно используются при изучении структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования современных сложных сетей коммуникаций, в частности, сети Интернет (см., например, [3]). Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали, что в соответствующих моделях степени вершин графа можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

Конфигурационные графы впервые были введены в [4]. В моделирующих сети конфигурационных графах принято считать, что степень любой вершины не меньше единицы и равна числу инцидентных этой вершине различных полуредер, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Замечено [3, 5], что в сложных сетях коммуникаций число узлов степени k при больших k пропорционально $k^{-\tau}$, где $\tau > 1$. Поэтому в моделирующих такие сети конфигурационных графах

*Место работы: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

обычно предполагается, что степень каждой вершины является значением случайной величины η , имеющей распределение

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots, \tau > 1$, $h(k)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Конфигурационный граф формируется путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Понятно, что сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, поэтому при нечетной сумме в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени или дополнительное полуребро присоединяется к равновероятно выбранной вершине. В [5] отмечается, что появление такого вспомогательного элемента не влияет на асимптотическое поведение основных характеристик графа при стремлении к бесконечности числа вершин.

При построении конфигурационного графа возможно появление кратных ребер, петель и циклов. Хотя таких объектов нет в траекториях ветвящихся процессов, известно ([3]), что существует тесная связь между конфигурационными графами и ветвящимися процессами. Обсудим эту связь, интерпретируя вершины графа как частицы процесса. Если рассмотреть некоторый подграф конфигурационного графа и выделить в нем произвольную вершину, то такому подграфу можно поставить в соответствие траекторию процесса Гальтона – Ватсона, начинающегося с одной частицы, прообразом которой служит выделенная вершина. По аналогии с ветвящимся процессом эту вершину можно назвать начальной. Естественно считать, что распределение числа прямых потомков начальной частицы совпадает с распределением (1) степени начальной вершины графа. Вершины, смежные с начальной, назовем вершинами первого поколения. Любая такая вершина соединена с начальной хотя бы одним ребром. Поэтому распределение числа прямых потомков частиц первого поколения отличается от распределения размера потомства начальной частицы. Обозначим ξ случайную величину, значения которой интерпретируются как численность прямых потомков любой частицы процесса, кроме начальной. Пусть в распределении (1) $\tau > 2$, следовательно, случайная величина η имеет конечное математическое ожидание $\mathbf{E}\eta$. В [3] показано, что в соответствующем конфигурационному графу ветвящемся процессе Гальтона – Ватсона распределение случайной величины ξ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{(k+1)\mathbf{P}\{\eta = k+1\}}{\mathbf{E}\eta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Известно (см., например, [3]), что если число вершин рассматриваемого подграфа конфигурационного графа ограничено или достаточно медленно стремится к бесконечности, то такой подграф с вероятностью, стремящейся к единице, является деревом, корнем которого служит начальная вершина. Этот факт дает основание говорить о локальной древовидности конфигурационного графа, состоящей в том, что в некоторой «окрестности» каждой вершины асимптотически нет кратных ребер, петель и циклов.

Если рассмотреть частицы первого поколения в качестве начальных, то можно говорить о начинающемся с нескольких частиц ветвящемся процессе, в котором (2) является распределением числа прямых потомков любой частицы. Совокупность

всех траекторий такого процесса образует случайный лес Гальтона – Ватсона. В [1, 2] впервые предложено использовать результаты о случайных лесах для исследования структуры конфигурационных графов. Теория случайных лесов наиболее подробно изложена в [6]. Полученные там результаты доказаны (см. также [7]) при условии конечности дисперсии числа прямых потомков частиц ветвящегося процесса. Однако в ветвящихся процессах, используемых для изучения конфигурационных графов, соответствующих реальным сетям, это условие нарушено ([3]) и, следовательно, результаты [6] неприменимы. Поэтому в [1, 2] рассматривались случайные леса в случае бесконечной дисперсии распределений числа потомков частиц.

Пусть ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона G начинается с N частиц и число ξ прямых потомков каждой частицы имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in (2, 3), \quad (3)$$

где медленно меняющаяся на бесконечности функция $h(x)$ при $x \geq 1$ принимает только положительные значения. Легко видеть, что распределение (3) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Далее будем считать, что процесс G является критическим: $\mathbf{E}\xi = 1$. Очевидно, что G распадается на N независимых процессов G_1, \dots, G_N , каждый из которых начинается с одной частицы. Подмножество траекторий такого процесса, общее число частиц которого до вырождения равно $N + n$, вместе с индуцированным процессом распределением вероятностей на этом множестве, образует случайный лес Гальтона – Ватсона $\mathfrak{F}_{N,n}$ с N корневыми деревьями и n некорневыми вершинами.

Объемом корневого дерева называется число его вершин, включая корень. Обозначим ν_{\max} максимальный объем дерева в $\mathfrak{F}_{N,n}$. В статье [1] найдены предельные распределения ν_{\max} в трех областях стремления N и n к бесконечности: $n/N \rightarrow 0$, $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, $n/N \rightarrow \infty$. В последней области возникли наибольшие технические трудности, и соответствующую теорему удалось доказать только при небольшой скорости стремления n/N к бесконечности. Для того чтобы сформулировать возникшие при этом ограничения, введем необходимые обозначения.

Рассмотрим случайную величину $\xi(\lambda)$, имеющую распределение

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $0 < \lambda < 1$, вероятности p_k определены в (3) и

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lambda^k. \quad (5)$$

В качестве значения параметра λ распределения (4) возьмем единственное решение уравнения

$$a = \mathbf{E}\xi(\lambda) = \frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (6)$$

Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и существуют такие положительные Δ, v , где $v < 1/2$, что

$$\left(\frac{n}{N}\right)^2 = o(N^v(1 - \lambda)^{1+\Delta}). \quad (7)$$

Обозначим $\alpha = \lambda/F(\lambda)$, $\beta = -\ln \alpha$, и пусть существует такое $\omega > 0$, что $\beta > (\ln N)^{-\omega}$. В [1] доказано, что при выполнении этих условий $\lambda \uparrow 1$ и ν_{\max} имеет экспоненциальное предельное распределение. В следующей статье [2] показано, что условие (7) можно слегка ослабить и заменить на

$$\left(\frac{n}{N}\right)^2 = O(N^\nu(1-\lambda)^{1+\Delta}). \quad (8)$$

Естественно возник вопрос о предельном распределении ν_{\max} в существенно более широкой области изменения параметров N, n , чем в [1]. В настоящей статье для этой случайной величины доказана предельная теорема, в которой условия на поведение N, n и β значительно слабее. В частности, предполагается, что существует такое ω , $0 < \omega < 1/2$, что

$$\beta > N^{-\omega}. \quad (9)$$

Эта теорема, как и в [1], доказана с использованием обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [8]. В рамках этой схемы устанавливается локальная сходимость к предельным законам распределений сумм вспомогательных независимых случайных величин, образующих схемы серий. Новый результат удалось получить, проводя такое доказательство иначе, чем в [1].

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 сформулировано основное утверждение (теорема 1). Кроме того, в нем доказана лемма 1 о том, что условия теоремы 1 на поведение N и n слабее, чем (8). В разделе 3 вводится вспомогательный ветвящийся процесс $G(\lambda)$ с распределением (4) числа прямых потомков каждой частицы, обсуждается связь между случайными лесами и обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам и приводится лемма 2, являющаяся следствием этой связи. В лемме 3 раздела 4 рассматривается предельное поведение хвоста распределения числа частиц, существовавших в процессе $G(\lambda)$ до его вырождения, при условии, что процесс начинается с одной частицы. В разделе 5 доказаны леммы 4 и 5 об асимптотике общего числа частиц, существовавших в процессе $G(\lambda)$. В разделе 6 доказаны леммы 6 и 7 об асимптотическом поведении сумм вспомогательных случайных величин. Перечисленные леммы используются в разделе 7, где доказана теорема 1.

2. Основной результат

Обозначим

$$L = L(N, n, \delta) = \min\left(n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta}, \frac{N^2}{n}(1-\lambda)^{3-\tau+\delta}\right), \quad (10)$$

где $\delta > 0$. В доказанной ниже теореме предполагается, что при $N, n \rightarrow \infty$ существует такое $\delta_0 > 0$ что $L(N, n, \delta_0) \rightarrow \infty$. Поскольку $\lambda \uparrow 1$, легко видеть, что в этом случае для всех δ , $0 < \delta \leq \delta_0$,

$$L(N, n, \delta) \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Введем стремящуюся к бесконечности последовательность B_r , $r = 1, 2, \dots$, которая при $r \rightarrow \infty$ удовлетворяет условию

$$B_r \sim (rh(B_r))^{\frac{1}{(\tau-1)}}. \quad (12)$$

Пусть $g(x)$ обозначает плотность устойчивого закона с параметром $\tau - 1$ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -c|t|^{\tau-1} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2} \right) \right\},$$

где

$$c = \frac{\Gamma(2-\tau)}{\tau-1} \cos \frac{\pi(\tau-1)}{2},$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. Заметим, что $0 < g(0) < \infty$ при $\tau \in (2, 3)$ в силу одновершинности устойчивых распределений (см. [9, п. 2.7]).

Для ν_{\max} справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть случайный лес Гальтона–Ватсона, состоящий из N корневых деревьев и содержащий n некорневых вершин, образован ветвящимся процессом с распределением (3) числа прямых потомков каждой частицы, где $\tau \in (2, 3)$, а медленно меняющаяся на бесконечности функция $h(x)$ выбрана так, что $\mathbf{E}\xi = 1$. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, выполнено условие (9) и существует такое $\delta_0 > 0$, что верно соотношение (11). Если последовательность $r = r(N, n)$ удовлетворяет условию

$$\frac{Ng(0)}{r\beta e^{r\beta} B_r} \rightarrow z, \tag{13}$$

где z — фиксированное положительное число, то

$$\mathbf{P}\{\nu_{\max} \leq r\} \rightarrow e^{-z}.$$

Во введении отмечалось, что условие (11) слабее, чем ограничение (8). Покажем это.

Лемма 1. Из условия (8) следует (11). Обратное неверно.

Доказательство. Пусть выполнено (8). Тогда

$$n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta} = n \left(\frac{1}{xN^v} \left(\frac{n}{N} \right)^2 \right)^{\frac{\tau-1+\delta}{1+\Delta}},$$

где $0 < x \leq C_3 < \infty$, здесь и далее C_3, C_4, \dots означают некоторые положительные постоянные. Отсюда

$$n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta} \geq C_4 \left(\frac{n}{N} \right)^{1+2\frac{\tau-1+\delta}{1+\Delta}} N^{1-v\frac{\tau-1+\delta}{1+\Delta}}. \tag{14}$$

Очевидно, что при $0 < v < 1/2$, $2 < \tau < 3$ и достаточно малых δ, Δ

$$v^{\frac{\tau-1+\delta}{1+\Delta}} < 1, \tag{15}$$

и из (14) следует, что

$$n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta} \rightarrow \infty. \tag{16}$$

Далее, из (8) находим, что

$$\frac{N^2}{n} (1-\lambda)^{3-\tau+\delta} \geq C_5 n^{\frac{4}{2+v}-1} (1-\lambda)^{3-\tau+\delta-\frac{2+2\Delta}{2+v}}.$$

Легко видеть, учитывая (16), что в рассматриваемых условиях последнее выражение стремится к бесконечности, отсюда и из (10) получаем (11).

Покажем теперь, что условие (11) может выполняться и в случае нарушения (8). Пусть

$$\left(\frac{n}{N}\right)^2 = xN^v(1-\lambda)^{1+\Delta}, \quad (17)$$

где $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta} = n\left(\frac{1}{xN^v}\left(\frac{n}{N}\right)^2\right)^{\frac{\tau-1+\delta}{1+\Delta}}. \quad (18)$$

Отсюда и из (8) следует, что если x стремится к бесконечности достаточно медленно, то справедливо соотношение (16).

Из (17) вытекает, что

$$\frac{N^2}{n}(1-\lambda)^{3-\tau+\delta} = x^{-\frac{2}{2+v}}n^{\frac{2-v}{2+v}}(1-\lambda)^{3-\tau+\delta-\frac{2+\Delta}{2+v}}.$$

Принимая во внимание (16), отсюда находим, что если $x \rightarrow \infty$, но не слишком быстро, то

$$\frac{N^2}{n}(1-\lambda)^{3-\tau+\delta} \rightarrow \infty$$

и, следовательно, (11) имеет место. Лемма 1 доказана. \square

3. Случайный лес и обобщенная схема размещения

Рассмотрим ветвящийся процесс $G(\lambda)$, отличающийся от G только тем, что число прямых потомков каждой частицы процесса $G(\lambda)$ имеет распределение (4), а не (3). Так же, как и G , процесс $G(\lambda)$ распадается на N начинающихся с одной частицы независимых процессов $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$. Обозначим $\nu^{(1)}(\lambda), \dots, \nu^{(N)}(\lambda)$ случайные величины, равные числам частиц, существовавших в процессах $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$ соответственно до их вырождения. Разумеется, эти случайные величины независимы и одинаково распределены. Пусть $\nu(\lambda)$ — общее число частиц, существовавших в процессе $G(\lambda)$ до его вырождения. Тогда $\nu(\lambda) = \nu^{(1)}(\lambda) + \dots + \nu^{(N)}(\lambda)$. Обозначим также $\nu_1(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ случайные величины, равные объемам деревьев леса из $\mathfrak{F}_{N,n}$, корни которых занумерованы числами $1, \dots, N$ соответственно. В [6] показано, что если натуральные числа k_1, \dots, k_N выбраны так, что $k_1 + \dots + k_N = N + n$, то

$$\mathbf{P}\{\nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \dots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N\} = \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = k_1, \dots, \nu^{(N)}(\lambda) = k_N \mid \nu(\lambda) = N + n\}. \quad (19)$$

Это равенство означает, что два набора случайных величин $\nu_1(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ и $\nu^{(1)}(\lambda), \dots, \nu^{(N)}(\lambda)$ удовлетворяют условиям обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [8].

Введем такие независимые случайные величины $\nu_r^{(1)}(\lambda), \dots, \nu_r^{(N)}(\lambda)$, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(i)}(\lambda) = k\} = \mathbf{P}\{\nu^{(i)}(\lambda) = k \mid \nu^{(i)}(\lambda) \leq r\}, \quad (20)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k \leq r$. Кроме того, пусть

$$P_r = \mathbf{P}\{\nu_r^{(i)}(\lambda) > r\} \quad (21)$$

и $\nu_r(\lambda) = \nu_r^{(1)}(\lambda) + \dots + \nu_r^{(N)}(\lambda)$. В [6] доказано, что из (19) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *При таких n , что $\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = N + n\} > 0$*

$$\mathbf{P}\{\nu_{\max} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\nu_r(\lambda) = N + n\}}{\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = N + n\}}.$$

Идея доказательства теоремы 1 основана на использовании леммы 2. Для этого в следующем разделе рассматривается асимптотика NP_r , а предельные распределения $\nu(\lambda)$ и $\nu_r(\lambda)$ найдены в разделах 5 и 6 соответственно.

4. Асимптотика NP_r

Рассмотрим предельное поведение вероятности (21).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $NP_r \rightarrow z$.*

Доказательство. Подобное утверждение было доказано в лемме 5 статьи [1]. Но условия на поведение N , n и β изменились, поэтому здесь приводится полное доказательство с необходимыми изменениями.

Обозначим $\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots$ независимые случайные величины, распределения которых одинаковы и совпадают с (4). Пусть $\zeta_S(\lambda) = \xi_1(\lambda) + \dots + \xi_S(\lambda)$. В [8, гл. II, §1, лемма 3] показано, что при $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k + 1\} = \frac{1}{r + k + 1} \mathbf{P}\{\zeta_{r+k+1}(\lambda) = r + k\}. \quad (22)$$

Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots независимы, их распределения одинаковы и заданы равенствами (3), а $\zeta_S = \xi_1 + \dots + \xi_S$. Из (3), (4) и (22) вытекает равенство

$$\mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k + 1\} = \frac{\alpha^{r+k}}{(r + k + 1)F(\lambda)} \mathbf{P}\{\zeta_{r+k+1} = r + k\}, \quad (23)$$

где, напомним, $\alpha = \lambda/F(\lambda)$. В [1, соотношение (4.6)] доказано, что при $s \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{s+1} = s\} \sim \frac{g(0)}{B_s}. \quad (24)$$

Используя (5), (21), (23), (24), равенство $\beta = -\ln \alpha$ и соотношения $\lambda \rightarrow 1, F(\lambda) \rightarrow 1$, находим, что

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{F(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{r+k}}{r + k + 1} \mathbf{P}\{\zeta_{r+k+1} = r + k\} = (g(0) + o(1)) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)B_k} e^{-k\beta} \\ &\sim g(0) \int_r^{\infty} \frac{1}{xB_{[x]}} e^{-x\beta} dx \sim g(0) \int_1^{\infty} \frac{1}{yB_{[yr]}} e^{-yr\beta} dy = \frac{g(0)}{B_r} \int_1^{\infty} \frac{B_r}{yB_{[yr]}} e^{-yr\beta} dy. \end{aligned} \quad (25)$$

В силу (12) при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{B_r}{B_{[yr]}} \rightarrow \frac{1}{y^{1/(\tau-1)}}$$

равномерно внутри любого конечного интервала $[1, K]$. Поэтому

$$\int_1^K \frac{B_r}{yB_{[yr]}} e^{-yr\beta} dy \sim \int_1^K \frac{1}{y^{\tau/(\tau-1)}} e^{-yr\beta} dy = (r\beta)^{1/(\tau-1)} \int_{r\beta}^{Kr\beta} \frac{1}{u^{\tau/(\tau-1)}} e^{-u} du. \quad (26)$$

Далее нам понадобится хорошо известное свойство медленно меняющихся функций, состоящее в том, что для любого $\delta > 0$ и достаточно больших x

$$x^{-\delta} < h(x) < x^\delta. \quad (27)$$

Заметим, что $r\beta \rightarrow \infty$. Действительно, если бы это было не так, то из (12), (13), (27) следовало бы, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$

$$N \leq C_6 r^{\frac{1+\delta}{\tau-1}}. \quad (28)$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\frac{r}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad (29)$$

иначе, в силу (9) и (12), условие (13) не выполнялось бы. Из (10), (11) видим, что $N^2/n \rightarrow \infty$, а это противоречит (28). Согласно лемме 5 из [6, гл. II, § 2] при $x \rightarrow \infty$ и любом фиксированном d

$$\int_x^\infty y^d e^{-y} dy = x^d e^{-x} (1 + o(1)),$$

поэтому из (26) получаем, что

$$\int_1^K \frac{B_r}{yB_{[ry]}} e^{-yr\beta} dy \sim \frac{1}{r\beta} e^{-r\beta}. \quad (30)$$

Легко видеть, что

$$\int_K^\infty \frac{B_r}{yB_{[ry]}} e^{-yr\beta} dy \leq \frac{C_7}{K} \int_K^\infty e^{-yr\beta} dy = \frac{C_7}{Kr\beta} e^{-Kr\beta}. \quad (31)$$

Поскольку число K можно выбрать сколь угодно большим, из (25), (30), (31) находим, что

$$P_r \sim \frac{g(0)}{r\beta e^{r\beta} B_r}.$$

Отсюда и из (13) следует утверждение леммы 3. □

5. Предельное распределение $\nu(\lambda)$

Обозначим $m = \mathbf{E}\nu^{(1)}(\lambda)$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\nu^{(1)}(\lambda)$. Пусть $\psi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\frac{\nu(\lambda) - Nm}{\sigma\sqrt{N}}$. Покажем, что распределение этой случайной величины слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Лемма 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и выполнено условие (11). Тогда $\psi(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$ при любом фиксированном t .

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu^{(1)}(\lambda)$. Следуя обычному методу доказательства слабой сходимости, заметим, что при достаточно малых t справедливо разложение

$$\ln \varphi(t) = itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (32)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|s| \leq |t|} |(\ln \varphi(s))'''|. \quad (33)$$

В [1] показано, что

$$m = \frac{1}{1-a}, \quad \sigma^2 = \frac{b^2}{(1-a)^3}, \quad (34)$$

где $a = \mathbf{E}\xi(\lambda)$, $b^2 = \mathbf{D}\xi(\lambda)$. Из (6) следует, что $a \rightarrow 1$, поэтому из (32)–(34) находим, что $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$ и при достаточно больших N, n и любом фиксированном t

$$\ln \psi(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (35)$$

Осталось показать, что последнее слагаемое в (35) стремится к нулю.

Из оценки (4.13) статьи [2], полученной с учетом (3) и (27), следует, что

$$|(\ln \varphi(t))'''_t| \leq C_8 (1-\lambda)^{\tau-4-\delta} \left(\frac{n}{N}\right)^4 \max\left(1, (1-\lambda)^{\tau-2-\delta} \frac{n}{N}\right). \quad (36)$$

Кроме того, в этой же статье показано (см. (4.6)), что

$$\sigma^2 > \frac{C_9}{(1-\lambda)^{3-\tau-\delta}} \left(\frac{n}{N}\right)^3. \quad (37)$$

Отсюда и из (33), (36) находим:

$$\frac{1}{\sigma^3\sqrt{N}} \left| Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \right| < C_{10} \frac{\max(1, (1-\lambda)^{\tau-2-\delta} n/N)}{\sqrt{n(1-\lambda)^{\tau-1+5\delta}}}. \quad (38)$$

Отсюда и из (10), (11) получаем, что при $\delta \leq \delta_0/7$ правая часть (38) стремится к нулю, что и завершает доказательство леммы 4. \square

Покажем теперь, что на самом деле имеет место локальная сходимость распределения $\frac{\nu(\lambda) - N - n}{\sigma\sqrt{N}}$ к нормальному закону.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда для натуральных l равномерно относительно $u = \frac{l - N - n}{\sigma\sqrt{N}}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = l\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Доказательство. Будем следовать стандартной схеме доказательства локальных предельных теорем. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = l\}$ по формуле обращения в виде интеграла:

$$\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = l\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut}\psi(t) dt. \quad (39)$$

Поскольку

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iut - t^2/2\} dt, \quad (40)$$

из (39), (40) следует, что разность

$$R = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\nu(\lambda) = l\} - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right)$$

можно представить в виде суммы $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-iut} (\psi(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}) dt, & I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sqrt{L}} e^{-iut} \psi(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sqrt{L} < |t| \leq \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt, & I_4 &= \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} < |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \psi(t) dt, \\ I_5 &= - \int_{A < |t|} \exp\{-iut - t^2/2\} dt, \end{aligned} \quad (41)$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Разумеется, лемма будет доказана, если выбором достаточно больших N , n , A и достаточно малого ε разность R можно сделать сколь угодно малой. Для этого оценим интегралы $I_1 - I_5$.

Очевидно, что при любом фиксированном A в силу леммы 4 справедливо соотношение $I_1 \rightarrow 0$. Далее,

$$|I_5| \leq \int_{A < |t|} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (42)$$

и этот интеграл тем меньше, чем больше A .

Оценим интеграл I_4 . Хорошо известно, что при $\varepsilon < |t| \leq \pi$ справедливо неравенство

$$|\psi(t)| \leq e^{-C_{11}}, \quad (43)$$

поэтому

$$|I_4| \leq 2\pi\sigma\sqrt{N} e^{-C_{11}N}. \quad (44)$$

Неравенство (37) получено в [2] прямыми вычислениями с использованием (3)–(5), при этом при больших k значения $h(k+1)$ оценивались снизу с помощью (27). Повторяя эти рассуждения и применяя оценку сверху значений медленно меняющейся функции, нетрудно показать, что

$$\sigma^2 < \frac{C_{12}}{(1-\lambda)^{3-\tau+\delta}} \left(\frac{n}{N}\right)^3. \quad (45)$$

Из (10), (11) следует, что

$$\sigma^2 < C_{13}N^3(1 - \lambda)^{6-2\tau+2\delta},$$

поэтому из (44) следует, что при достаточно малых δ

$$|I_4| \leq C_{14}N^2(1 - \lambda)^{3-\tau+\delta}e^{-C_{11}N} \rightarrow 0. \quad (46)$$

Из (10), (35) и (38) получаем, что в области интегрирования I_2 при достаточно малом ε

$$|\psi(t)| \leq e^{-C_{15}t^2},$$

поэтому

$$|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_{15}t^2} dt.$$

Понятно, что последний интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Осталось рассмотреть I_3 . Для получения необходимой оценки воспользуемся идеей доказательства леммы 4 из [8, гл. 2, § 4]. Обозначим $F_\lambda(x)$ производящую функцию распределения (4):

$$F_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)x^k. \quad (47)$$

Поскольку $\lambda < 1$, функция $F_\lambda(x)$ имеет все производные и при $|x| \leq 1$ в окрестности единицы она может быть представлена следующим образом:

$$F_\lambda(x) = F_\lambda(1) + F'_\lambda(1)(x - 1) + \frac{\tilde{Q}(1)}{2}(x - 1)^2, \quad (48)$$

где

$$|\tilde{Q}(1)| \leq 2 \max_{|s| \leq 1} |F''_\lambda(s)|. \quad (49)$$

Обозначим $U(x)$ производящую функцию распределения случайной величины $\nu^{(1)}(\lambda)$. Пусть $z = \exp\{\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\}$, тогда, очевидно, $U(z) = \varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$. Хорошо известно (см. лемму 1 из [8, гл. 2, § 4]), что

$$U(z) = zF_\lambda(U(z)). \quad (50)$$

Очевидно, что $|z| = 1$, $|U(z)| \leq 1$. Положим $x = U(z)$. Тогда из (48)–(50) следует, что

$$U(z) = z \left(1 + F'_\lambda(z)(U(z) - 1) + \frac{\tilde{Q}(1)}{2}(U(z) - 1)^2 \right). \quad (51)$$

Решая это квадратное уравнение относительно $U(z)$ и выбирая ветвь корня так, чтобы $0 \leq U(z) \leq 1$ для действительных z , получим, что

$$U(z) = 1 - \sqrt{\frac{2(1 - z)}{\tilde{Q}(1)}}. \quad (52)$$

Учитывая, что

$$\sqrt{-2it} = \sqrt{|t|} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \right),$$

из (52) видим, что в области интегрирования I_3

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_{16} \sqrt{\frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}|\tilde{Q}(1)|}} \right\}. \quad (53)$$

Из (3), (4), (27) и (47) нетрудно получить, что при λ , достаточно близких к единице,

$$C_{17}\Phi(\lambda, \tau - 2 + \delta, 1) < F_\lambda''(1) < C_{17}\Phi(\lambda, \tau - 2 - \delta, 1), \quad (54)$$

где $\Phi(\lambda, s, v)$ — трансцендентная функция Лерча (см. [10, п. 1.11]), имеющая вид

$$\Phi(\lambda, s, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+v)^s}. \quad (55)$$

Функция (55) разлагается в ряд следующим образом [10, п. 1.11, формула (8)]:

$$\Phi(\lambda, s, v) = \frac{\Gamma(1-s)}{\lambda^v} \left(\ln \frac{1}{\lambda} \right)^{s-1} + \frac{1}{\lambda^v} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(s-k, \lambda) \frac{\ln^k \lambda}{k!},$$

где $|\ln \lambda| < 2\pi$, $\lambda \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $s \notin \{1, 2, \dots\}$, а $\zeta(s-k, \lambda)$ — значения обобщенной дзета-функции. Отсюда и из (3), (4), (54), (55) находим, что при λ , достаточно близких к единице,

$$C_{18}(1-\lambda)^{\tau-3+\delta} < F_\lambda''(1) < C_{18}(1-\lambda)^{\tau-3-\delta}. \quad (56)$$

Собрав (45), (49), (53) и (56), получаем, что при достаточно малых δ

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_{18}|t|^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{NL^{\frac{1-\delta}{2}}}{n\sqrt{n}} (1-\lambda)^{\frac{9-3\tau+3\delta}{2}}} \right\}. \quad (57)$$

Предположим, что $L = n(1-\lambda)^{\tau-1+\delta}$. Тогда из (57) следует, что

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_{18}|t|^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{N}{n^{1+\frac{\delta}{2}}} (1-\lambda)^{4-\tau+2\delta}} \right\}.$$

Из этого неравенства, (10) и (11) находим, что при достаточно малых δ

$$|I_3| \leq \int_{\varepsilon\sqrt{L}}^{\infty} e^{-C_{19}|t|^{\frac{\delta}{2}}} dt \rightarrow 0. \quad (58)$$

Пусть $L = N^2(1-\lambda)^{3-\tau+\delta}/n$. Тогда, согласно (57),

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_{18}|t|^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\frac{N^{2-\delta}}{n^{2-\frac{\delta}{2}}} (1-\lambda)^{6-2\tau+2\delta-\frac{\delta^2}{2}}} \right\},$$

откуда опять приходим к (58), что и завершает доказательство леммы 5. \square

6. Предельные распределения $\nu_r(\lambda)$

Пусть $\Psi_r(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $\frac{\nu_r(\lambda) - N - n}{\sigma\sqrt{N}}$. Покажем, что распределение этой случайной величины слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $\psi_r(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$ при любом фиксированном t .

Доказательство. Будем следовать доказательству леммы 8 из [1]. Обозначим $\varphi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu_r^{(1)}(\lambda)$. Из (20) и (21) вытекает, что

$$\varphi_r(t) = (1 - P_r)^{-1} \left(\varphi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k\} e^{it(r+k)} \right). \quad (59)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= (1 - P_r)^{-N} \exp\left\{-\frac{i(N+n)t}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \\ &\quad \times \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k\} \exp\left\{\frac{it(r+k)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \right)^N. \end{aligned} \quad (60)$$

Из леммы 4 и (60) находим, что

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - P_r)^{-N} (1 + o(1)) \\ &\quad \times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k\} \exp\left\{\frac{it(r+k)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \right)^N. \end{aligned} \quad (61)$$

Поскольку $|e^{ix} - 1| \leq |x|$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r + k\} \exp\left\{\frac{it(r+k)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + R(t), \quad (62)$$

где

$$|R(t)| \leq \frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} (r+k) \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r+k\}. \quad (63)$$

Из (61)–(63) видно, что для доказательства леммы 6 достаточно установить справедливость соотношения

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (r+k) \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r+k\} = o(N^{-1}). \quad (64)$$

Аналогично тому, как было получено соотношение (25), с помощью (24) находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (r+k) \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r+k\} &= \frac{1}{F(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r+k}{r+k+1} \alpha^{r+k} \mathbf{P}\{\zeta_{r+k+1} = r+k\} \\ &= \frac{g(0) + o(1)}{F(\lambda)B_r} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(r+k)\beta} = \frac{g(0) + o(1)}{B_r} \sum_{k=r+1}^{\infty} e^{-k\beta}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} (r+k) \mathbf{P}\{\nu^{(1)}(\lambda) = r+k\} < \frac{C_{20}}{B_r} \int_r^{\infty} e^{-y\beta} dy = \frac{C_{20}e^{-r\beta}}{\beta B_r}.$$

Таким образом, согласно (64), осталось показать, что

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{N}\beta e^{r\beta}B_r} \rightarrow 0. \quad (65)$$

Как видно из (13), $N \leq C_{21}r\beta e^{r\beta}B_r$, поэтому, используя (37), получаем

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{N}\beta e^{r\beta}B_r} < C_{22} \frac{rN(1-\lambda)^{\frac{3-\tau-\delta}{2}}}{n\sqrt{n}}.$$

Отсюда и из (29) следует (65). Лемма 6 доказана. \square

В следующей лемме установлена локальная сходимость.

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для натуральных l равномерно относительно $u = \frac{l-N-n}{\sigma\sqrt{N}}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_r(\lambda) = l\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Доказательство. Лемма 7 доказывается аналогично лемме 5. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\nu_r(\lambda) = l\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-iut} \Psi_r(t) dt. \quad (66)$$

Полагая

$$R_r = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\nu_r(\lambda) = l\} - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right)$$

и используя (40), (66), запишем равенство

$$R_r = I_{1,r} + I_{2,r} + I_{3,r} + I_{4,r} + I_5, \quad (67)$$

где интегралы $I_{1,r} - I_{4,r}$ отличаются от $I_1 - I_4$ в (41) только заменой $\Psi(t)$ на $\Psi_r(t)$, а I_5 остается без изменений.

Оценим предельное поведение интегралов, образующих сумму (67). Из леммы 6 следует, что $I_{1,r} \rightarrow 0$ при любом фиксированном A . Для оценки I_5 используем (42). Для $|\varphi_r(t)|$ при $\varepsilon < |t| \leq \pi$ справедлива оценка, подобная (43), поэтому для $I_{4,r}$ можно написать оценку вида (44) и повторить рассуждения, которые приводят, как

и в (46), к соотношению $I_{4,r} \rightarrow 0$. Из (59) и леммы 3 следует, что в областях интегрирования $I_{2,r}$ и $I_{3,r}$ при достаточно малом ε

$$\left| \varphi_r \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \left(1 + O \left(\frac{1}{N} \right) \right) \left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right|. \quad (68)$$

Из (10), (11), (32), (33) и (38) находим, что если $A < |t| \leq \varepsilon\sqrt{L}$, то

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq e^{-C_{23} \frac{t^2}{N}},$$

поэтому (68) влечет за собой оценку

$$|I_{2,r}| \leq C_{24} \int_A^\infty e^{-C_{23} t^2} dt,$$

а последний интеграл можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большое A . Наконец, интеграл $I_{3,r}$ также оценивается с помощью (57) и (68), что дает оценку, аналогичную (58). Лемма 7 доказана. \square

7. Доказательство теоремы

Теорема 1 доказывается с помощью леммы 2. Из лемм 5 и 7 следует, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\nu_r(\lambda) = N + n\}}{\mathbf{P}\{\nu(\lambda) = N + n\}} \rightarrow 1, \quad (69)$$

а из леммы 3 получаем, что

$$(1 - P_r)^N \rightarrow e^{-z}.$$

Отсюда, из (69) и леммы 2 следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., “Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе”, *Матем. сб.*, **212**:9 (2021), 146–163.
2. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А., “Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы”, *Труды МИАН*, **316** (2022), 298–315.
3. Hofstad R., *Random Graphs and Complex Networks*, Vol.1, Cambridge University Press, Cambridge, 2017, xvi+321 с., Vol.2, <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf>.
4. Bollobas B., “A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs”, *Eur. J. Comb.*, **1**:4 (1980), 311–316.
5. Reittu H., Norros I., “On the power-law random graph model of massive data networks”, *Performance Evaluation*, **55**:1-2 (2004), 3–23.
6. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*, Петрозаводск: Карельский научный центр РАН, 1996, 259 с.
7. Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л., “Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона”, *Дискретная математика*, **12**:1 (2000), 47–59.
8. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984, 207 с.
9. Золотарев В. М., *Одномерные устойчивые распределения*, М.: Наука, 1983, 304 с.
10. Бейтман Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, М.: Наука, 1965, 296 с.