S. I. Nebaluev, M. N. Susin, Tolerant bundle of ways and Gurevich's theorem for tolerant spaces, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2009, Volume 9, Issue 4, 41–44

DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-41-44

УДК 513.6

# ТОЛЕРАНТНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПУТЕЙ И ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА ДЛЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**С.И. Небалуев, М.Н. Сусин**

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: NebaluevSI@yandex.ru, SusinMN@mail.ru

В статье построено толерантное расслоение путей с толерантно стягиваемым пространством расслоения и с помощью точной гомотопической последовательности и гомологической спектральной последовательности толерантного расслоения доказывается толерантный аналог теоремы Гуревича.

**Ключевые слова:** толерантные пространства, толерантные расслоения, толерантные гомотопические группы, группы гомологий, спектральные последовательности толерантных расслоений, теорема Гуревича.

**Tolerant Bundle of Ways and Gurevich's Theorem for Tolerant Spaces**

**S.I. Nebaluev, M.N. Susin**

Saratov State University,
Chair of Computer Algebra and the Theory of Numbers
E-mail: NebaluevSI@yandex.ru, SusinMN@mail.ru

In the article the tolerant bundle of ways with tolerant collapsible bundle space is constructed and the tolerant analogue of the Gurevich's theorem is proved by means of exact homotopic sequence and homology spectral sequence of tolerant bundles .

**Key words:** tolerant spaces, tolerant bundles, tolerant homotopic groups, homology groups, spectral sequences of tolerant bundles, Gurevich's theorem.

Толерантные пространства были определены Зиманом [1] и в настоящее время интерпретируются как наиболее общая математическая модель понятия схожести, позволяющая заменять непрерывность в различных разделах математики и ее приложений.

**Определение 1.** *Толерантным пространством* называется пара $(X, \tau)$, состоящая из множества $X$ и рефлексивного и симметричного бинарного отношения $\tau \in X \times X$, называемого отношением толерантности.

Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ толерантных пространств называется *толерантным*, если из толерантности $x_1 \tau x_2$ (это означает $(x_1, x_2) \in \tau$) следует $f(x_1)\theta f(x_2)$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $(I_n, \iota_n)$ и назовем *толерантным отрезком* длины $n$ толерантное пространство, в котором $I_n = \left\{ \frac{k}{n} \middle| \ k = \overline{0, n} \right\}$, $\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \ \Leftrightarrow \ |k - l| \le 1$.

**Определение 2.** Толерантные отображения $f_0,\ f_1 : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ называются *толерантно гомотопными относительно подмножества* $A \subset X$ и обозначаются $f_0 {\sim} f_1 (rel\ A)$, если найдутся число $n \in \mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \to (Y, \theta)$, такие что

$$(\forall\ x \in X)\ F(x, 0) = f_0(x),\ F(x, 1) = f_1(x); \qquad (\forall\ x \in X)(\forall\ k = \overline{0, n})\ F\left(x, \frac{k}{n}\right) = f_0(x).$$

Если в определении 2 имеем $n = 1$, то толерантная гомотопия называется *простой* и записывается $f_0 \approx f_1 (rel\ A)$, а если $A = 0$, то записывается $f_0 \approx f_1$.

**Определение 3.** Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется *толерантным расслоением*, если для любого пространства $(Y, \theta)$ и любых толерантных отображений

$$F : (Y \times I_n,\ \theta \times \iota_n) \to (B, \tau), \quad f' : (Y, \theta) \to (E, \overline{\tau})$$

таких, что $F(y, 0) = p \circ f'(y),\ y \in Y$, существует толерантное отображение $F' : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (E, \overline{\tau})$, такое что $F'(y, 0) = f'(y)$ и $p \circ F' = F$.

Рассматриваемое далее толератное пространство толерантных путей пространства $(X, \tau)$ с проекцией конечной точки удовлетворяет определению 3 с точностью до несущественного изменения начальной функции $f'(y)$.

**Определение 4.** *Толерантным путем длины* $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $(X, \tau)$ называется толерантное отображение $\omega_n : (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$. Точки $\omega_n(0),\ \omega_n(1) \in X$ называются началом и концом пути $\omega_n$. Если $\omega_n(0) = \omega_n(1) = x_0$, то $\omega_n$ называется петлей в точке $x_0$.

Для путей $\omega_n$, $\omega'_m$ в пространстве $(X,\tau)$, у которых $\omega_n(1)=\omega'_m(0)$, определен путь $\omega_n*\omega'_m$ длины $n+m$, такой что

$$\omega_n*\omega'_m\left(\frac{k}{n+m}\right)=\begin{cases}\omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & k=\overline{0,n},\\ \omega'_m\left(\frac{k-n}{m}\right), & k=\overline{n,n+m}.\end{cases}$$

**Определение 5.** *Элементарным замедлением в точке* $\frac{k}{n}$, $k=\overline{0,n}$, толерантного пути $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to(X,\tau)$ называется толерантный путь $\mu(k)(\omega_n):(I_{n+1},\iota_{n+1})\to(X,\tau)$, такой что

$$(\forall\ l=\overline{0,n+1})\quad \mu(k)(\omega_n)\left(\frac{l}{n+1}\right)=\begin{cases}\omega_n\left(\frac{l}{n}\right), & l=\overline{0,k};\\ \omega_n\left(\frac{l-1}{n}\right), & l=\overline{k+1,n+1}.\end{cases}$$

Обозначим через $P(X,x_0)$ — множество толерантных путей в $(X,\tau)$ с началом в точке $x_0\in X$.

**Определение 6.** Пути $\omega_n$, $\omega'_m\in P(X,x_0)$, где для определенности считаем $n\le m$, называются *ϰ-толерантыми*, если выполняются следующие свойства: 1) $\omega'_m=(\mu(0))^{m-n}(\gamma'_n)$, 2) $\omega_n\approx\gamma'_n$.

В толерантном пространстве $(P(X,x_0),\varkappa)$ будем рассматривать подпространство толерантных петель $(\Omega(X,x_0),\varkappa)$ с $\Omega(X,x_0)=\{\omega_n\in P(X,x_0)\mid \omega_n(0)=\omega_n(1)=x_0\}$, подпространство путей ограниченной длины $(P_M(X,x_0),\varkappa)$ с $P_M(X,x_0)=\{\omega_n\in P(X,x_0)\mid n\le M\}$, $M\in\mathbb{N}$, подпространство постоянных путей $(CP(X,x_0),\varkappa)$ с $CP(X,x_0)=\left\{\varepsilon_n\in P(X,x_0)\mid (\forall\ k=\overline{0,n})\ \varepsilon_n\left(\frac{k}{n}\right)=x_0\right\}$.

Из определения 6 легко получить условие толерантности в $(CP(X,x_0),\varkappa)$ :

$$(\forall\ \varepsilon_n,\varepsilon_m\in CP(X,x_0))\ \varepsilon_n\varkappa\varepsilon_m.$$

**Теорема 1.** *Для любого $M\in\mathbb{N}$ пространство $(P_M(X,x_0),\varkappa)$ является толерантно стягиваемым.*

**Доказательство.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что отображения

$$F:P_M(X,x_0)\times I_M\to P_M(X,x_0),\qquad F\left(\omega_n,\frac{l}{M}\right)\left(\frac{k}{n}\right)=\begin{cases}x_0, & n\le l,\\ \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & l\le n,\ k=\overline{0,n-l},\\ \omega_n\left(\frac{n-l}{n}\right), & l\le n,\ k=\overline{n-l,n},\end{cases}$$

$$G:CP_M(X,x_0)\times I_1\to CP_M(X,x_0),\qquad G(\varepsilon_n,l)=\begin{cases}\varepsilon_n, & l=0,\\ \varepsilon_1, & l=1,\end{cases}$$

осуществляют толерантные гомотопии

$$F:1_{P_M(X,x_0)}\sim\varphi(rel\ CP_M(X,x_0)),\qquad G:1_{CP_M(X,x_0)}\sim const_{\varepsilon_1},$$

где $\varphi:P_M(X,x_0)\to CP_M(X,x_0)\subset P_M(X,x_0)$, $\varphi(\omega_n)\overset{df}{=}\varepsilon_n$, $\mathrm{const}_{\varepsilon_1}:CP_M(X,x_0)\to\{\varepsilon_1\}\subset$ $\subset CP_M(X,x_0)$, $\mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_n)\equiv\varepsilon_1$. Отсюда следует, что отображение $F*G:P_M(X,x_0)\times I_{M+1}\to$ $\to P_M(X,x_0)$, такое что

$$F*G\left(\omega_n,\frac{l}{M+1}\right)=\begin{cases}F\left(\omega_n,\frac{l}{M}\right), & l=\overline{0,M},\\ G(\varepsilon_n,l-M), & l=\overline{M,M+1},\end{cases}$$

осуществляет толерантную гомотопию $F*G:1_{P_M(X,x_0)}\sim\mathrm{const}_{\varepsilon_1}$, $\mathrm{const}_{\varepsilon_1}(\omega_n)\equiv\varepsilon_1$. □

**Теорема 2.** *Для произвольного толерантного пространства $(X,\tau)$ пространство $(P(X,x_0),\varkappa)$ имеет тривиальные в положительных размерностях толерантные гомотопические и гомологические группы:*

$$(\forall i\ge 1)\ \pi_i(P(X,x_0))=0,\ H_i(P(X,x_0))=0. \tag{1}$$

**Доказательство.** Утверждение (1) следует из теремы 1 (см. также [2, 3]) и того факта, что $P(X,x_0)=\bigcup\limits_{M\ge 1}P_M(X,x_0)$, $(\forall\ m\in\mathbb{N})\ P_M(X,x_0)\subset P_{M+1}(X,x_0)$. □

**Теорема 3.** *Толерантное отображение, задаваемое формулой $p(\omega_m) = \omega_n(1)$, является толерантным квазирасслоением, в смысле, что для любого пространства $(Y, \theta)$ и любых толерантных отображений*

$$F : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (X, \tau), \qquad f' : (Y, \theta) \to (P(X, x_0), \varkappa),$$

*таких что $F(y, 0) = p \circ f'(y)$, существует толерантное отображение*

$$F : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (P(X, x_0), \varkappa),$$

*такое что $p \circ F' = F$, $F'(y, 0) = (f'(y)) * \varepsilon_n$.*

*Слоем квазирасслоения $p$ над точкой $x_0 \in X$ является пространство $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa)$. А если пространство $(X, \tau)$ является линейно связным и односвязным (т.е. $\pi_1(X) = 0$), то толерантное квазирасслоение $p$ имеет линейно связные базу и слой.*

**Доказательство.** Первая часть теоремы доказывается аналогично теореме 1 [4]. При доказательстве второй части используются те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 1 [4]. □

**Теорема 4.** *Для линейно связного толерантного пространства $(X, \tau)$ имеются следующие изоморфизмы толерантных гомотопических групп:*

$$(\forall\ i \geq 2)\ \pi_i(X) \cong \pi_{i-1}(\Omega(X, x_0)), \tag{2}$$

*откуда, в частности, следует коммутативность групп $\pi_i(\Omega(X, x_0))$, $i \geq 1$.*

**Доказательство.** Для толерантного квазирасслоения $p$ из теоремы 3 имеется такая же точная гомотопическая последовательность, как для любого толерантного расслоения (см. [3, теорема 9]). Значит, точна следующая последовательность толернатных гомотопических групп:

$$\cdots \to \pi_i(\Omega(X, x_0)) \to \pi_i(P(X, x_0)) \to \pi_i(X) \to \pi_{i-1}(\Omega(X, x_0)) \to \pi_{i-1}(P(X, x_0)) \to \ldots\ .$$

Точность этой последовательности вместе с теоремой 2 дают изоморфизмы (2), из которых следует утверждение о коммутативности (см. [3]). □

**Замечание.** Условие линейной связности пространства $(X, \tau)$ в теореме 4 не является существенным и нужно лишь для того, чтобы не иметь ограничений, связанных с отмеченной точкой.

**Теорема 5.** *Если для линейно связного и односвязного пространства $(X, \tau)$ имеем*

$$(\forall\ i = \overline{1, p-1})\ \ H_i(X) = 0, \tag{3}$$

*тогда*

$$(\forall\ i = \overline{1, 2p-3})\ \ H_i(\Omega(X, x_0)) \cong H_{i+1}(X). \tag{4}$$

**Доказательство.** При наших условиях, согласно теореме 3, имеется толерантное квазирасслоение $p : (P(X, x_0), \varkappa) \to (X, \tau)$ с линейно связными базой $(X, \tau)$ и слоем $(\Omega(X, x_0), \varkappa)$. Как и в общем случае (см. [5, теоремы 1, 3, 5]) для этого толерантного квазирасслоения существует гомологическая спектральная последовательность Лере – Серра, имеющая классический вид. Такая толерантная последовательность Лере – Серра, при условии односвязности $\pi_1(X) = 0$, порождает точную гомологическую последовательность Серра ([6, гл. III, § 4, предл. 5])

$$\begin{gathered} H_{p+q-1}(\Omega(X, x_0)) \to H_{p+q-1}(P(X, x_0)) \to H_{p+q-1}(X) \to H_{p+q-2}(\Omega(X, x_0)) \to \cdots \to \\ \to H_2(X) \to H_1(\Omega(X, x_0)) \to H_1(P(X, x_0)) \to H_1(\Omega(X, x_0)) \to 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где натуральное число $q$ таково, что $(\forall\ i = \overline{1, q-1})\ \ H_i(\Omega(X, x_0)) = 0$. Из (5), (1), (3) следует, что $q \geq p - 1$. Отсюда, еще раз воспользовавшись (5) и (1), получаем (4). □

Следующая теорема является толерантным аналогом теоремы Гуревича.

**Теорема 6.** *Если $(X, \tau)$ — линейно связное толерантное пространство и для $i = \overline{1, n-1}$ имеем $\pi_i(X) = 0$, то для $i = \overline{1, n-1}$ $\ H_i(X) = 0$ и $\pi_n(X) \cong H_n(X)$.*

**Доказательство.** Индукция по $n$. При $n = 2$ для $i < 2$ имеем $\pi_i(X) = 0$. Следовательно, применяя (1), толерантную теорему Пуанкаре ([2, теорема 2.4.3.]) и (4), получаем $H_1(X) = 0$ и

$$\pi_2(X) \cong \pi_1(\Omega(X, x_0)) \cong H_1(\Omega(X, x_0)) \cong H_2(X).$$

Пусть терема верна для $n = m - 1$ и пусть $\pi_i(X) = 0$ для $i = \overline{1, m-1}$, $m \geq 3$. Тогда из (2) и предложения индукции следует, что $H_i(\Omega(X, x_0)) = 0$ при $0 < i \leq m - 1$ и $\pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong \cong H_m(\Omega(X, x_0))$. Отсюда, используя (2), предложение индукции и (4), получаем

$$\pi_{m+1}(X) \cong \pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_{m+1}(X),$$

так как при $m \geq 3$, $m < 2m - 2 = 2p - 2$. И по тем же соображениям при $1 < i < m - 1$ имеем $i < 2p - 2$ и $H_i(X) \cong H_{i-1}(\Omega(X, x_0)) = 0$. □

### Библиографический список


1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 93–106.
2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С.И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 64–97.
4. *Сусин М.Н.* Слабая толерантность в пространстве толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 121–131.
5. *Небалуев С.И., Кляева И.А., Сусин М.Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 94–118.
6. *Серр Ж.-П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств. Расслоенные пространства и их приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.


УДК 517.9

# О ПОЛНОТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

**Д.В. Поплавский**

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительной математики и математической физики
E-mail: poplavskydv@mail.ru

В статье приводится теорема о полноте специальных вектор-функций, инициированных произведениями так называемых решений Вейля дифференциального уравнения четвертого порядка и их производными на полуоси. Доказывается, что такие нелинейные комбинации решений Вейля и их производных образуют линейное подпространство убывающих на бесконечности решений линейной сингулярной дифференциальной системы типа Камке. Строится и исследуется функция Грина соответствующей сингулярной краевой задачи на полуоси для пучков операторов, определяющих дифференциальную систему типа Камке. Используя аналитические и асимптотические свойства функции Грина, методы спектральной теории операторов и теории аналитических функций, доказывается искомая теорема о полноте.

**Ключевые слова:** теорема о полноте, произведения решений Вейля, краевые задачи, функция Грина.

**About Completeness of Products of Functions, Initiated by Singular Differential Equations**

**D.V. Poplavsky**

Saratov State University,
Chair of Numerical Analysis and Mathematical Physics
E-mail: poplavskydv@mail.ru

In this article we introduced the completeness theorem for special vector-functions, initiated by products of Weil solutions of forth order differential equation and its derivatives on the halfline. We prove that such nonlinear combinations of Weil solutions and its derivatives form the linear subspace of solutions, which decrease to infinity, of linear singular Kamke-type differential system. Then we construct and investigate Green function of corresponding singular boundary problem for the operator-pencils, which determine Kamke-type differential system. With help of analytic and asymptotic properties of Green function, methods of spectral theory of operators and theory of analytic functions we prove the required completeness theorem.

**Key words:** completeness theorem, products of Weil's solutions, boundary problems, Green's function.

Вопросы, связанные с исследованием полноты произведений решений дифференциальных уравнений, достаточно часто встречаются в различных задачах спектральной теории (см., напр., [1–4]). Приведенная в данной работе теорема о полноте может быть использована при исследовании вопроса разрешимости смешанной задачи на полуоси для системы Богоявленского [5].