A. I. Kibzun, G. L. Tret'yakov, Differentiability of the probability function, *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 354, Number 2, 159–161

https://www.mathnet.ru/eng/dan3769

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 2, с. 159–161

МАТЕМАТИКА

УДК 519.856.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ

© 1997 г. **А. И. Кибзун, Г. Л. Третьяков**

Представлено академиком В.С. Пугачевым 09.03.95 г.

Поступило 04.04.95 г.

1. Пусть задана действительная функция $f(u, x)$: $R^n \times R^m \to R^1$, x_ω – случайный вектор со значениями x в R^m, индуцирующий на этом пространстве вероятностную меру $\mathcal{P}$ с плотностью вероятности $p(x)$, X – носитель меры $\mathcal{P}$, которая имеет кусочно-гладкую границу (если она существует) такую, что

$$X = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(X)),$$

где $\mathrm{cl}(\cdot)$ обозначает замыкание, а $\mathrm{int}(\cdot)$ – внутренность множества.

Функция вероятности $P(u)$ определяется соотношением

$$P(u) \triangleq \mathcal{P}\{x_\omega\colon f(u, x_\omega) \le 0\} = \int\limits_{\tilde V(u)} p(x)dx,$$

где $\tilde V(u) \triangleq \{x\colon f(u, x) \le 0\}$.

Пусть U – некоторое открытое связное множество из R^n. Обозначим:

$$S(u) \triangleq \{x \in X\colon f(u, x) = 0\}, \quad V(u) \triangleq \tilde V(u) \cap X,$$

$$V_U \triangleq \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{u \in U} (\partial \tilde V(u) \bigcap X)\Big), \quad G_U \triangleq U \times V_U,$$

где ∂A обозначает границу множества A.

Т е о р е м а 1. *Пусть*:

(i) *вектор-функции* $f'_u(u, x)$, $f'_x(u, x)$ *непрерывны на* G_U;

(ii) *функция* $\|f'_x(u, x)\| > 0$ *на* G_U.

Тогда функция вероятности $P(u)$ *дифференцируема для почти всех* $u \in U$ *и*

$$P'(u) = -\int\limits_{S(u)} \frac{f'_u(u, x)}{\left\|f'_x(u, x)\right\|} p(x)dS. \tag{1}$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что все результаты, приведенные в сообщении, остаются справедливыми, если в качестве функции $p(x)$ рассматривать любую функцию, интегрируемую на всем R^m.

З а м е ч а н и е 2. Идея доказательства основывается на аналоге теоремы 108 из [1, с. 773], в соответствии с которой приращение функции вероятности можно представить с помощью замены переменных в виде двойного интеграла: интеграла с переменным верхним пределом от поверхностного интеграла, присутствующего в формуле (1). Далее, применяя теорему 90 из [1, с. 710] о дифференцируемости неопределенного интеграла Лебега по верхнему пределу, получаем утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что утверждение теоремы 1 остается в силе, если условия (i) и (ii) будут выполнены на $G_{\tilde U}$, где множество $\tilde U \subset U$ и совпадает с U с точностью до множества меры ноль.

З а м е ч а н и е 4. Данный результат не позволяет делать заключения о дифференцируемости функции вероятности в конкретной точке $u_0 \in U$. Однако дифференцируемости почти всюду может оказаться достаточно для построения стохастического квазиградиентного алгоритма [2], максимизирующего функцию вероятности.

2. Пусть в R^m имеются две системы непересекающихся открытых множеств $\{V_i\}_{i=1}^{l}$ и $\{V_j(u)\}_{j=1}^{k}$ таких, что

$$V_U \subseteq \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{i=1}^{l} V_i\Big), \quad V_U \subseteq \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{j=1}^{k} V_j(u)\Big),$$

$$\bigcup_{i=1}^{l} \partial V_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \partial V_j(u)$$

для всех $u \in U$. Обозначим:

$$G_j \triangleq \{(u, x)\colon u \in U,\ x \in V_j(u)\}, j = 1, \ldots, k;$$

$\mathrm{mes}_q(S)$ – значение q-мерной площади поверхности $S \subset R^m$.

Т е о р е м а 2. *Пусть*:

(i) *множество* V_U *ограничено*;

Московский государственный авиационный институт (технический университет)

(ii) *функции* $f(u, x)$, $p(x)$ *непрерывны и ограничены на множествах* $U \times V_i$ *и* V_i *соответственно*, $i = 1, \ldots, l$;

(iii) *вектор-функции* $f'_u(u, x)$, $f'_x(u, x)$ *непрерывны и ограничены на множествах* G_j, $j = 1, \ldots, k$;

(iv) $\|f'_x(u, x)\| \geq \gamma > 0$ *на множествах* G_j, $j = 1, \ldots, k$;

(v) *области* $V_j(u)$, $j = 1, \ldots, k$, *имеют кусочно-гладкую границу* $\partial V_j(u)$, *непрерывно зависящую от* $u \in U$, *и* $\mathrm{mes}_{m-1}(\partial \tilde{V}(u) \cap \partial V_j(u)) = 0$ *для всех* $u \in U$ *и* $j = 1, \ldots, k$.

Тогда функция вероятности $P(u)$ *дифференцируема на* U *и верна формула* (1).

Замечание 1. Интеграл в (1) понимается в данном случае как интеграл от функции, определенной почти всюду (см. [1, с. 533]). Непрерывная зависимость кусочно-гладкой поверхности $\partial V_j(u)$ от u означает здесь непрерывность по u функций, явно либо неявно задающих эту поверхность.

Замечание 2. Доказательство теоремы также основано на представлении приращения функции вероятности в виде двойного интеграла (см. замечание 2 к теореме 1). Учитывая, что в силу условия (v) пересечение границ "разрыва" функций $f(u, x)$, $p(x)$, $f'_u(u, x)$, $f'_x(u, x)$ и поверхности $S(u)$ имеет нулевую поверхностную меру, доказывается непрерывность поверхностного интеграла, присутствующего в формуле (1). Далее по теореме о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу от непрерывной функции следует утверждение теоремы.

Замечание 3. Данная теорема существенно обобщает известный результат Э. Райка [3], а также утверждение, содержащееся в статье [4], что позволило сформулировать важные следствия.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (ii), (iii), (v) *и интеграл в формуле* (1) *сходится равномерно на множестве* U. *Тогда функция вероятности* $P(u)$ *дифференцируема на* U *и верна формула* (1).

Приводимое ниже следствие дает достаточные условия дифференцируемости функции вероятности, заданной в более общем виде. Пусть функция вероятности имеет вид

$$P(u) = \mathcal{P}\{x_\omega : f_1(u, x_\omega) \leq 0, \ldots, f_k(u, x_\omega) \leq 0\}.$$

Обозначим:

$$S_j(u) \triangleq \{x \in X : f_j(u, x) = 0, f_i(u, x) \leq 0, i \neq j\},$$
$$j = 1, \ldots, k.$$

$$V_0(u) \triangleq \{x \in X : f_j(u, x) \leq 0, j = 1, \ldots, k\},$$

$$S_0(u) \triangleq \bigcup_j S_j(u),$$

$$V_j \triangleq \mathrm{int}\Big(\bigcup_{u \in U} (\partial\{f_j(u, x) \leq 0\} \cap V_0(u))\Big),$$

$$G_j \triangleq U \times V_j.$$

Следствие 2. *Пусть*:

(i) *для всех* $u \in U$ *множество* $S_0(u)$ *равномерно ограничено и* $\mathrm{mes}_{m-1}(S_i(u) \cap S_j(u)) = 0$ *при* $i \neq j$;

(ii) *вектор-функции* $\nabla_u f_j(u, x)$, $\nabla_x f_j(u, x)$ *непрерывны и ограничены на множествах* G_j, $j = 1, \ldots, k$;

(iii) *функция* $p(x)$ *непрерывна и ограничена на множествах* V_j *и* $\mathrm{mes}_{m-1}(\partial X \cap S_j(u)) = 0$ *для всех* $j = 1, \ldots, k$ *и* $u \in U$;

(iv) $\|\nabla_x f_j(u, x)\| \geq \gamma > 0$ *на* G_j *для каждого* $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Тогда функция вероятности $P(u)$ *дифференцируема на* U *и*

$$P'(u) = -\sum_{j=1}^{k} \int_{S_j(u)} \frac{\nabla_u f_j(u, x)}{\|\nabla_x f_j(u, x)\|} p(x) dS.$$

Замечание. Это утверждение сразу вытекает при применении теоремы 2 к функции

$$f_0(u, x) \triangleq \max_{j \in \{1, \ldots, k\}} f_j(u, x).$$

Данная формула получена при более слабых предположениях относительно исходных функций $f_j(u, x)$ и плотности вероятности, чем в работе [4].

3. Неудобство представления градиента функции вероятности $P(u)$ в виде поверхностного интеграла, как уже отмечалось в [6], связано с проблемой вычисления такого интеграла. Так как лебегова мера в пространстве R^m поверхности $S(u)$ равна нулю, численные методы типа Монте-Карло неприменимы (вероятность попасть на поверхность $S(u)$ для случайной точки x будет равна нулю). Остальные методы не работают из-за того, что область интегрирования задана здесь неявно. Поэтому определенный интерес представляет формула градиента функции вероятности в виде объемного интеграла, полученная для частных случаев в [5–7].

Обозначим:

$$V_U^* \triangleq \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{u \in U} V(u)\Big), \quad G_U^* \triangleq \mathrm{cl}(U \times V_U^*).$$

Определение. Назовем множество $T \in R^m$ многообразием размерности k, если T является частью гладкой поверхности $T^* \subset R^m$, имеющей размерность k, совпадает с замыканием своей внутренности относительно поверхности T^* и имеет на поверхности T^* кусочно-гладкую границу.

Теорема 3. *Пусть*:

(i) *множество* V_U^* *ограничено*;

(ii) *функции* $f''_{ux}(u, x)$, $f''_{xx}(u, x)$ *непрерывны на* G^*_U, $p'(x)$ *непрерывна на множестве* V^*_U;

(iii) *для всех* $u \in U$, $x \in V(u) \setminus T(u)$ *выполняется неравенство* $\| f'_x(u, x)\| > 0$;

(iv) *множество* $T(u) \equiv \varnothing$ *либо* $T(u) \subset V(u) \setminus V_U$ *и является объединением конечного числа многообразий размерности не большей чем* l, *где* $l \le \le m - 3$, $m \ge 3$;

(v) *в случае* $T(u) \neq \varnothing$, *для каждого* $u \in U$ *и всех* $y \in T(u)$, $x \in V_U$ *таких, что* $\|x - y\| \le \varepsilon_u$, *выполняется неравенство* $\| f'_x(u, x)\| \ge C_u \|x - y\|^{\alpha}$ *при некоторых* $C_u < \infty$, $\alpha < m - 1 - l$, $\varepsilon_u > 0$.

Тогда функция вероятности $P(u)$ *дифференцируема на* U *и*

$$P'(u_0) = -\int\limits_{V(u_0)} \operatorname{div}_x \left[\frac{f'_u(u_0, x) f'_x(u_0, x)^T p(x)}{\left\| f'_x(u_0, x) \right\|^2} \right] dx. \quad (2)$$

Замечание 1. Когда $T(u) \equiv \varnothing$, теорема совпадает с результатом, содержащимся в [6]. Однако в этом случае условия теоремы становятся несовместными для большинства прикладных задач. В частности, теорема будет заведомо неприменима для любой функции $f(u, x)$, когда носитель плотности $p(x)$ совпадает со всем пространством R^m, что имеет место, например, для плотности нормального закона распределения.

Замечание 2. Доказательство теоремы, когда $T(u) \neq \varnothing$, основано на том, что в данном случае выполняется теорема 2 и, следовательно, верна формула (1). Далее с помощью теоремы Гаусса–Остроградского и оценки площади границы множества $T(u)$ показывается сходимость несобственного объемного интеграла в формуле (2) к поверхностному интегралу в формуле (1) для произвольной точки $u \in U$.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96–01–00789).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1. 824 с.
2. *Ermoliev Yu.* // Stochastics. 1983. V. 4. P. 1–36.
3. *Райк Э.* // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат. 1974. Т. 24. № 1. С. 3–9.
4. *Кибзун А. И., Малышев В.В., Чернов Д.Е.* // Автоматика. 1987. № 3. С. 29–36.
5. *Uryasev S.* // J. Comput. and Appl. Math. 1994. V. 56. P. 197–223.
6. *Uryasev S.* // Numer. Funct. Anal. and Optimization. 1989. V. 10. (7/8). P. 827–841.
7. *Marti K.* // Ztschr. angrew. Math. und Mech. 1990. Bd. 6. S. 742–745.