А. С. Гордиенко, Коразмерность и кодлина одной пятимерной алгебры, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, номер 4, 18–25

Функции $g_n(z) = g(z) - \log|t_n(z)|^{\frac{1}{n}}$ непрерывны в $\overline{\overline{\mathbb{C}}\setminus K}$ и гармоничны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. При этом $g_n(\infty) = -\log\gamma(K)$, а при $z \in \partial K$ имеем $g_n(z) = 0 - \log|t_n(z)|^{\frac{1}{n}} \geqslant -\log h_n^{\frac{1}{n}}$. Поскольку для чисел $h_n = h_n(K)$, как и для чебышевских постоянных $\tau_n(K)$, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K)$ (см. [2, гл. 7, § 1, 3]), то последовательность функций $g_n(z)$ равномерно на $\overline{\overline{\mathbb{C}}\setminus K}$ сходится к постоянной $-\log\gamma(K)$. Таким образом, функции $|t_n(z)|^{\frac{1}{n}}$ равномерно на линии уровня $\Gamma_r = \{z : g(z) = r > 0\}$ сходятся к константе $\exp(r + \log\gamma(K)) > \gamma(K)$ и лемнискаты $\Lambda_n = \{z : |t_n(z)|^{\frac{1}{n}} = h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K) + \delta_n\}$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, начиная с некоторого номера $n = n(r)$ оказываются "зажатыми" между Γ_r и ∂K. При $r \to 0$ линии уровня Γ_r стремятся к ∂K в хаусдорфовой метрике (∂K состоит из конечного числа гладких жордановых контуров), значит, то же верно и для Λ_n.

Так как $K \subset U$, то $\Lambda_n \subset U$ при $n > N = N(K,U)$. Для $n > N$ имеем $m_n > h_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K) > \gamma(U) - \varepsilon$. В силу произвольности ε и доказанного выше неравенства $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma(U)$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(U)$.

Теорема 3, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Следствие 2.1. *Для любой ограниченной области U существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} = \gamma(\overline{U})$.

Это утверждение вытекает из теоремы 2 и равенства $\gamma(U) = \gamma(\overline{U})$, справедливого для любой ограниченной области U (см., например, [10]).

Автор благодарен В. С. Буярову, Е. П. Долженко, О. Н. Косухину и П. В. Парамонову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00962) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-1892.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faber G.* Über Tschebyscheffsche Polynome // J. reine und angew. Math. 1920. **150**. 79–106.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
3. *Колмогоров А.Н.* Замечания по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи матем. наук. 1948. **3**, вып. 1. 216–221.
4. *Ремез Е.Я.* Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области // Укр. матем. журн. 1953. **5**, № 1. 3–49.
5. *Виденский В.С.* О равномерном приближении в комплексной плоскости // Успехи матем. наук. 1956. **11**, вып. 5. 169–175.
6. *Шнирельман Л.Г.* О равномерных приближениях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. № 1. 53–60.
7. *Шепелев В.М.* Полиномы Чебышева комплексного переменного: Канд. дис. М., 1929.
8. *Камо С.О., Бородин П.А.* Многочлены Чебышева для множеств Жюлиа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 5. 65–67.
9. *Богачев В.И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2003.
10. *Бородин П.А.* О многочленах, наиболее отклоняющихся от нуля на границе области // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1997. № 1. 18–22.

Поступила в редакцию
11.07.2005

УДК 512.552.4

КОРАЗМЕРНОСТЬ И КОДЛИНА ОДНОЙ ПЯТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

А. С. Гордиенко

Несмотря на активную деятельность, которая ведется в этой области, известно сравнительно мало примеров алгебр, в которых можно явно вычислить характеристики, указанные в заголовке: кохарактеры алгебры $M_2(F)$ всех матриц 2×2 были найдены В. С. Дренски и Е. Форманеком [1, 2], точные значения коразмерностей для этой алгебры — С. Прочези [3], кохарактеры и коразмерности алгебры Грассмана — Д. Краковски и А. Регевом [4], базис тождеств алгебр $UT_n(F)$ верхнетреугольных матриц — Ю.Н. Мальцевым [5].

В настоящей работе исследуется алгебра $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & a & c \\ 0 & y & b \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right\}$ над некоторым полем F характеристики 0, интерес к которой возник, в частности, в связи с работой С.П. Мищенко и А. Валенти [6]. Кроме того, вычисление коразмерностей этой алгебры открывает дорогу к доказательству справедливости известной гипотезы А. Регева о том, что $c_n(R) \sim Cn^{\frac{q}{2}}d^n$ при $n \to \infty$, где $q, d \in \mathbb{Z}$, для всех алгебр R размерности $\dim R \leqslant 5$.

Для отыскания обычных кохарактеров используются собственные кохарактеры, вычислить которые гораздо проще, чем обычные. Определив кохарактеры, можно было бы с помощью найденных по формуле крюков размерностей неприводимых подмодулей подсчитать коразмерности, если бы не громоздкие вычисления, которые закрывают этот путь. Поэтому в работе коразмерности находятся иначе: мы предъявляем кандидата на роль базиса тождеств алгебры A, затем, действуя по модулю этих тождеств, вычисляем полную систему в $\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$, а далее доказываем, что все элементы этой системы линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}(A)$, т.е. это базис в фактормодуле и предъявленные нами тождества также базис, но уже базис тождеств алгебры A.

Введение. Напомним основные понятия и фиксируем обозначения, используемые в работе (см., например, [7]). С методами теории представлений симметрических групп и их применением с целью изучения тождественных соотношений можно познакомиться также в [8].

Определение. Алгебра $F\langle X\rangle$ всех многочленов от счетного набора некоммутирующих переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ называется *свободной ассоциативной алгеброй* над полем F. Многочлен $f \in F\langle X\rangle$ называется *тождеством* для F-алгебры A, если он обращается в нуль при любой подстановке элементов из A вместо переменных X.

Совокупность $\mathrm{Id}(A)$ тождеств алгебры A является T-идеалом в $F\langle X\rangle$. Известно, что в случае $\mathrm{char}\, F = 0$ всякое тождество эквивалентно конечному набору полилинейных тождеств. Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тогда число $c_n(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ называется *n-й коразмерностью* алгебры A. На $\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ определена естественная структура FS_n-модуля. В силу теоремы Машке он раскладывается в прямую сумму неприводимых. Число $l_n(A)$ неприводимых слагаемых называется *n-й кодлиной*, а характер $\chi_n(A)$ представления группы S_n на пространстве $\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ — *n-м кохарактером* алгебры A. Как известно, есть взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями S_n и разбиениями $\lambda \vdash n$ числа n на положительные слагаемые. По каждому разбиению λ можно построить диаграмму Юнга D_λ.

Линейные комбинации произведений левонормированных коммутаторов от переменных x_i называются *собственными многочленами*. Пространство собственных полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$ обозначим через Γ_p. Аналогично определяются и собстственные кохарактеры $\eta_p(A)$ — характеры представления группы S_p на пространстве $\frac{\Gamma_p}{\Gamma_p \cap \mathrm{Id}(A)}$.

1. Тождества и коразмерности. Теорема 1. *Пусть A — подалгебра алгебры верхнетреугольных матриц 3×3, состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} x & a & c \\ 0 & y & b \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ над полем F нулевой характеристики. Тогда базис тождеств алгебры A состоит из соотношений*

$$St_4 = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} \equiv 0, \tag{1}$$

$$[x_1, [x_2, x_3][x_4, x_5]] \equiv 0, \tag{2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \equiv 0. \tag{3}$$

Коразмерности тождеств равны $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 6$, $c_n(A) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2^{n-2} \times (n^2 - 3n)$ при $n \geqslant 4$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Соотношения* (1)–(3) — *тождества в A.*

Доказательство. Зафиксируем базис в A, состоящий из элементов $e_{11} + e_{22} + e_{33}$, e_{22}, e_{12}, e_{13}, e_{23}. Многочлены в левых частях (1)–(3) полилинейные, поэтому достаточно подставлять в них только базисные элементы.

Перепишем (1) в виде

$$[x_4,x_3][x_2,x_1] \equiv -[x_2,x_1][x_4,x_3] + [x_4,x_2][x_3,x_1] + [x_3,x_1][x_4,x_2] - [x_3,x_2][x_4,x_1] - [x_4,x_1][x_3,x_2].$$

Если вместо какой-то переменной мы подставляем e_{13} или $e_{11}+e_{22}+e_{33}$, то в силу их центральности все выражение обращается в нуль. А если мы подставляем только e_{12}, e_{22}, e_{23}, то какие-то из x_i совпадают, поэтому в силу косой симметрии по x_i все опять равно нулю, т.е. тождество (1) доказано.

Справедливость (2) следует из того, что значения $[x_2,x_3][x_4,x_5]$ принадлежат $\langle e_{13}\rangle$, а e_{13} лежит в центре A.

Тождество (3), которое порождает все тождества в алгебре $UT_3(F)$ (см. [6]), вытекает из того, что значения $[x,y]$ принадлежат $I=\langle e_{13},e_{23},e_{12}\rangle$, а $I^3=0$. □

Лемма 2. *Из тождеств* (2) *и* (3) *следуют такие соотношения:*

$$a[x_1,x_2]b[x_3,x_4]c[x_5,x_6]d \equiv 0, \tag{4}$$

$$y\ a[x_1,x_2]b[x_3,x_4]c \equiv a[x_1,x_2]b[x_3,x_4]c\ y, \tag{5}$$

$$[x_1,\ldots,x_p] \equiv [x_1,x_2,x_{\rho(3)},\ldots,x_{\rho(p-1)},x_p] \tag{6}$$

для всех $\rho\in S\{3,\ldots,p-1\}$,

$$[x_1,\ldots,x_i][x_{i+1},\ldots,x_p] \equiv [x_1,x_2,x_{\rho(3)},\ldots,x_{\rho(i)}][x_{i+1},x_{i+2},x_{\rho(i+3)},\ldots,x_{\rho(p-1)},x_{\rho(p)}] \tag{7}$$

для всех $\rho\in S\{3,\ldots,i,i+3,\ldots,p\}$,

$$[x_1,\ldots,x_i][x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4},\ldots,x_p] \equiv -[x_1,\ldots,x_i,x_{i+3}][x_{i+1},x_{i+2},x_{i+4},\ldots,x_p]. \tag{8}$$

Доказательство. Тождество (4) следует из (3) и того, что $[x_1,x_2]b=[[x_1,x_2],b]+b[x_1,x_2]$, а $c[x_5,x_6]=[c,[x_5,x_6]]+[x_5,x_6]c$.

Тождество (5) получается по модулю (2) и (3) таким образом:

$$ya[x_1,x_2]b[x_3,x_4]c = yab[x_1,x_2][x_3,x_4]c - ya[b,[x_1,x_2]][x_3,x_4]c \overset{(3)}{\equiv}$$

$$\overset{(3)}{\equiv} aby[x_1,x_2][x_3,x_4]c - ay[b,[x_1,x_2]][x_3,x_4]c \overset{(2)}{\equiv}$$

$$\overset{(2)}{\equiv} ab[x_1,x_2][x_3,x_4]yc - a[b,[x_1,x_2]][x_3,x_4]yc \overset{(3)}{\equiv}$$

$$\overset{(3)}{\equiv} ab[x_1,x_2][x_3,x_4]cy - a[b,[x_1,x_2]][x_3,x_4]cy = a[x_1,x_2]b[x_3,x_4]cy.$$

Отметим, что, согласно тождеству Якоби, имеем

$$[x_1,\ldots,x_p] = [[x_p,x_{p-1}],[x_1,\ldots,x_{p-2}]] + [[[x_1,\ldots,x_{p-2}],x_p],x_{p-1}], \tag{9}$$

т.е. в левонормированном коммутаторе можно переставлять даже два последних символа, но при этом появляется еще и двухкоммутаторный многочлен. Если мы применим к обеим частям (9) несколько дифференцирований вида $\operatorname{ad} x=[\cdot,x]$, то в силу (2) этот двухкоммутаторный многочлен обратится в нуль. То есть по модулю (2) мы можем переставлять в левонормированном коммутаторе две соседние (а значит, и две любые) переменные, если только ни одна из них не стоит на первых двух или последнем месте. Таким образом, тождество (6) получено.

Если обе части выражения (9) домножить справа или слева на коммутатор, то, согласно (3), двухкоммутаторное слагаемое, ставшее теперь трехкоммутаторным, обратится в нуль. Отсюда мы получаем тождество (7) для случая, когда подстановка ρ не переносит переменные из одной скобки в другую. Общий случай тождества (7) и тождество (8) мы получим, если заметим, что в силу (2) можно переносить буквы из одного коммутатора в другой, поменяв при этом знак:

$$[[\ldots],x][\ldots] + [\ldots][[\ldots],x] = [[\ldots][\ldots],x] \equiv 0.$$

□

Доказательство теоремы 1. Докажем, что T-идеал в свободной алгебре $F\langle X\rangle$, порожденный тождествами (1)–(3), совпадает с $\mathrm{Id}(A)$. Так как $\mathrm{char}\, F = 0$, то это достаточно проверить для $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$, предъявив базис в фактормодуле.

Всякий одночлен раскладываем по модулю тождеств (2) и (3) следующим образом: в том месте, где встретилась первая инверсия индексов, заменяем произведение переменных суммой их же произведения, но уже в правильном порядке, и коммутатора. Так же поступаем в слагаемом, содержащем коммутатор, и со второй инверсией. В том из получившихся слагаемых, которое содержит два коммутатора, по тождествам (4) и (5) можно менять порядок слагаемых по обе стороны от коммутаторов и переносить переменные слева направо и обратно. Например, $x_4x_3x_5x_1x_2 = x_3x_4x_5x_1x_2 + [x_4, x_3]x_5x_1x_2 = x_3x_4x_5x_1x_2 + [x_4, x_3]x_1x_5x_2 + [x_4, x_3][x_5, x_1]x_2 \equiv x_3x_4x_5x_1x_2 + [x_4, x_3]x_1x_5x_2 + x_2[x_4, x_3][x_5, x_1]$ и т.д.

В силу (1) всякое выражение вида $\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]$, где $\min(i_1, i_2) > \max(i_3, i_4)$, можно заменить линейной комбинацией аналогичных выражений, в которых переменные x_1, x_2, x_3, x_4 иначе распределены по коммутаторам. Если встретится многочлен вида $\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_3}\ldots[x_j, x_k]$, $i_1 > i_2 > i_3$, то применим к $[x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_3}$ тождество Якоби. В случае необходимости переставим у полученных многочленов переменные в первом коммутаторе и по тождеству (4) упорядочим переменные между коммутаторами. Будем повторять эту процедуру, пока $i_1 > i_2 > i_3$. Может статься, что в результате этих действий появятся многочлены вида $\ldots[x_j, x_k]\ldots x_{i_1}[x_{i_2}, x_{i_3}]$, $i_1 > i_2 > i_3$, тогда опять применим тождество Якоби, но уже к $x_{i_1}[x_{i_2}, x_{i_3}]$. Все переменные, которые окажутся справа от коммутаторов, перенесем, пользуясь (5), влево.

Таким образом, все многочлены из P_n раскладываются по модулю тождеств (1)–(3) в линейную комбинацию следующих многочленов:

(а) $x_1x_2\ldots x_n$;

(б) $x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}}\ldots x_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1}$, $i_{k+2} < i_{k+1}$, $i_{k+3} < \ldots < i_n$;

(в) $x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}}\ldots x_{i_{n-2}}[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $i_{k+2} < i_{k+1}$, $i_{k+2} < i_{k+3} < \ldots < i_{n-2} < i_{n-1}$, $i_n < i_{n-1}$.

Докажем, что классы этих многочленов линейно независимы в $\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$, т.е. образуют базис. Для этого достаточно доказать, что если их линейная комбинация f лежит в $\mathrm{Id}(A)$, то все коэффициенты равны нулю.

Подставив всюду единичную матрицу, убеждаемся, что коэффициент при $x_1x_2\ldots x_n$ равен нулю.

Пусть не все коэффициенты при слагаемых с одним коммутатором равны нулю и $x_{l_1}\ldots x_{l_s}[x_{l_{s+1}}, x_{l_{s+2}}]\times x_{l_{s+3}}\ldots x_{l_n}$ — такое слагаемое z, у которого l_{s+1} — наибольший среди всех слагаемых с одним коммутатором, имеющих ненулевые коэффициенты. Тогда подставим в тождество f следующие значения:

$x_{l_1} = x_{l_2} = \ldots = x_{l_s} = e_{11} + e_{33}$,

$x_{l_{s+1}} = e_{11} + e_{33}$, $\quad x_{l_{s+2}} = e_{12}$,

$x_{l_{s+3}} = \ldots = x_{l_n} = e_{22}$.

Слагаемые с двумя коммутаторами обращаются в нуль, так как тогда хотя бы в одном коммутаторе будут коммутирующие матрицы. Пусть какое-то выражение $y = x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}}\ldots x_{i_n}$ вида (б) не обратилось в нуль при данной подстановке. Если $l_{s+1} \neq i_{k+1}, i_{k+2}$, то обязательно $l_{s+1} \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, но тогда $i_{k+1} > l_{s+1}$ и в силу выбора z коэффициент у многочлена y равен нулю. Пусть $l_{s+1} = i_{k+2}$, тогда $i_{k+1} > l_{s+1}$, т.е. опять коэффициент равен нулю. Если же $i_{k+1} = l_{s+1}$, то $i_{k+2} = l_{s+2}$, т.е. $\{i_{k+1}, i_{k+2}\} = \{l_{s+1}, l_{s+2}\}$. Отсюда следует, что $k = s$, $i_1 = l_1$, …, $i_n = l_n$, т.е. $y = z$. Поэтому и слагаемое z должно входить в f с нулевым коэффициентом.

Пусть теперь не у всех слагаемых с двумя коммутаторами коэффициенты равны нулю. Рассмотрим слагаемое $b = x_{i_1}\ldots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}}\ldots x_{i_{n-2}}[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]$, обладающее следующими тремя свойствами:

1) коэффициент при нем не равен нулю;

2) $n - k - 4$ — число переменных между коммутаторами, наибольшее среди всех слагаемых с ненулевыми коэффициентами;

3) i_{n-1} — наименьшее среди слагаемых, удовлетворяющих свойствам 1 и 2.

Тогда подставим в тождество f следующие значения:

$x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k} = E$,

$x_{i_{k+1}} = e_{12}$, $x_{i_{k+2}} = e_{22}$, $x_{i_{n-1}} = e_{22}$, $x_{i_n} = e_{23}$,

$x_{i_{k+3}} = \ldots = x_{i_{n-2}} = e_{22}$.

Найдем условия, при которых многочлен

$$a = x_{j_1}\ldots x_{j_m}[x_{j_{m+1}}, x_{j_{m+2}}]x_{j_{m+3}}\ldots x_{j_{n-2}}[x_{j_{n-1}}, x_{j_n}]$$

вида (в) не обратится в нуль при такой подстановке. Поскольку e_{22} и E коммутируют, в каждый из коммутаторов многочлена a следует подставить по матричной единице, причем e_{12} следует подставить в левый коммутатор, а e_{23} — в правый. Вместо двух других переменных в обеих скобках нужно подставить e_{22}. При этом $[x_{j_{m+1}}, x_{j_{m+2}}]$ примет значение $\pm e_{12}$, а $[x_{j_{n-1}}, x_{j_n}] = \pm e_{23}$. Это означает, что все $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ необходимо заменить на E, а $x_{j_{m+3}}, \dots, x_{j_{n-2}}$ — на e_{22} (но не на E), чтобы число букв между коммутаторами не возросло. Отсюда $m = k$, $\{j_1, \dots, j_m\} = \{i_1, \dots, i_k\}$. Пусть $i_{k+2} \neq j_{m+1}, j_{m+2}$. В наборе $\{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ меньше i_{k+2} может быть только i_n, поэтому $x_{i_{k+2}}$ не может стоять в a между коммутаторами или в правом коммутаторе при $i_{k+2} = j_{n-1}$, так как тогда $j_{m+2} < i_{k+2}$. То есть в этом случае $i_{k+2} = j_n$, значит, $j_{n-1} = i_n < i_{n-1}$, поэтому коэффициент при таком слагаемом в силу свойства 3 нуль и этот случай мы не рассматриваем. Следовательно, $i_{k+2} \in \{j_{m+1}, j_{m+2}\}$, т.е. в силу упорядоченности $j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n$, значит, $a = b$. Поэтому и b должно входить в f с нулевым коэффициентом.

Все случаи разобраны, и перед нами действительно базис.

Подсчитав число элементов в базисе, находим коразмерности:

$$c_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(k-1) + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k}(1 \cdot (k-2) + (k-2)(k-2) - 1 \cdot 1) =$$

$$= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2^{n-2}(n^2 - 3n) \quad \text{при } n \geqslant 4,$$

$c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 6$. □

2. Кодлины и кохарактеры. Теорема 2. *Пусть A — та же алгебра, что и в теореме 1. Тогда последовательности кодлин $l_n(A)$ и кохарактеров $\chi_n(A)$ таковы:*

$n = 1$: $l_1 = 1$, $\chi_1 = \chi(1)$;

$n = 2$: $l_2 = 2$, $\chi_2 = \chi(1,1) + \chi(2,0)$;

$n = 3$: $l_3 = 4$, $\chi_3 = \chi(1,1,1) + 2\chi(2,1) + \chi(3)$;

$n = 4$: $l_4 = 9$, $\chi_4 = \chi(1,1,1,1) + 3\chi(2,1,1) + 2\chi(2,2) + 3\chi(3,1)$;

$n = 5$: $l_5 = 18$, $\chi_5 = \chi(2,1,1,1) + 5\chi(3,1,1) + 4\chi(3,2) + 3\chi(2,2,1) + 4\chi(4,1) + \chi(5)$;

$n \geqslant 6$:

$$l_n(A) = \begin{cases} \frac{7}{4}n^2 - \frac{13}{2}n + \frac{27}{4} & \text{при } n = 2k+1, \\ \frac{7}{4}n^2 - \frac{13}{2}n + \frac{28}{4} & \text{при } n = 2k, \end{cases}$$

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{(p_1,p_2,p_3,p_4) \\ p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant p_4 \\ p_1+p_2+p_3+p_4 = n}} k(p_1,p_2,p_3,p_4)\chi(p_1,p_2,p_3,p_4),$$

где $k(p_1,p_2,p_3,p_4)$ таковы:

$k(n) = 1$, $k(n-1,1) = n-1$, $k(n-2,1,1) = 2n-5$, $k(n-3,1,1,1) = n-4$;

$k(n-q,q) = 2(n-2q+1)$, $q = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$;

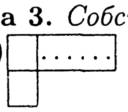
$k(n-q-1,q,1) = 3(n-2q)$, $q = 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$;

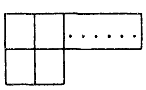
$k(n-q-2,q,2) = n-2q-1$, $q = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$;

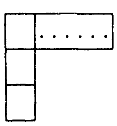
$k(n-q-2,q,1,1) = n-2q-1$, $q = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

Для того чтобы доказать теорему 2, мы вычислим собственные кохарактеры $\eta_p(A)$. Для наглядности мы будем пользоваться таблицами Юнга.

Лемма 3. *Собственные кохарактеры равны*

$(p-1)$
(1)

при $p \geqslant 2$;

$(p-2)$
(2)

при $p \geqslant 4$;

$(p-2)$
(1)
(1)

при $p \geqslant 4$ (все входят с кратностью один).

Доказательство. Докажем, что три разбиения $(p-1,1)$, $(p-2,2)$, $(p-2,1,1)$ действительно входят в разложение кохарактера. Для этого достаточно показать, что для каждого из соответствующих разбиений ν существуют такой многочлен $f \in \Gamma_p$ и такая таблица T_ν, что $e_{T_\nu} f \notin \mathrm{Id}(A)$, где $e_{T_\nu} = \sum_{\sigma \in C_{T_\nu}, \rho \in R_{T_\nu}} (-1)^\sigma \rho\sigma$ — квазиидемпотент, отвечающий таблице T_ν.

Для $\nu=(p-1,1)$ рассмотрим следующую таблицу: $T_\nu=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&\dots&p\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$. Видно, что $e_{T_\nu}[x_1,\dots,x_p]$ — не тождество, так как после подстановки $x_2=e_{12}$, $x_1=x_3=\ldots=x_p=e_{22}$ выражение становится равным $-2(p-1)!\,e_{12}$, т.е. кратность вхождения η_ν ненулевая.

Для $\nu=(p-2,2)$ рассмотрим таблицу $T_\nu=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&5&\dots&p\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$. Тогда $e_{T_\nu}[x_3,x_1][x_4,x_2,x_5,\dots,x_p]$ — не тождество. При подстановке $x_3=e_{12}$, $x_4=e_{23}$, $x_1=x_2=x_5=\ldots=x_p=e_{22}$ выражение становится равным $4(-1)^{p-3}(p-2)!\,e_{13}$, т.е. кратность η_ν уже не нуль.

Для $\nu=(p-1,1,1)$ рассмотрим таблицу $T_\nu=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&\dots&p\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}$. В этом случае многочлен $e_{T_\nu}[x_1,x_2][x_3,x_4,\dots,x_p]$ — не тождество, так как он принимает значение $2(-1)^{p-2}(p-2)!\,e_{13}$ при $x_1=x_4=\ldots=x_p=e_{22}$, $x_2=e_{12}$, $x_3=e_{23}$, т.е. кратность η_ν больше нуля.

По формуле крюков для размерностей неприводимых модулей получаем такую оценку снизу на собственные коразмерности γ_p:

$$\gamma_p(A)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\dim\frac{\Gamma_p}{\Gamma_p\cap\mathrm{Id}(A)}\geqslant(p-1)+\frac{p(p-3)}{2}+\frac{(p-1)(p-2)}{2}=p^2-2p\quad\text{при } p\geqslant 4,$$

$\gamma_3\geqslant 2$.

Поэтому для того чтобы доказать лемму 3, достаточно получить такую же оценку на собственные коразмерности сверху. Для этого поступим так же, как и в первой части работы: будем преобразовывать произвольные многочлены из Γ_p по модулю $\Gamma_p\cap\mathrm{Id}(A)$. Мы покажем, что они выражаются через следующие многочлены:

а) $[x_1,x_j,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{p-2}}]$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{p-2}$ (число таких многочленов равно $p-1$);
б) $[x_1,x_j,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{p-4}}][x_2,x_k]$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{p-4}$ (их число $(p-2)(p-3)$);
в) $[x_1,x_2,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{p-4}}][x_3,x_k]$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{p-4}$ (их число $p-3$);
г) $[x_3,x_j,x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{p-4}}][x_1,x_2]$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{p-4}$ (их число $p-3$);
д) $[x_2,x_3,x_5,x_6,\dots,x_p][x_1,x_4]$ (один многочлен).

Так как число этих многочленов равно p^2-2p, то мы получим искомую оценку сверху на γ_p.

Рассмотрим однокоммутаторные многочлены. Используя тождество Якоби для x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, можно добиться того, что в коммутаторах $[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\ldots]$ всегда $i_3>\min(i_1,i_2)$. Поэтому в силу (6) и (9) всякий однокоммутаторный многочлен равен по модулю $\Gamma_p\cap\mathrm{Id}(A)$ и двухкоммутаторных многочленов линейной комбинации многочленов вида $[x_1,x_j,x_{i_1},\dots,x_{i_{p-2}}]$, где $i_1<i_2<\ldots<i_{p-2}$. Рассмотрим двухкоммутаторный многочлен $[\ldots][\ldots]$. В силу (8) можно считать, что в правом коммутаторе только две переменные: $[\ldots][x_j,x_k]$. Если $1\notin\{j,k\}$, то в этом случае, пользуясь (7) и тождеством Якоби, всегда можно поместить x_1 на первые два места в левом коммутаторе, т.е. привести к линейной комбинации многочленов вида $[x_1,x_l,x_{i_1},\ldots][x_j,x_k]$. Если $2\in\{j,k\}$, то по тождеству (7) мы получаем многочлен вида (б). Если $2\notin\{l,j,k\}$, то по тождеству (8) мы переносим x_2 направо: $[x_1,x_l,x_{i_1},\ldots][x_j,x_k,x_2]$. Затем, расписывая правый коммутатор по тождеству Якоби, вносим x_2 во внутренний коммутатор и приходим к выражениям типа (б). Остается случай, когда $l=2$. Тогда аналогичным образом мы вносим x_3 в правый коммутатор и приходим к многочленам типа (в).

Пусть у нас есть многочлен $[x_l,x_j,x_{i_1},x_{i_{p-4}}][x_1,x_k]$. Если $k=2$, то, пользуясь (7) и тождеством Якоби для левого коммутатора, мы заносим x_3 во внутренний коммутатор $[x_l,x_j]$, т.е. получаем многочлены вида (г). Если $2\notin\{l,j,k\}$, то, пользуясь (7) и (8), мы получаем $[x_l,x_j,x_{i_1},\dots,x_{i_{p-4}}][x_1,x_k,x_2]$. Расписывая правый коммутатор по тождеству Якоби, мы приходим к уже рассмотренным случаям, которые сводятся к многочленам типа (б) и (г). Пусть $2\in\{l,j\}$. Если $p=4$, имеем только два таких многочлена: $[x_2,x_4][x_1,x_3]$ и $[x_2,x_3][x_1,x_4]$, поэтому, пользуясь (1), можно исключить первый, сведя все к $[x_2,x_3][x_1,x_4]$ и к уже разобранным случаям. Пусть $p\geqslant 5$. Если в $[x_2,x_j,x_{i_1},\dots,x_{i_{p-4}}][x_1,x_k]$ выполнено $j=3$, $k=4$, то, пользуясь (7), мы приходим к виду (д). Если $3\in\{i_1,\dots,i_{p-4}\}$, то, пользуясь (7), мы получаем $[x_2,x_j,x_3,\ldots][\ldots]$, расписываем $[x_2,x_j,x_3]$ по тождеству Якоби. Тогда в одном из получившихся слагаемых x_2 вне внутреннего коммутатора, т.е. мы приходим к уже разобранному случаю, а другое имеет вид $[x_2,x_3,x_{i_1},\dots,x_{i_{p-4}}][x_1,x_k]$. Аналогично если выполнено $4\in\{i_1,\dots,i_{p-4}\}$, то, используя (7) и (8), получаем $[\ldots][x_1,x_k,x_4]$. Расписываем правый коммутатор по тождеству Якоби. Тогда по модулю (8) мы имеем $[\dots,x_1][x_k,x_4]+[\dots,x_k][x_1,x_4]$. Первый случай уже рассмотрен. Второе слагаемое сразу же сводится к (д). Единственным неразобранным случаем является $[x_2,x_4,x_{i_1},\ldots][x_1,x_3]$. Но тут можно применить тождество Якоби к левому коммутатору и высвободить либо x_2, либо x_4, т.е. все опять сводится к разобранным случаям.

Таким образом, все выражается через указанные многочлены. Лемма доказана. □

Теперь воспользуемся теоремой В. С. Дренски [7, с. 233, теорема 12.5.4]:

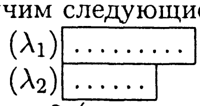
Теорема 3. *Пусть R — PI-алгебра с единицей и*

$$\chi_n(R) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(R)\chi_\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\nu_p(R) = \sum_{\nu \vdash p} k_\nu(R)\eta_\nu, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

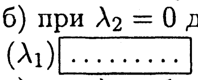
— соответственно обычные и собственные S_n-кохарактеры R. Тогда кратности $m_\lambda(r)$ и $k_\nu(R)$ (считаем, что $k_{(0,0,\ldots,0)} = 1$) связаны соотношениями $m_\lambda(R) = \sum k_\nu(R)$, где суммирование ведется по всем разбиениям $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, таким, что $\lambda_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \nu_n$.

Отсюда сразу видно, что в наше разложение входят только те χ_λ, у которых $\lambda_3 \leqslant 2$ и $\lambda_4 \leqslant 1$. Применяя теорему, получим следующие кратности.

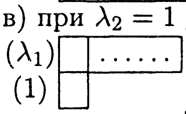
В случае 

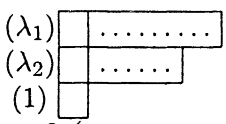
а) при $\lambda_2 \geqslant 2$ (считаем $n \geqslant 4$) $m_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1) \cdot 2$ (умножаем на 2, так как у соответствующих собственных кохарактеров во второй строчке либо один, либо два квадратика);

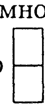
б) при $\lambda_2 = 0$ диаграмма имеет вид

 и $m_\lambda = 1$;

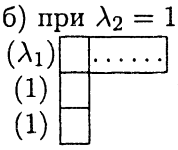
в) при $\lambda_2 = 1$ диаграмма имеет вид

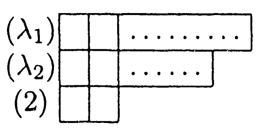
 и $m_\lambda = \lambda_1 = n - 1$.

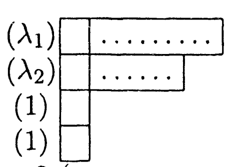
В случае 

а) при $\lambda_2 \geqslant 2$ (считаем $n \geqslant 5$) $m_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2 + 1) \cdot 3$ (умножаем на 3, так как у соответствующих собственных кохарактеров под первой строчкой либо , либо , либо );

б) при $\lambda_2 = 1$ (считаем $n \geqslant 3$) диаграмма имеет вид

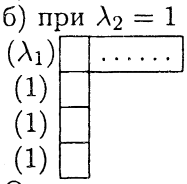
 и $m_\lambda = (\lambda_1 - 1) + \lambda_1 = 2\lambda_1 - 1$.

В случае  (считаем $n \geqslant 6$) $m_\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$.

В случае 

а) при $\lambda_2 \geqslant 2$ (считаем $n \geqslant 6$) $m_\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$;

б) при $\lambda_2 = 1$ (считаем $n \geqslant 5$) диаграмма имеет вид

 и $m_\lambda = \lambda_1 - 1$.

Отсюда получаем кодлины и кохарактеры. □

Автор приносит благодарность научному руководителю М. В. Зайцеву за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drensky V.S.* Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. 1984. **91**, N 1. 1–17.
2. *Formanek E.* Invariants and the ring of generic matrices // J. Algebra. 1984. **89**, N 1. 178–223.
3. *Procesi C.* Computing with 2 × 2 matrices // J. Algebra. 1984. **87**, N 2. 342–359.
4. *Krakowski D., Regev A.* The polynomial identities of the Grassmann algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. **181**. 429–438.
5. *Мальцев Ю.Н.* Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. **10**, № 4. 393–400.
6. *Mishchenko S.P., Valenti A.* A star-variety with almost polynomial growth // J. Algebra. 2000. **223**, N 1. 66–84.
7. *Drensky V.S.* Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag, 2000.
8. *Бахтурин Ю.А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию
12.09.2005

УДК 517.518.4

О СХОДИМОСТИ СОПРЯЖЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

Е. Ю. Редкозубова

В теории тригонометрических рядов хорошо известна следующая теорема о сходимости сопряженного тригонометрического ряда Фурье в точке, доказанная У. Юнгом в 1911 г. [1; 2, с. 102; 3, с. 521].

Теорема Юнга. *Если f — 2π-периодическая функция ограниченной вариации с рядом Фурье $S[f]$, то для сходимости сопряженного ряда $\widetilde{S}[f]$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл*

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt = \lim_{\delta\to+0} -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt = \lim_{\delta\to+0} \widetilde{f}(x;\delta),$$

который представляет тогда сумму ряда $\widetilde{S}[f]$.

Функцию $\widetilde{f}(x)$ принято называть сопряженной к данной функции $f(x)$.

В работе [4] доказано, что теорема Юнга остается справедливой для более широкого класса функций *ограниченной гармонической вариации.* В данной статье исследуется окончательность этого результата.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n$ расходится. Множество таких последовательностей Λ обозначим через $\mathbb{L}$. Последовательность $\{n\}$ обозначим H.

Для промежутка I через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$, таких, что замыкание $\overline{I}_n \subset I$.

Определение. Для функции f, заданной на промежутке I, Λ-вариацией функции f на I называется величина

$$V_\Lambda(f,I) = \sup_{\{(\alpha_k,\beta_k)\}\in\Omega(I)} \sum_k \frac{|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|}{\lambda_k}.$$

Функция f называется функцией ограниченной Λ-вариации ($f \in \Lambda BV$), если ее Λ-вариация конечна. Если $\Lambda = H$, то f называется функцией ограниченной гармонической вариации ($f \in HBV$).

Понятие ΛBV-функций было введено Д. Уотерманом [5]. Он доказал, что для класса HBV-функций остается верной известная теорема Дирихле–Жордана (см. [2, с. 98, 104; 3, с. 121]) о сходимости ряда Фурье $S[f]$ функции *ограниченной вариации.* Также он показал, что для любого класса ΛBV, строго содержащего класс HBV, найдется непрерывная функция $f \in \Lambda BV \setminus HBV$ с расходящимся рядом Фурье. Естественно возникает вопрос о сходимости сопряженного тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной Λ-вариации к сопряженной функции. В работе [4] было показано, что если пространство