Б. М. Макаров, Характеристика инвариантно порядково ограниченных множеств в пространстве $L^p(\Omega,\mu)$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1974, том 47, 73–80

Б.М.Макаров

ХАРАКТЕРИСТИКА ИНВАРИАНТНО ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^p(\Omega,\mu)$.

<u>0. Введение</u>. В работе [I] В.Н.Судаков доказал, что подмножество B пространства L^2 остается порядково ограниченным под действием любых унитарных преобразований в том и только том случае, когда оно содержится в некотором эллипсоиде Гильберта-Шмидта. При этом существует такая константа C, что $\|\sup U(B)\| \leq C$ для любого унитарного оператора U. Другим путем эти утверждения получены в [3],[4]. Позже (см.[2]) В.Н.Судаков дополнил свои результаты следующим предложением: если абсолютно выпуклое множество $B\subset L^2(0,1)$ не содержится ни в каком эллипсоиде Гильберта-Шмидта, то существует такой унитарный оператор U, что $\sup U(B) = +\infty$ п.в.

Наша заметка посвящена доказательству аналогичных фактов для пространства L^p при $1<p<+\infty$. Весьма существенным для нас будет понятие p-абсолютно суммирующего оператора (см.[5], [6]), впервые примененное в этом круге вопросов в [3].

<u>I. Основные определения и обозначения</u>. Под оператором (отображением) везде ниже понимается линейное непрерывное отображение одного B-пространства в другое. Символом $L(X,Y)$ ($L(X)$) обозначается пространство всех отображений пространства X в пространство Y (соответственно, в себя). Оператор $U\in L(X,Y)$ называется ε-изометрией, если он обратим и $\|U\|\cdot\|U^{-1}\|\leq 1+\varepsilon$. Если $p\in[1,+\infty)$, то под p' везде ниже понимается число $\frac{p}{p-1}$, когда $p>1$ и ∞, когда $p=1$.

Оператор $U\in L(X,Y)$ называется p-абсолютно суммирующим, если существует такое число C, что для любого конечного набора векторов $\{x_k\}_{k=1}^N\subset X$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^N\|Ux_k\|^p\leq C^p\cdot\sup\left\{\sum_{k=1}^N|<x_k,x'>|^p : x'\in X^*,\ \|x'\|\leq 1\right\}.$$

Пусть $p\in[1,+\infty)$, X - B-пространство, $y_k\in X\ (k=1,2,\dots)$, $\sum^{\infty}\|y_k\|^p<+\infty$. Множество

$$\mathcal{E}_p=\mathcal{E}_p(\{y_k\}_{k=1}^{\infty})=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}t_k y_k : \sum_{k=1}^{\infty}|t_k|^{p'}\leq 1\right\}$$

будем называть p-эллипсоидом *) в X.

Ясно, что p- эллипсоид есть компактное множество. Как нетрудно убедиться, подмножество гильбертова пространства является 2-эллипсоидом тогда и только тогда, когда оно есть эллипсоид Гильберта-Шмидта, т.е. 2-эллипсоид, построенный с помощью ортогональной системы векторов $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Нам понадобятся некоторые факты из теории частично упорядоченных пространств. Используемая нами терминология соответствует принятой в монографии [8]. Пусть X - KB - линеал. Множество $B \subset X$ мы будем называть инвариантно порядково ограниченным (и.п.о.) множеством, если его образ при любом отображении из X в X остается порядково ограниченным в X.

Легко убедиться, что мы получим равносильное определение и.п.о. множества, если вместо всевозможных отображений пространства X в себя будем рассматривать только ε-изометрии при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$. Если $X = L^2(\Omega, \mu)$, то, как фактически установлено в [I] и [3], в определении и.п.о. множества можно ограничиться унитарными операторами.

Если X - B - пространство, а Y-KB- линеал, то оператор $\mathcal{U} \in L(X, Y)$ называется правильным (см. [I0]), если образ $\mathcal{U}(\mathcal{D}_1)$ единичного шара $\mathcal{D}_1 \subset X$ порядково ограничен в Y. В случае, когда $Y = L^p(\Omega, \mu)$, понятие правильного оператора равносильно понятию $(b$-$0)$-линейного оператора (см. [8], [9]). Если $p \in (1, +\infty)$, то оператор $\mathcal{U} \in L(L^{p'}(\Omega, \mu), L^p(\tilde{\Omega}, \mu))$ правилен тогда и только тогда, когда правилен оператор $\mathcal{U}^*$ (см. [7], теорема 3; [9], гл. УШ, п°6.33).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть X - KB - линеал, B - и.п.о. множество в X. Определим на $L(X)$ функцию ρ равенством

$$\rho(\mathcal{U}) = \sup\{\||\mathcal{U}x_1| \vee |\mathcal{U}x_2| \vee \ldots \vee |\mathcal{U}x_n|\| : \{x_k\}_{k=1}^{n} \subset B, n = 1, 2, \ldots\} \quad (\mathcal{U} \in L(X)).$$

Предложение I. Функция ρ есть непрерывная полунорма в $L(X)$ (и, следовательно, существует такая константа C, что $\rho(\mathcal{U}) \leq C\|\mathcal{U}\|$ $(\mathcal{U} \in L(X))$).

Доказательство. То, что ρ - полунорма, тривиально. Чтобы доказать непрерывность, достаточно убедиться, что множество $\{\mathcal{U} \in L(X) : \rho(\mathcal{U}) \leq 1\}$ замкнуто в $L(X)$. Это немедленно следует из непрерывности структурных операций в X.

---

*) Легко видеть, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k$ безусловно сходится (см. [II], лемма 2).

Следствие. Пусть X -KB - пространство, B - и.п.о. множество в X. Существует такая константа C, что

$$\|\sup\{|Ux| : x\in B\}\| \leqslant C\|U\| \quad (U\in L(X)).$$

Действительно, так как X -KB - пространство, то (см.[8], гл. УП, § 6)

$$\|\sup\{|Ux| : x\in B\}\| = \rho(U).$$

Лемма. Пусть $p\in(1,+\infty)$, X - B-пространство $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ произвольное не более чем счетное семейство векторов пространства X, удовлетворяющее условию:

$$\sum_\alpha |\langle x_\alpha, x'\rangle|^p < +\infty \quad (x'\in X^*).$$

Пусть, далее, (Ω,μ) - пространство с мерой, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ -семейство попарно не пересекающихся подмножеств множества Ω таких, что $0<\mu e_\alpha<+\infty$ $(\alpha\in A)$

Тогда существует оператор $V\in L(L^{p'}(\Omega,\mu),X)$, удовлетворяющий условиям *)

1) $\quad V(\chi_{e_\alpha}) = (\mu e_\alpha)^{\frac{1}{p'}} x_\alpha \qquad (\alpha\in A);$

2) $\quad \|V\| \leqslant \sup\left\{\left(\sum|\langle x_\alpha, x'\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x'\in X^*,\ \|x'\|\leqslant 1\right\}.$

Доказательство. Рассмотрим подпространство $L\subset L^{p'}(\Omega,\mu)$ состоящее из функций вида $\sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{e_\alpha}$, $\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^p \mu e_\alpha < +\infty$. Очевидно, что отображение Q, определяемое равенством

$$Qx = \sum_\alpha (\mu e_\alpha)^{-1}\left(\int_{e_\alpha} x\,d\mu\right)\cdot\chi_{e_\alpha} \quad (x\in L^{p'}(\Omega,\mu))$$

есть проектирование $L^{p'}(\Omega,\mu)$ на L и $\|Q\|=1$. Поэтому искомый оператор V достаточно задать лишь на L. Для $x\in L$, $x = \sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{e_\alpha}$ мы полагаем

*) Символом χ_E мы обозначаем характеристическую функцию множества E. Везде далее мы отождествляем измеримую функцию и соответствующий ей класс эквивалентности.

$$Vx = \sum_\alpha \lambda_\alpha (\mu e_\alpha)^{\frac{1}{p'}} x_\alpha .$$

(Заметим, что ряд $\sum_\alpha \lambda_\alpha (\mu e_\alpha)^{\frac{1}{p'}} \cdot x_\alpha$ безусловно сходится в X). Ясно, что оператор V линеен и удовлетворяет условию I). Если $x' \in X^*$, то

$$\langle Vx, x' \rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha (\mu e_\alpha)^{\frac{1}{p'}} \langle x_\alpha, x' \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^{p'} \mu e_\alpha \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\sum_\alpha |\langle x_\alpha, x' \rangle|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_\alpha |\langle x_\alpha, x' |^p \Big)^{\frac{1}{p}} \|x\| .$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для $\|V\|$. Лемма доказана.

3. Основной результат. Теперь мы в состоянии получить теорему, являющуюся нашей главной целью.

Теорема. Пусть $p \in (1, +\infty)$, $B \subset L^p(\Omega, \mu)$. Эквивалентны утверждения

I) B - и.п.о. множество в $L^p(\Omega, \mu)$;

2) существуют компактное пространство K , конечная мера Радона ν на нем и правильный оператор $T \in L(L^{p'}(K, \nu), L^p(\Omega, \mu))$ такие, что $B \subset T(D_1)$, где D_1 - замкнутый единичный шар в $L^{p'}(K, \nu)$;

3) существует p - эллипсоид $\mathcal{E}_p \subset L^p(\Omega, \mu)$, содержащий множество B.

Замечание I. Как известно, и.п.о. множества в $L^1(\Omega, \mu)$ совпадают с порядково ограниченными множествами (см. [8], теорема УШ.7.2). Поэтому при $p=1$ утверждения I) и 2) теоремы остаются равносильными. Верна, очевидна, также импликация 3) $\Rightarrow$ I). Обратная импликация не верна.

Замечание 2. Можно доказать, что при $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$ из инвариантной порядковй ограниченности множества B в $L^p(\Omega, \mu)$ не следует порядковая ограниченность в пространстве $L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ множества $V(B)$, где $V \in L(L^p(\Omega, \mu), L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu}))$. Соответствующий пример при $p < 2$ мы получаем, рассматривая построенное в [I2] изоморфное вложение W пространства l^p в $L^1(0,1)$. Если $\mathcal{E}_p$ - эллипсоид в l^p , построенный с помощью последовательности векторов $\{\alpha_k e_k\}_{k=1}^\infty$, где e_k - канонические орты в l^p , $\alpha_k > 0$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \in l^p$, $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^r \ln \alpha_k = \infty$,то используя теорему XXУI.2.3 из [I3], мы видим, что $\sup W(\mathcal{E}_p) = +\infty$ п.в. Вместе с тем легко убедиться, что при любом отображении из $L^2(\Omega,\mu)$ в произвольное KB -пространство X образ эллипсоида Гильберта-Шмидта порядково ограничен в X .

Доказательство теоремы. Мы проведем доказательство по схеме: I) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ I).

I) $\Rightarrow$ 2). Не умаляя общности можно считать, что и.п.о. множество B абсолютно выпукло и замкнуто. Пусть X_B - банахово пространство, получающееся, если в линейной оболочке множества B ввести норму с помощью функционала Минковского, построенного по B , и пусть i - тождественное вложение X_B в $L^p(\Omega,\mu)$. Наша ближайшая цель - доказать, что оператор i^* - p- абсолютно суммирующий.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^N$ - произвольное конечное семейство векторов в $L^{p'}(\Omega,\mu)$. Рассмотрим семейство $\{e_k\}_{k=1}^N$ $(e_k\subset\Omega)$ попарно дизъюнктных множеств конечной положительной меры и зафиксируем оператор $V\in L(L^{p'}(\Omega,\mu))$,удовлетворяющий условиям:

I) $V(\chi_{e_k})=(\mu e_k)^{\frac{1}{p'}}x_k \quad (k=1,2,\ldots,N)$,

2) $\|V\|\leqslant \sup\left\{\left(\sum\limits_{k=1}^N|\langle x_k,x'\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x'\in L^p(\Omega,\mu),\ \|x'\|\leqslant 1\right\}$.

Существование такого оператора гарантируется леммой. Пусть $z_0=\sup V^*(B)$. По условию $z_0\in L^p(\Omega,\mu)$ и, по следствию к предложению I, существует такое число $C=C_B$ (не зависящее от V), что $\|z_0\|\leqslant C\,\|V^*\|$.Займемся теперь оценкой суммы $\sum\limits_{i=1}^N\|i^*x_k\|^p$. Зафиксируем такие векторы $z_k\in X_B$ $(k=1,2,\ldots,N)$, что $\|z_k\|\leqslant 1$ (т.е. $z_k\in B$) и $\|i^*x_k\|\leqslant 2\,|\langle i^*x_k,z_k\rangle|$. Далее имеем:

$$\sum_{k=1}^N\|i^*x_k\|^p\leqslant 2^p\sum_{k=1}^N|\langle i^*x_k,z_k\rangle|^p=$$

$$=2^p\sum_{k=1}^N|\langle i^*V(\mu e_k)^{-\frac{1}{p'}}\chi_{e_k},z_k\rangle|^p=$$

$$=2^p\sum_{k=1}^N(\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}}|\langle\chi_{e_k},V^*iz_k\rangle|^p\leqslant$$

$$\leqslant 2^p\sum_{k=1}^N(\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}}|\langle\chi_{e_k},z_0\rangle|^p=$$

$$=2^p\sum_{k=1}^N(\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}}\left(\int_{e_k}z_0\,d\mu\right)^p\leqslant 2^p\|z_0\|^p\leqslant$$

$$\leqslant 2^pC^p\|V\|^p\leqslant 2^pC^p\sup\left\{\sum_{k=1}^N|\langle x_k,x'\rangle|^p : x'\in L^p(\Omega,\mu),\quad \|x'\|\leqslant 1\right\}.$$

Полученная для $\sum\limits_{k=1}^{N} \| i^* x_k \|^p$ оценка показывает, что i^* - p -абсолютно суммирующий оператора. Вследствие этого оператор i^* можно включить в коммутативную диаграмму (см.[5], теорема 3):

$$\begin{tikzcd} L^{p'}(\Omega,\mu) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\pi"'] & X_B^* \arrow[dr, "j"] & \\ & & Z \\ C(K) \arrow[r, "id"] & L^p(K,\nu) \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь Z - некоторое B -пространство, K - компакт, ν - конечная мера Радона на K , id - тождественное вложение, j - изометрическое вложение, π , S - непрерывные операторы. Пусть $R=id\circ\pi$. Ясно, что оператор R правильный. Переходя к сопряженным операторам получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} L^{p}(\Omega,\mu) & X_B^{**} \arrow[l, "i^{**}"'] \\ L^{p'}(K,\nu) \arrow[u, "R^*"] & Z^* \arrow[l, "S^*"'] \arrow[u, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

Так как j^* есть открытое отображение Z^* на X_B^{**}, то образ некоторого шара $\mathcal{D}^\circ \subset Z^*$ содержит единичный шар B^{**} пространства X_B^{**} . Ясно также, что при достаточно большом $\lambda>0$ имеет место включение $S^*(\mathcal{D}^\circ) \subset \lambda\mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1$ - единичный шар пространства $L^{p'}(K,\nu)$. Подытоживая, получаем:

$$B\subset i^{**}(B^{**}) \subset i^{**}(j^*(\mathcal{D}^\circ)) = R^*(S^*(\mathcal{D}^\circ)) \subset \lambda R^*(\mathcal{D}_1).$$

Так как вместе с оператором R оператор R^* также правилен, то искомый оператор T мы получим, положив $T=\lambda R^*$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Правильный оператор $T\in L(L^{p'}(K,\nu), L^p(\Omega,\mu))$ представим в виде (см.[7],теоремы 2,3)

$$T=\sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes y_k \qquad ,\text{где } x'_k\in L^{p}(K,\nu),\ y_k\in L^{p}(\Omega,\mu),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x'_k, x\rangle|^{p'} < +\infty \quad (x\in L^{p}(K,\nu)),\quad \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^{p} < +\infty$$

Не умаляя общности, можно считать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x'_k\rangle|^{p'} \leqslant \|x\|^{p'} \qquad (x\in L^{p'}(K,\nu)).$$

Тогда эллипсоид $\mathcal{E}_p = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k y_k : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |t_k|^{p'} \leq 1 \right\}$ – искомый.

3) $\Longrightarrow$ I). Достаточно доказать, что всякий p-эллипсоид $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\{y_k\}_{k=1}^{\infty})$ есть и.п.о. множество в $L^p(\Omega,\mu)$. Пусть $z = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p < +\infty$, то $z \in L^p(\Omega,\mu)$ и $|x| \leq z$ для любого $x \in \mathcal{E}_p$. Следовательно, p - эллипсоид является порядково ограниченным множеством в $L^p(\Omega,\mu)$. Так как образ p-эллипсоида при любом отображении, очевидно, снова есть p-эллипсоид, то $\mathcal{E}_p$ - и.п.о. множество в $L^p(\Omega,\mu)$. Теорема доказана.

В заключение приведем без доказательства два предложения, показывающие, что не и.п.о. множество в пространстве $L^p(0,1)$ может быть "повернуто" так, что его образ не будет порядково ограничен даже в пространстве всех измеримых почти везде конечных функций.

Предложение 2. Пусть $p \in [1,+\infty)$, $\varepsilon \in (0,1)$, B - абсолютно выпуклое подмножество пространства $L^p(0,1)$, φ - произвольная невозрастающая определенная на (0,I) функция. Если $\sup B \notin L^p(0,1)$, то существует такая изометрия U_0 пространства $L^p(0,1)$, что $\sup U_0(B) \geq \varphi$ п.в. на $(0,1-\varepsilon)$.

Предложение 3. Пусть $p \in [1,+\infty)$, $\varepsilon \in (0,1)$, B - абсолютно выпуклое подмножество пространства $L^p(0,1)$. Если B - не и.п.о. множество в $L^p(0,1)$, то существует такое ε - изометрическое отображение U_0 пространства $L^p(0,1)$ на себя, что $\sup U_0(B) = +\infty$ п. в. на (0,I)

Замечание. В работе [2] для случая $p=2$ получен более сильный результат: найдется унитарный оператор U_0 такой, что $\sup U_0(B) = +\infty$ п.в. на (0,I). При $p \neq 2$ нельзя отказаться от рассмотрения ε-изометрий, так как изометрии пространства L^p (0,I) преобразуют всякое порядково ограниченное подмножество пространства L^p (0,I) снова в порядково ограниченное подмножество. Это немедленно вытекает из общего вида изометрий пространства L^p (0,I) при $p \neq 2$ (см.[I4], стр.I5I).

ЛИТЕРАТУРА

[I] Судаков В.Н. Об одном классе компактов гильбертова пространства. Успехи матем.наук, I963, № I8, I(I09),I82-I87.

[2] Судаков В.Н. Диссертация. Л.Г.У. I972.

[3] Slowikowski W. Absolut 2-summing Mappings from and to Hilbert Spaces and a Sudakov Theorem. Bull.Acad.Polon.Sc. ser.Math.,1969, XVII, 381-386.

[4] Dudly R. Small operators between Banach and Hilbert spaces. Studia Math. 1970, v.38, 35-41.

[5] Pietsch A. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 1967, t.28, 333-353.

[6] Persson A., Pietsch A. p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen. Studia Math., 1969, t.33, 19-62.

[7] Persson A. On some properties of p-nuclear und p-integral operators. Studia Math. 1969, t.33, 213-222.

[8] Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.М., Физматгиз, 1961.

[9] Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.Л.,Гостехиздат, 1950.

[10] Левин В.Л. О двух классах линейных отображений, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками. Сиб.Мат.ж., 1969, т.Х, № 4, 903-910.

[11] Bessaga C., Pelczynski A. On basis and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math. 1958, t.XVII, 151-164.

[12] Кадец М.И. О линейной размерности пространств L_p и l_p. Успехи матем.наук, 1958, № 13, 6(84), 95-98.

[13] Schwartz L. Seminaire 1969-1970 Applications radionifiantes. Expose XXVI.

[14] Банах С. Курс функцiонального аналiзу. Радянська школа. Киiв, 1948.