А. Беттхер, Б. Зильберман, Тёплицивы определители с символами из класса Фишера–Хартвига, *Докл. АН СССР*, 1984, том 278, номер 1, 13–16

А. БЁТТХЕР (ГДР), Б. ЗИЛЬБЕРМАН (ГДР)

ТЁПЛИЦИВЫ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ С СИМВОЛАМИ ИЗ КЛАССА ФИШЕРА–ХАРТВИГА

(Представлено академиком В.С. Владимировым 25 X 1983)

1. В классической предельной теореме Сегё и ее различных обобщениях получено асимптотическое поведение при $n \to \infty$ тёплицевых определителей $D_n(b) = \det(b_{j-k})_{j,k=0}^{n}$ для случая, когда числа b_n, $n \in \mathbf{Z}$, являются коэффициентами Фурье достаточно гладкой функции b, определенной и не обращающейся в нуль на единичной окружности $\mathbf{T}$. Однако в ряде задач статистической физики или теории вероятностей (см. [1, 2]) встречаются тёплицевы определители, у которых функция b (называемая символом) имеет особенности, например нули, полюсы или скачки на $\mathbf{T}$. В итоге систематического исследования этой проблематики Фишер и Хартвиг [1] выделили один широкий класс символов, охватывающий большинство возникающих в различных конкретных ситуациях символов.

Важнейшая часть этого класса (будем обозначать ее через S) состоит из всех символов a, допускающих представление

$$a(t) = \prod_{r=1}^{R} |t - t_r|^{2\alpha_r} (-t)_{t_r}^{\beta_r}\ b(t), \qquad t \in \mathbf{T},$$

где:

(i) b – достаточно гладкая функция, $b(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbf{T}$ и $\operatorname{ind} b := \dfrac{1}{2\pi} [\arg b]_{-\pi}^{\pi} = 0$;

(ii) $t_1, t_2, \ldots, t_R$ – попарно различные точки на $\mathbf{T}$;

(iii) $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \alpha_r < \frac{1}{2}$;

(iv) $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \beta_r < \frac{1}{2}$ и $(-t)_{t_r}^{\beta_r} := \exp\{i\beta_r \arg(-t/t_r)\}$, $|\arg(-t/t_r)| < \pi$.

Заметим, что $|t - t_r|^{2\alpha_r} = |t - t_r|^{2\operatorname{Re}\alpha_r} |t - t_r|^{2i\operatorname{Im}\alpha_r}$, где $|t - t_r|^{2\operatorname{Re}\alpha_r}$ имеет нуль ($\operatorname{Re}\alpha_r > 0$) или полюс ($\operatorname{Re}\alpha_r < 0$), в то время как $|t - t_r|^{2i\operatorname{Im}\alpha_r}$ при $\operatorname{Im}\alpha_r \neq 0$ имеет разрыв осциллирующего типа в точке t_r. Функция $(-t)_{t_r}^{\beta_r}$, в свою очередь, имеет при $\beta_r \neq 0$ в точности один разрыв, а именно скачок в точке t_r.

Гипотеза Фишера–Хартвига [1] состоит в том, что для $a \in S$ имеет место

$$D_n(a) \sim G(b)^{n+1} n^{(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + \ldots + (\alpha_R^2 - \beta_R^2)} E_*(a), \qquad n \to \infty,$$

где $G(b) = \exp(\log b)_0$ и $E_*(a) \neq 0$ – некоторая постоянная; здесь и в последующем через $(\log b)_n$ обозначаем коэффициенты Фурье функции $\log b$.

Этой гипотезе посвящено много работ, в которых доказана ее справедливость для некоторых важных частных случаев. Наиболее общие результаты получили Фишер и Хартвиг [1] ($b \equiv 1$, $R = 1$, $\alpha_1 = 0$), Видом [3] ($\beta_r = 0\ \forall r$ или $R = 1$, $\operatorname{Im}\alpha_1 = 0$, $\operatorname{Im}\beta_1 = 0$), Басор [4] ($\operatorname{Re}\beta_r = 0\ \forall r$), [5] ($\alpha_r = 0\ \forall r$), Блехер [6] ($R = 1, \alpha_1 = 0$) и авторы [7] ($\alpha_r = \beta_r\ \forall r$ или $\alpha_r = -\beta_r\ \forall r$), [8] ($\alpha_r = 0\ \forall r$), [9] ($\operatorname{Im}\alpha_r = 0$, $\alpha_r\beta_r = 0\ \forall r$), см. также [10]. В теореме 1 данной работы сформулированная выше гипотеза доказывается в полной общности.

2. Пусть B_1^1 – пространство Бесова всех определенных на $\mathbf{T}$ измеримых функций таких, что (см. [11])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} y^{-2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b(e^{ix+iy}) + b(e^{ix-iy}) - 2b(e^{ix})| \, dx\, dy < \infty.$$

Отметим, что функции из B_1^1 разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Если $b \in B_1^1$, $b(t) \neq 0$ при $t \in \mathbf{T}$ и $\operatorname{ind} b = 0$, то полагаем

$$b_-(t) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (\log b)_{-n}\, t^{-n}\right\}, \quad b_+(t) = \exp\left\{\sum_{n=0}^{\infty} (\log b)_n\, t^n\right\}.$$

Через $\mathbf{G}(z)$ обозначаем функцию Барнса, определенную равенством

$$\mathbf{G}(z+1) = (2\pi)^{z/2} e^{-z(z+1)/2 - cz^2/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z^2 + z^2/2n}\right\}$$

($c = 0{,}577\ldots$ – постоянная Эйлера). Заметим, что $\mathbf{G}(z+1) = \Gamma(z)\mathbf{G}(z)$, где $\Gamma(z)$ – обычная гамма-функция. Введем еще сокращения

$$\mathbf{G}_{\gamma,\delta} = \frac{\mathbf{G}(1+\gamma)\mathbf{G}(1+\delta)}{\mathbf{G}(1+\gamma+\delta)}, \quad \Gamma_{\gamma,\delta} = \frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\gamma+\delta)}.$$

Теорема 1. *Пусть* $a \in S$ *и* $b \in B_1^1$. *Тогда*

$$D_n(a) \sim G(b)^{n+1} E(b)\, n^{(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + \ldots + (\alpha_R^2 - \beta_R^2)} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{R} b_-(t_r)^{-(\alpha_r + \beta_r)}\, b_+(t_r)^{-(\alpha_r - \beta_r)} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{R} \mathbf{G}_{\alpha_r+\beta_r,\, \alpha_r-\beta_r} \prod_{r\neq s} (1 - t_s/t_r)^{-(\alpha_r+\beta_r)(\alpha_s-\beta_s)},$$

где

$$G(b) = \exp\,(\log b)_0, \quad E(b) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} k(\log b)_k (\log b)_{-k},$$

$$|\arg(1 - t_s/t_r)| < \pi/2.$$

Отметим важнейшие этапы доказательства.

3. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_N$ – попарно различные точки на $\mathbf{T}$, $-1 < \mu_1, \ldots, \mu_N < 1$ – вещественные числа, $\mu(t) = \prod_{j=1}^{N} |t - t_j|^{\mu_j}$, $t \in \mathbf{T}$, и $L^2(\mu)$ – гильбертово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_\mu = \left(\int_{\mathbf{T}} |\varphi(t)|^2 \mu(t)\, |dt|\right)^{1/2}.$$

Обозначаем через $L_-^2(\mu)$ (соответственно $L_+^2(\mu)$) замыкание в $L^2(\mu)$ линейной оболочки $\operatorname{lin}\{\chi_{-1}, \chi_{-2}, \ldots\}$ (соответственно $\operatorname{lin}\{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots\}$), где $\chi_k(t) := t^k$, $t \in \mathbf{T}$. Тогда $L^2(\mu)$ распадается в прямую сумму $L_-^2(\mu) \oplus L_+^2(\mu)$; проектор P, проектирующий $L^2(\mu)$ на $L_+^2(\mu)$ параллельно $L_-^2(\mu)$, является ограниченным, и проекторы P_n, проектирующие $L_+^2(\mu)$ на $\operatorname{lin}\{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n\}$ параллельно $\operatorname{lin}\{\chi_{n+1}, \chi_{n+2}, \ldots\}$, при $n \to \infty$ сходятся сильно к единичному оператору в $L_+^2(\mu)$ (см. [12]).

Пусть $\mu(t) = \prod_{j=1}^{N} |t - t_j|^{\mu_j}$, $\lambda(t) = \prod_{j=1}^{N} |t - t_j|^{\lambda_j}$, где $-1 < \mu_1, \ldots, \mu_N, \lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_N < 1$. Мы записываем $A \in \Pi\{P_n;\ L_+^2(\mu), L_+^2(\lambda)\}$, если, во-первых, A ограниченный и ограниченно обратимый оператор пространства $L^2_+(\mu)$ на $L^2_+(\lambda)$ и, во-вторых, для всякого $f\in L^2_+(\lambda)$ уравнения $P_nA\varphi^{(n)}=P_nf$ при всех достаточно больших $n\in\mathbf{Z}$ имеют единственное решение $\varphi^{(n)}\in P_nL^2_+(\mu)$ и $\varphi^{(n)}$ при $n\to\infty$ в норме пространства $L^2_+(\mu)$ сходится к решению $\varphi\in L^2_+(\mu)$ уравнения $A\varphi=f$.

Если $\sigma\in L^1(\mathbf{T})$ и $\sigma\psi\in L^2(\lambda)$ для всех $\psi\in L^2(\mu)$, то обозначаем через $T(\sigma)$ оператор, переводящий $\varphi\in L^2_+(\mu)$ в $P(\sigma\varphi)\in L^2_+(\lambda)$. Для $a\in S$ и $K\subset\{1,2,\dots,R\}$ полагаем при $t\in\mathbf{T}$

$$\omega_K(t)=\prod_{r\in K}|t-t_r|^{2\alpha_r}(-t)^{\beta_r}_{t_r},\qquad \rho_K(t)=\prod_{r\in K}|t-t_r|^{2\operatorname{Re}\alpha_r}.$$

Пишем $\omega_j=\omega_{\{j\}}$ и $\rho=\rho_{\{1,\dots,R\}}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $M\cup N=\{1,2,\dots,R\}$ *и* $M\cap N=\phi$. *Тогда если* $b\in C(\mathbf{T})$, *то*

$$T(\omega_Mb)\in\Pi\{P_n;\ L^2_+(\rho),\ L^2_+(\rho_M^{-1}\rho_N)\},$$

$$T(\omega_Nb)\in\Pi\{P_n;\ L^2_+(\rho_M^{-1}\rho_N),\ L^2_+(\rho^{-1})\}.$$

Эта теорема доказывается с помощью метода локализации [13] (см. также [9], 2.41 и 3.9). Таким путем проблема сводится к доказательству следствия 2.

4. Теорема 2 позволяет пользоваться модифицированным вариантом техники разделения особенностей, предложенной в работах [5, 8, 9].

Т е о р е м а 3. *Пусть* $a\in S$. *Предполагаем, что* $b\in C(\mathbf{T})$ *и что для каждой точки* $t_i\in\{t_1,t_2,\dots,t_R\}$ *существуют окрестность* U_i *и функция* $b_i\in B^1_1$ *такие, что* $b\,|\,U_i=b_i\,|\,U_i$. *Тогда*

$$D_n(a)\sim E'(a)D_n(\omega_1)\dots D_n(\omega_R)D_n(b),\qquad n\to\infty,$$

с некоторой не равной нулю постоянной $E'(a)$.

Отметим, что наложенные на функцию b условия обеспечивают то, что операторы типа $T(\omega_M\omega_Nb)-T(\omega_M)T(\omega_Nb)$ являются ядерными в паре пространств $L^2_+(\rho)$, $L^2_+(\rho^{-1})$ (см. [11] и [9], 2.26). Если b (глобально) принадлежит B^1_1, то $E'(a)$ методами работ [5, 8] может быть вычислена в явном виде, и вследствие классической теоремы Сегё имеем тогда $D_n(b)\sim G(b)^{n+1}E(b)$, $n\to\infty$. Чтобы завершить доказательство теоремы 1, остается получить асимптотику определителей $D_n(\omega_j)$ при $n\to\infty$.

5. Обозначаем через $T'(\sigma)$ матрицу $(\sigma_{j-k})^\infty_{j,k=0}$, составленную из коэффициентов Фурье функции $\sigma\in L^1(\mathbf{T})$, и через M_γ, где $\gamma\in\mathbf{C}^1$, диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\nu_0^{(\gamma)},\nu_1^{(\gamma)},\dots)$, где $\nu_j^{(\gamma)}=(-1)^j\binom{-1-\gamma}{j}$. Наконец, пусть $L^2_+:=L^2_+(1)$.

Т е о р е м а 4. *Если* $-\tfrac12<\operatorname{Re}\alpha$, $-\tfrac12<\operatorname{Re}\beta<\tfrac12$ *и* $t_0\in\mathbf{T}$, *то*

$$T'[(1-t/t_0)^{\alpha+\beta}]M_{2\alpha}T'[(1-t_0/t)^{\alpha-\beta}]=$$

$$=\Gamma_{\alpha,\beta}M_{\alpha-\beta}T'[\,|t-t_0|^{2\alpha}(-t)^\beta_{t_0}\,]M_{\alpha+\beta}.$$

Эту теорему нам сообщил Ш. Рох. В случае $\alpha=0$ такой результат установлен уже в [14].

С л е д с т в и е 1. *Если* $-\tfrac12<\operatorname{Re}\alpha$, $-\tfrac12<\operatorname{Re}\beta<\tfrac12$ *и* $t_0\in\mathbf{T}$, *то при всех* $n\geqslant0$

$$D_n[\,|t-t_0|^{2\alpha}(-t)^\beta_{t_0}\,]=\mathbf{G}_{\alpha+\beta,\alpha-\beta}\frac{\mathbf{G}(n+2)\,\mathbf{G}(n+2+2\alpha)}{\mathbf{G}(n+2+\alpha+\beta)\mathbf{G}(n+2+\alpha-\beta)}\sim$$

$$\sim\mathbf{G}_{\alpha+\beta,\alpha-\beta}\,n^{\alpha^2-\beta^2},\quad n\to\infty.$$

Это следствие обобщает известный для случая $\alpha=0$ результат Фишера и Хартвига [1], и мы первоначально, т.е. когда еще не знали о теореме 4, доказали его прямым вычислением определителей. Оно тривиально получается из теоремы 4.

Следствие 2. *Если* $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\alpha < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\beta < \frac{1}{2}$ *и* $t_0 \in \mathrm{T}$, *то*

$$T^{-1}[(-t)^{\alpha}_{t_0}]\ T[(-t)^{\beta}_{t_0}]\ T^{-1}[(-t)^{-\alpha}_{t_0}] \in \Pi\{P_n;\ L^2_+,\ L^2_+\}.$$

Отметим, что доказательство последнего результата отнюдь не тривиально. Мы крайне признательны Ш. Роху, оказавшему нам ценную помощь при доказательстве. Оно существенно опирается на теорему 4 и технику, разработанную в [15]. Еще раз подчеркиваем, что следствие 2 – одно из решающих звеньев в доказательстве теоремы 2 (ср. [9], с. 181).

Высшая техническая школа
Карл-Маркс-Штадт (ГДР)

Поступило
27 X 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fisher M.E., Hartwig R.E.* – Adv. Chem. Phys., 1968, vol. 15, p. 333–353. 2. *Малышев В.А.* Сер. Теория вероятностей, матем. статистика, теорет. кибернетика, 1975, т. 13, с. 5–36. 3. *Widom H.* – Amer. J. Math., 1973, vol. 95, p. 333–383. 4. *Basor E.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1978, vol. 239, p. 33–65. 5. *Basor E.* – Ind. Univ. Math. J., 1979, vol. 28, p. 975–983. 6. *Блехер П.М.* – Функц. анализ и прилож., 1982, т. 16, вып. 2, с. 1–6. 7. *Silbermann B.* – Demonstr. math., 1981, vol. 14, № 3, p. 647–667. 8. *Böttcher A.* – Z. Anal. u. Anw., 1982, Bd. 1, H. 2, S. 23–39. 9. *Böttcher A., Silbermann B.* Invertibility and asymptotics of Toeplitz matrices. B.: Akad.-Verlag, 1983. 200 p. 10. *Böttcher A., Silbermann B.* – Math. Nachr., 1981, Bd. 102, S. 79–105. 11. *Пеллер В.В.* – ДАН, 1980, т. 252, № 1, с. 43–48. 12. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с. 13. *Silbermann B.* – Mat. Nachr., 1981, Bd. 104, S. 137–146. 14. *Дудучава Р.В.* Тр. Тбилисск. матем. ин-та., 1975, т. 50, с. 42–59. 15. *Вербицкий И.Э.* – Матем. иссл., 1978, вып. 47, с. 3–11.

УДК 519.46 МАТЕМАТИКА

Л.И. ВАЙНЕРМАН

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ С КОМПАКТНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ БАЗИСОМ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 14 X 1983)

1. В 1950 г. Ю.М. Березанский и С.Г. Крейн, развивая теорию операторов обобщенного сдвига (ООС) Ж. Дельсарта – Б.М. Левитана [1], ввели понятие гиперкомплексной системы (ГС) с непрерывным базисом и впоследствии построили на ней гармонический анализ – в [2, 3] рассмотрены коммутативные ГС с компактным и дискретным базисом, а в недавней работе [4] – коммутативные ГС с локально-компактным (ЛК) базисом (см. также библиографию к [4]). Гипергруппы в смысле работ [5, 6] также являются ГС (другие работы по гипергруппам указаны в библиографии к [5, 6]).

ГС охватывают ряд интересных примеров – ЛК-группы; центр группового кольца компактной группы; двойные классы смежности ЛК-группы по компактной подгруппе; ГС, порожденную оператором Штурма – Лиувилля с потенциалом специального вида; ГС, связанные с ортогональными полиномами. Однако двойственные к таким ГС не всегда удовлетворяют всем аксиомам, формулируемым в [2–4]. То же самое верно и для ГС, порожденной оператором Штурма – Лиувилля с общим вещественным потенциалом. Поэтому в настоящей заметке вводится модифициро-