ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 140, № 3
сентябрь, 2004

З. Муайн*

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается семейство многомерных обобщенных когерентных состояний, получаемых посредством представления Фока–Баргмана группы Гейзенберга. Доказано, что области значений соответствующих преобразований когерентных состояний совпадают с пространствами связанных состояний системы, являющейся четномерным аналогом заряженной частицы в однородном магнитном поле. Это дает новое описание евклидовых состояний Ландау.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, представление Фока–Баргмана, преобразования когерентных состояний, евклидовы состояния Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет когерентные состояния (КС) привлекли к себе большое внимание. КС являются полезным инструментом в теории поля, и существует много различных определений КС (см. [1] и приведенные там ссылки).

КС для заряженной частицы, движущейся в постоянном однородном магнитном поле, перпендикулярном евклидовой xy-плоскости, изучались в работах [2]–[4] и другими авторами. В этой задаче связанные с нижним уровнем Ландау КС были рассмотрены в [5], а для всех уровней Ландау КС были построены в [6].

В настоящей работе рассматривается четномерный аналог заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле. Для каждого уровня Ландау строится семейство обобщенных когерентных состояний (ОКС). При построении используется метод, в основе которого лежат квадратично интегрируемые на однородном пространстве представления основной группы. Конкретно нас интересует представление Фока–Баргмана группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, реализованное на пространстве Фока $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ целых гауссовых квадратично интегрируемых функций. Установлено, что образы пространства Фока при преобразованиях КС, ассоциированных с построенными ОКС, совпадают с пространствами связанных состояний гамильтониана Ландау в $\mathbb{C}^n$.

*Department of Mathematics, Faculty of Sciences and Technics (M'Ghila), Cadi Ayyad University, Béni Mellal, Morocco. E-mail: mouayn@math.net

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 мы представляем гамильтониан Ландау, действующий на гильбертовом пространстве комплекснозначных гауссовых квадратично интегрируемых функций. В разделе 3 дано краткое описание пространств состояний Ландау. В разделе 4 мы даем обзор формализма построения КС с помощью представлений группы, которые являются квадратично интегрируемыми на факторпространстве группы по модулю подгруппы. Этот формализм применяется в разделе 5 к представлению Фока–Баргмана. В разделе 6 устанавливается теорема характеризации для состояний Ландау. В разделе 7 приведены некоторые заключительные замечания.

2. ГАМИЛЬТОНИАН ЛАНДАУ В $\mathbb{C}^n$

В подходящей системе единиц с точностью до аддитивной константы гамильтониан Ландау заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ имеет вид

$$H_B = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\big((\partial_{x_j} + iBy_j)^2 + (\partial_{y_j} - iBx_j)^2\big) - \frac{n}{2} \tag{1}$$

и действует на пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2n}, d\mu)$, $d\mu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^{2n}$. Для того чтобы использовать комплексную структуру, отождествим евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с пространством $\mathbb{C}^n$ обычным способом. Для $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, пишем $\xi \cdot \zeta = \xi_1\zeta_1^* + \dots + \xi_n\zeta_n^*$, $\zeta^* = (\zeta_1^*, \dots, \zeta_n^*)$, ζ_j^* – комплексно-сопряженное к $\zeta_j \in \mathbb{C}$ и $|\xi|^2 = \xi \cdot \xi$. Оператор, соответствующий H_B (1), может быть представлен оператором

$$\widetilde{H}_B := e^{B|\xi|^2/2} H_B e^{-B|\xi|^2/2}. \tag{2}$$

В соответствии с (2) произвольный кет-вектор $|\,\rangle$ представляется функцией

$$\psi(\xi) := e^{B|\xi|^2/2}\langle \xi\,|\,\rangle, \qquad \psi \in L^2\big(\mathbb{C}^n, e^{-B|\xi|^2}\,d\mu\big).$$

Явное выражение для оператора (2) имеет вид

$$\widetilde{H}_B = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\,\partial\xi_j^*} + B\sum_{j=1}^{n}\xi_j^*\,\frac{\partial}{\partial\xi_j^*}. \tag{3}$$

Далее мы полагаем в (3) $B = 1$ и рассматриваем гамильтониан Ландау $\widetilde{H} := \widetilde{H}_1$, действующий на гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := L^2\big(\mathbb{C}^n, e^{-|\xi|^2}\,d\mu\big)$, которое снабжено эрмитовым скалярным произведением

$$\langle\psi, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi)\, e^{-|\xi|^2}\psi(\xi)\varphi(\xi)^*.$$

3. ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ

Представим краткое описание пространств состояний Ландау, определенных как пространства связанных состояний гамильтониана $\widetilde{H}$. Прежде всего введем некоторые обозначения. Для $p,q\in\mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{Y}_{p,q}$ пространство сужений на сферу $\mathbf{S}^{2n-1}=\{\omega\in\mathbb{C}^n, |\omega|=1\}$ однородных (степени p по переменной ξ и степени q по переменной ξ^*) евклидовых гармонических полиномов на пространстве $\mathbb{C}^n$. При $n=2,3,\dots$ размерность пространства $\mathcal{Y}_{p,q}$ равна

$$d(n,p,q)=\frac{(p+q-1)(p+n-2)!(q+n-2)!}{p!q!(n-1)!(n-2)!},$$

а для $n=1$ имеем $pq=0$, и в этом случае $d(1,p,q)=1$. Более подробную информацию относительно этих сферических гармоник можно найти в [7], [8].

Для $\lambda\in\mathbb{C}$ обозначим через $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{C}^n)$ пространство собственных состояний $|\psi\rangle$ гамильтониана $\widetilde{H}$ в пространстве $\mathcal{H}$ с собственным значением λ. Полное описание этого собственного пространства, приведенное в [9], можно суммировать следующим образом. Если $\lambda\neq 0,1,2,\dots$, то $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{C}^n)$ – тривиальное пространство. Если $\lambda=m\in\mathbb{Z}_+$, то волновая функция состояния $|\psi\rangle$ есть функция

$$\langle\xi\mid\psi\rangle=\sum_{\substack{p\geqslant 0\\ 0\leqslant q\leqslant m}}\sum_{1\leqslant j\leqslant d(n,p,q)}\frac{(m-q)!\Gamma(n+p+q)}{\Gamma(n+p+m)}L_{m-q}^{p+q+n-1}(r^2)r^{p+q}\gamma^j_{p,q}h^j_{p,q}(\omega),$$

принадлежащая $C^\infty(\mathbb{C}^n)$, где $\xi=r\omega$, $\omega\in\mathbf{S}^{2n-1}$, $r>0$, $L_k^\beta(x)$ – полином Лагерра (см. [10]), $\{h^j_{p,q}\}_{1\leqslant j\leqslant d(n,p,q)}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{Y}_{p,q}$ и $(\gamma^j_{p,q})=\gamma_{p,q}\in\mathbb{C}^{d(n,p,q)}$ таковы, что

$$\sum_{\substack{p\geqslant 0\\ 0\leqslant q\leqslant m}}\frac{(m-q)!(p+q+n-1)!\Gamma(n+p+q)}{2\Gamma(n+p+m)}|\gamma_{p,q}|^2<+\infty.$$

4. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ФОРМАЛИЗМ

Пусть G – локально компактная группа, U – замкнутая подгруппа, $X=G/U$ – соответствующее однородное пространство с мерой ν, инвариантной относительно действия группы G. Пусть $\sigma\colon X\to G$ – борелевское сечение (в главном расслоении $G\to G/U$) и T – непрерывное унитарное представление группы G обратимыми изометричными операторами $T(g)$, $g\in G$, в гильбертовом пространстве H.

В соответствии с [11] будем говорить, что $\phi_0\in\mathsf{H}$ есть вакуумный вектор, если для всех $u\in U$

$$T(u)[\phi_0]=\chi(u)\phi_0. \tag{4}$$

Отображение $u\to\chi(u)$ определяет характер подгруппы U. Будем говорить, что множество

$$\phi_x:=T(\sigma(x))[\phi_0],\qquad x\in X, \tag{5}$$

образует семейство КС, если

$$\int_X d\nu(x)\,\langle\phi_0,\phi_x\rangle\langle\phi_x,\phi_0\rangle = \langle\phi_0,\phi_0\rangle. \tag{6}$$

Преобразование КС может быть определено как отображение из пространства H в пространство ограниченных непрерывных функций на G с помощью коэффициентов представления

$$\phi \to \langle\phi, T(g)[\phi_0]\rangle, \qquad g\in G.$$

Вследствие (4) такие функции обладают простыми трансформационными свойствами при движении вдоль орбит gU, т.е. $\langle\phi, T(gu)[\phi_0]\rangle = \chi(u)^*\langle\phi, T(g)[\phi_0]\rangle,\ u\in U$, они полностью определяются своими значениями, проиндексированными точками пространства X. Поэтому мы можем рассматривать редуцированные преобразования КС из гильбертова пространства H в пространство $L^2(X,d\nu)$, определенные формулой [11]

$$W:\phi\to W[\phi](x) := \langle\phi,\phi_x\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{7}$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА–БАРГМАНА И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ – это группа Ли, являющаяся многообразием $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ с умножением

$$(\xi,t)(\zeta,s) = \left(\xi+\zeta, t+s+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\zeta\cdot\xi)\right),$$

где $\operatorname{Im}(\zeta\cdot\xi) = (\zeta\cdot\xi-\xi\cdot\zeta)/(2i)$. Группа $\mathbb{H}_n$ является унимодулярной группой, мера Хаара которой совпадает с мерой Лебега на $\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$.

Сильно непрерывные унитарные неприводимые представления (УНП) группы $\mathbb{H}_n$ хорошо известны ([12], с. 37). Здесь мы сосредоточим внимание на обозначаемом через ρ УНП группы $\mathbb{H}_n$, которое реализуется на пространстве Фока $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ целых функций φ на $\mathbb{C}^n$ таких, что $\langle\varphi,\varphi\rangle_{\mathcal{H}} < +\infty$, следующим образом:

$$\rho(\xi,t)[\varphi](z) = e^{it}e^{z\cdot\xi^*-|\xi|^2/2}\varphi(z-\xi^*),$$

$\varphi\in\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n),\ z\in\mathbb{C}^n$, и называется представлением Фока–Баргмана группы $\mathbb{H}_n$. УНП ρ квадратично интегрируемо в следующем смысле: если $\mathbb{R}$ – центр группы $\mathbb{H}_n$ и сечение σ_0 – сечение расслоения $\mathbb{H}_n\to\mathbb{H}_n/\mathbb{R}=\mathbb{C}^n$, определенное формулой $\sigma_0(\xi)=(\xi,0)$ [13], то существует ненулевой вектор $\phi_0\in\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{H}_n/\mathbb{R}} |\langle\rho(\sigma_0(\xi))[\phi_0],\phi_0\rangle_{\mathcal{H}}|^2\,d\mu(\xi) < +\infty. \tag{8}$$

Это условие может быть также выражено как существование некоторого самосопряженного положительного полуинвариантного оператора K в пространстве $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$ такого, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi)\langle\varphi_1,\rho(\xi,0)\psi_1\rangle\langle\rho(\xi,0)\psi_2,\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle\langle K^{1/2}\psi_1, K^{1/2}\psi_2\rangle \tag{9}$$

для всех $\psi_1, \psi_2 \in \operatorname{dom}(K^{1/2})$ и всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$. Поскольку группа $\mathbb{H}_n$ унимодулярная, оператор K здесь тождественный [14].

Теперь в соответствии с (5) построим множество ОКС

$$|\xi, \alpha\rangle := \rho(\sigma_0(\xi))|\alpha\rangle, \tag{10}$$

$\xi \in \mathbb{C}^n$, и $|\alpha\rangle$ – нормированное фоковское состояние с волновой функцией

$$\langle z \mid \alpha\rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi^n \alpha!}} z^\alpha,$$

$\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$, которое представляет вакуумный вектор, удовлетворяющий (4). Волновые функции ОКС $|\xi, \alpha\rangle$, определенные в (10), даются тогда выражением

$$\langle z \mid \xi, \alpha\rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi^n \alpha!}} e^{z\cdot\xi^* - |\xi|^2/2}(z - \xi^*)^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C}^n.$$

Такое определение ОКС полностью оправдывается квадратичной интегрируемостью ρ по модулю подгруппы $\mathbb{R}$. Действительно, из условия (9) вытекает условие (6), которое в нашем случае имеет вид

$$\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\xi)\langle\varphi \mid \xi, \alpha\rangle\, \langle\varphi \mid \xi, \alpha\rangle^* = \langle\varphi, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n). \tag{11}$$

6. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СОСТОЯНИЙ ЛАНДАУ

Прежде всего заметим, что условие (11) означает, что редуцированное преобразование КС $\mathcal{W}_m : \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n) \to L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$, определенное в соответствии с (7) формулой

$$\mathcal{W}_m[\varphi](\xi) := \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z)\, e^{-|z|^2} \varphi(z)^* \langle z \mid \xi, \alpha\rangle,$$

есть изометрическое вложение. Однако для того чтобы охарактеризовать пространства состояний Ландау $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n)$, которые включены в гильбертово пространство $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых с весом $e^{-|\xi|^2}\, d\mu$ функций, мы должны воспользоваться унитарным преобразованием $\widetilde{\mathcal{W}} := Q \circ \mathcal{W}_m$, в котором $Q : L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) \to \mathcal{H}$ есть унитарное отображение (преобразование основного состояния), определенное формулой $Q[\phi](\xi) = e^{|\xi|^2/2}\phi(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему характеризации.

Теорема. *Для $m \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)] = \mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n).$$

Для того чтобы показать, что $\widetilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)] \subset \mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n)$, нам необходимо вычислить действие гамильтониана Ландау $\widetilde{H}$ (H_1 в формуле (3)) на $\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi)$ для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)$, $\xi \in \mathbb{C}^n$. Прямое вычисление показывает, что $\widetilde{H}\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi) = m\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi](\xi)$.

Обратно, пусть $\psi \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\psi(z) := \pi^{-n} \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2/2} (\psi(\zeta))^* \langle z \mid \zeta, \alpha\rangle.$$

Покажем, что φ_ψ удовлетворяет условию $\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi] = \psi$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) = {} & \pi^{-n} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z)\, e^{-|z|^2} \langle z \mid \xi, \alpha\rangle \times \\
& \times \biggl(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2/2} (\psi(\zeta))^* \langle z \mid \zeta, \alpha\rangle \biggr)^* = \\
= {} & \pi^{-n} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \times \\
& \times \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z)\, e^{-|z|^2} \langle z \mid \xi, \alpha\rangle \langle z \mid \zeta, \alpha\rangle^* = \\
= {} & \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2/2} \psi(\zeta) \times \\
& \times \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z)\, e^{-|z|^2} e^{z\cdot\xi^* - |\xi|^2/2} (z - \xi^*)^\alpha \times \\
& \times e^{z^*\cdot\zeta - |\zeta|^2/2} (z^* - \zeta)^\alpha = \\
= {} & \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2} \psi(\zeta) \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n d\mu(z_j)\, e^{-|z_j|^2} \times \\
& \times e^{z_j \xi_j + z_j^* \zeta_j^*} (z_j - \xi_j^*)^{\alpha_j} (z_j^* \zeta_j)^{\alpha_j} = \\
= {} & \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2} \psi(\zeta) \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\pi^n \alpha!} \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{j=1}^n e^{\zeta_j^* \xi_j} \mathcal{I}_j,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_j := {} & \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z_j)\, e^{|z_j|^2} (z_j^*)^{\alpha_j} \sum_{k=0}^{\alpha_j} \frac{\alpha_j}{k!(\alpha_j - k)!} (\zeta_j^* - \xi_j^*)^k z_j^{\alpha_j - k} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} (\zeta_j - \xi_j)^l (z_j)^l = \\
= {} & \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant \alpha_j \\ 0 \leqslant l < +\infty}} \frac{\alpha_j}{k!\,l!\,(\alpha_j - k)!} \biggl(\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(z_j)\, e^{-|z_j|^2} z_j^{\alpha_j + l} (z_j^*)^{\alpha_j - k} \biggr) (\xi_j^* - \zeta_j^*)^k (\zeta_j - \xi_j)^l.
\end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить интеграл в последней сумме, используем полярные координаты $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j > 0$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$. Получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_j = {} & \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant \alpha_j \\ 0 \leqslant l < +\infty}} \frac{\alpha_j!}{k!\,l!\,(\alpha_j - k)!} (\xi_j^* - \zeta_j^*)^k (\zeta_j - \xi_j)^l \times \\
& \times \int_0^{2\pi} d\theta_j\, e^{i(k-l)\theta_j} \int_0^{+\infty} dr_j\, r_j^{2\alpha_j + 1 - k + l} e^{-r_j^2}.
\end{aligned}$$

После вычисления сумма $\mathcal{I}_j$ сводится к выражению

$$\mathcal{I}_j = 2\pi \sum_{0\leqslant k\leqslant \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{k!l!(\alpha_j-k)!}\frac{\alpha_j}{2}(\xi_j^*-\zeta_j^*)^k(\zeta_j-\xi_j)^l.$$

Вспомнив, что полином Лагерра дается формулой [10]

$$L_p^{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p+\nu}{p-k}\frac{x^k}{k!},$$

получим

$$\mathcal{I}_j = \pi\alpha_j! L^0_{\alpha_j}(|\xi_j-\zeta_j|^2).$$

Поэтому имеем

$$\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) = \pi^{-n}\int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2}\psi(\zeta)e^{\xi\cdot\zeta}\times \\ \times \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} L^0_{\alpha_1}(|\xi_1-\zeta_1|^2)\dots L^0_{\alpha_n}(|\xi_n-\zeta_n|^2).$$

Используя формулу суммирования [10]

$$\sum_{i_1+\dots+i_n=p} L_{i_1}^{\beta_1}(x_1)\dots L_{i_n}^{\beta_n}(x_n) = L_p^{\beta_1+\dots+\beta_n+d-1}(x_1+\dots+x_n)$$

для $p=m,\ d=n,\ \beta_j=0,\ i_j=\alpha_j$ и $x_j=|\xi_j-\zeta_j|^2,\ 1\leqslant j\leqslant n$, получаем

$$\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} d\mu(\zeta)\, e^{-|\zeta|^2}\psi(\zeta)(\pi^{-n}e^{\xi\cdot\zeta}L_m^{n-1}(|\xi-\zeta|^2)).$$

Но функция переменных ξ, ζ в последнем интеграле совпадает с воспроизводящим ядром собственного пространства $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n)$ [9]. Поэтому последнее равенство означает, что $\widetilde{\mathcal{W}}_m[\varphi_\psi](\xi)=\psi(\xi)$. Очевидно, что $z\to\varphi_\psi(z)$ есть целая функция. Более того, она удовлетворяет условию $\langle\varphi_\psi,\varphi_\psi\rangle_{\mathcal{H}}<+\infty$, поскольку $\widetilde{\mathcal{W}}_m$ есть унитарное отображение. Тем самым включение $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{C}^n)\subset\widetilde{\mathcal{W}}_m[\mathcal{F}_2(\mathbb{C}^n)]$ доказано.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении четномерного аналога заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле для каждого уровня Ландау мы построили семейство ОКС путем сдвига фоковских состояний посредством операторов представления Фока–Баргмана группы Гейзенберга. При построении был использован метод, в основе которого лежат квадратично интегрируемые на однородном пространстве представления основной группы. Мы установили, что образ пространства Фока при преобразованиях КС, ассоциированных с построенными ОКС, совпадает с пространствами связанных состояний частицы. Это дает новое описание многомерных евклидовых состояний Ландау. Таким образом, метод КС дает нам возможность посмотреть на собственные пространства гамильтониана Ландау с математической точки зрения.

Благодарности. Автор благодарен своим коллегам Дж. Кубали, О. Мадихи и И. Такату.

Список литературы

[1] *V. V. Dodonov*. J. Opt. B. Quant. Semiclass. Opt. 2002. V. 4. P. R1.
[2] *И. А. Малкин, В. И. Манько*. ЖЭТФ. 1969. Т. 55. С. 1014.
[3] *B. R. Johnson, J. O. Hirschfelder, K. H. Yang*. Rev. Mod. Phys. 1983. V. 55. P. 109.
[4] *S. Varro*. J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 1631.
[5] *S. M. Girvin, T. Jach*. Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 5617.
[6] *M. K. Fung, Y. F. Wang*. Chinese J. Phys. 1999. V. 37. № 5. P. 435.
[7] *G. B. Folland*. Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 47. P. 401.
[8] *W. Rudin*. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer, 1980.
[9] *N. Askour, A. Intissar, Z. Mouayn*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3057.
[10] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
[11] *V. V. Kisil*. Acta Appl. Math. 1999. V. 59. P. 79.
[12] *G. B. Folland*. Harmonic Analysis on Phase Space. Ann. Math. Stud. V. 122. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1989.
[13] *C. Benson, J. Jenkins, G. Ratclif*. J. Funct. Ann. 1992. V. 105. P. 405.
[14] *M. Duflo, C. C. Moore*. J. Funct. Anal. 1976. V. 21. № 2. P. 208.

Поступила в редакцию 10.VII.2003 г.