Г. И. Данилюк, И. В. Скрыпник, О частичной регулярности обобщенных решений квазилинейных параболических систем,
Докл. АН СССР, 1980, том 250, номер 4, 790–793

https://www.mathnet.ru/dan43324

ференцируемой функции с локализованной на $\mathcal{E}$ особенностью Карлемана было показано в [3]. Теорема 5 обобщает некоторые результаты из [4,5,7], и теорему о существовании характеристической функции с особенностью Карлемана из [3].

Тбилисский математический институт им. А.М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
27 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз,* Теория ортогональных рядов, М., 1958. [2] *П.Р. Халмош,* Лекции по эргодической теории, М., 1959. [3] *А.М. Олевский,* Сиб. матем. журн., т. 8, № 4 (1967). [4] *О.Д. Церетели,* Сообщ. АН ГрузССР, т. 59, № 1 (1970). [5] *О.Д. Церетели,* там же, т. 62, № 1 (1971). [6] *О.Д. Церетели,* там же, т. 76, № 1 (1974). [7] *Р.И. Гуриелашвили,* там же, т. 85, № 3 (1977). [8] *Ш.В. Хеладзе,* Матем. сб., т. 107, № 2 (1978). [9] *А.Б. Гулисашвили,* Сообщ. АН ГрузССР, т. 67, № 3 (1972). [10] *A.B. Gulisašvili,* Studia Math., v. 54, № 2, 117 (1975). [11] *А.Б. Гулисашвили,* Сообщ. АН ГрузССР, т. 87, № 2 (1977).

УДК 517.944 МАТЕМАТИКА

Г.И. ДАНИЛЮК, И.В. СКРЫПНИК

О ЧАСТИЧНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 18 VI 1979)

При естественных условиях на известные параметры устанавливается регулярность обобщенного решения квазилинейной параболической системы

$$(1)\qquad \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha a_\alpha^k(x, t, u, \dots, D_x^m u) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, N,$$

на открытом подмножестве полной меры. Здесь и дальше используются обычные мультиндексные обозначения, в частности,

$$D_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \qquad D_x^m u = \{D_x^\alpha u_k:\ |\alpha| = m,\ k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Известно [1,2], что даже квазилинейные стационарные уравнения высшего порядка могут иметь обобщенные решения с особенностями, так что фигурирующее ниже исключительное множество Z, вообще говоря, непусто. Работа обобщает на параболические уравнения известный результат Морри [3] о частичной регулярности решений эллиптических уравнений. При $m = 1$ результат данной работы был получен в [4] в случае линейной зависимости a_α^k от первых производных $u(x, t)$ и авторами в [5] в общем случае. В случае $m = N = 1$ регулярность решений известна (см., напр., [6]).

1. Дальше Ω — произвольная ограниченная область в R^n. Будем предполагать:

а) при $(x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\xi = \{\xi_\gamma^k:\ |\gamma| \leqslant m, k = 1, 2, \dots, N\}$, $\xi_\gamma^k \in R^1$ функции $a_\alpha^k(x, t, \xi)$, $|\alpha| \leqslant m$, $k = 1, 2, \dots, N$, имеют непрерывные производные второго порядка по всем аргументам, удовлетворяющие на каждом компактном подмножестве условию Гёльдера по x, ξ с показателем μ и по t с показателем $\mu/(2m)$.

б) с $p \geqslant 2$ и положительными постоянными K_1, K_2 при $(x, t) \in Q_T$, ξ_γ^k, $\eta_\gamma^k \in R^1$ выполняются неравенства

$$\sum_{k,l=1}^{N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial a_\alpha^k(x, t, \xi)}{\partial \xi_\beta^l} \eta_\alpha^k \eta_\beta^l \geqslant K_1 [W(\xi)]^{p-2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha^k|^2,$$

$$|a_\alpha^k| + \left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial t}\right| + \left\{\left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial t}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial \xi_\gamma^j}\right|\right\} W(\xi) \leqslant$$
$$\leqslant K_2 [W(\xi)]^{p-1};$$

здесь $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma| \leqslant m$, k, l, $j = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $W(\xi) = 1 + \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\beta| \leqslant m} |\xi_\beta^l|$.

2. Изучаются дифференциальные свойства решения системы (1), принадлежащего $V_{p,2}^{m,0}(Q_T)$. Последнее пространство определяется как пополнение гладких в Q_T функций по норме

$$\|u\|_{p,2,Q_T}^{(m,0)} = \operatorname*{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u\|_{2,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \|D_x^\alpha u\|_{p,Q_T},$$

где $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $\|\cdot\|_{p,Q_T}$ – соответственно нормы в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_p(Q_T)$.

Обозначим еще через $\overset{\circ}{V}{}_{p,2}^{m,0}(Q_T)$ подпространство пространства $V_{p,2}^{m,0}(Q_T)$, плотным множеством которого является множество гладких в Q_T функций, равных нулю вблизи $\partial\Omega \times [0, T]$.

Обобщенным решением системы (1) называем вектор-функцию $u(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t))$ такую, что $u_k(x, t) \in V_{p,2}^{m,0}(Q_T)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и для произвольной функции $v(x, t) \in \overset{\circ}{V}{}_{p,2}^{m,0}(Q_T)$, имеющей принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t, при $0 < t_0 \leqslant T$, $k = 1, 2, \ldots, N$, выполняются равенства

$$\int_\Omega u_k v dx \Big|_{t=0}^{t=t_0} + \int_0^{t_0} \int_\Omega \Big\{ -u_k v_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha^k(x, t, u, \ldots, D_x^m u) D_x^\alpha v \Big\} dx\, dt = 0. \tag{2}$$

Имеет место следующее утверждение, представляющее основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть функции $a_\alpha^k(x, t, \xi)$ удовлетворяют условиям* а), б) *п.* 1 *и пусть $u(x, t)$ – обобщенное решение системы* (1), *имеющее производные $\partial u_k/\partial t$, $k = 1, 2, \ldots, N$, принадлежащие $L_{2,\mathrm{loc}}(Q_T)$.*

Существует подмножество $Z \subset Q_T$ меры нуль такое, что $Q_T \setminus Z$ открыто и в $Q_T \setminus Z$ функции $u_k(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, m раз непрерывно дифференцируемы по x.

Замечание. Существование обобщенного решения, обладающего требуемой в теореме 1 производной по t, известно (см., напр., ([7])).

3. В этом пункте указываются некоторые априорные оценки обобщенного решения, используемые при доказательстве теоремы 1. Буквой c с индексами будем обозначать постоянную, зависящую лишь от $\|u_k\|_{p,2,Q_T}^{(m,0)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и известных параметров n, m, N, K_1, K_2, p, T, Ω. Зависимость c от других параметров будет оговариваться дополнительно.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $u(x, t)$ – *обобщенное решение системы* (1); *предположим, что выполнены условия* а), б) *п.* 1.

Тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой в R^{n+1} *функции* $\omega(x, t)$, *равной нулю вне* Q_T, *имеет место оценка*

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{N} \int_{R^1} \int_{R^1} \int_{\Omega} \left| \frac{\Delta_t(h)[\widetilde{u}_k(x, t)\omega(x, t)]}{h} \right|^2 dx\, dt\, dh < c_1$$

с постоянной c_1, *зависящей от известных параметров и* ω. *Здесь* $\Delta_t(h)\varphi(x, t) = \varphi(x, t+h) - \varphi(x, t)$, $\widetilde{u}_k(x, t)$ – *продолжение функции* $\widetilde{u}_k(x, t)$ *на* $\Omega \times R^1$ *нулем вне* Q_T.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2 *и* Ω' – *произвольная внутренняя подобласть области* Ω. *Существуют положительные постоянные* δ *и* λ, *зависящие только от* n, m, p, *такие, что имеют место оценки*

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} [V(x, t) + V(x, t+h)]^{p-2} |\Delta_t(h) D_x^\alpha u_k|^2 dx\, dt \leqslant c_2 h^\delta, \\ &\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} \int_{R^1} \int_{R^1} \int_{\Omega} [V(x, t) + V(x, t+h)]^{p-2} \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha [\widetilde{u}_k \omega]|^2}{h^{1+\lambda}} dx\, dt\, dh \leqslant c_3; \end{aligned}$$

здесь $V(x, t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D_x^\alpha u_k(x, t)|$. *В первом неравенстве* $0 < t_1 < t_2 < T$, $h < T - t_2$ *и постоянная* c_2 *зависит от известных параметров,* t_1 *и расстояния* Ω' *до* Ω, *границы области* Ω; *во втором неравенстве использованы обозначения неравенства* (3) *и постоянная* c_3 *зависит от тех же величин, что и* c_1.

4. Определим для произвольной вектор-функции $u(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t))$, $u_k(x, t) \in V_{p,2}^{m,0}(Q_T)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и произвольной внутренней точки $(x_0, t_0) \in Q_T$ при $0 < r < r(x_0, t_0) = \min\{t_0^{1/(2m)}, (T - t_0)^{1/(2m)}, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\}$

$$(5)\qquad J_r[u; x_0, t_0] = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_r} \iint_{Q_r} [V(x, t)]^{p-2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m} r^{2(|\alpha|-m)} |D_x^\alpha u_k|^2 dx\, dt,$$

где

$$Q_r = Q_r(x_0, t_0) = B_r(x_0) \times [t_0 - r^{2m},\ t_0 + r^{2m}],$$

$B_r(x_0)$ – шар радиуса r с центром в точке x_0.

О п р е д е л е н и е. Внутренняя точка (x_0, t_0) цилиндра Q_T называется р е г у л я р н о й т о ч к о й $u(x, t)$, если для этой точки существует вектор-функция $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_N(x))$, компонентами которой являются полиномы степени m, такая, что

$$(6)\qquad \lim_{r\to 0} J[u - p; x_0, t_0] = 0.$$

Полученные в п. 3 априорные оценки решений системы (1) позволяют доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $u(x, t)$ – *обобщенное решение системы* (1); *предположим, что выполнены условия* а), б) *п.* 1.

Тогда почти все точки цилиндра Q_T *являются регулярными точками* $u(x, t)$.

В условиях теоремы 4 определим систему функций $u_{k,\alpha}(x, t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $|\alpha| \leqslant m$, $(x, t) \in Q_T$, полагая для каждой регулярной точки (x_0, t_0)

обобщенного решения $u(x, t)$

$$u_{k,\alpha}(x_0, t_0) = D_x^\alpha p_k(x_0),$$

где $p_k(x)$ – полином, соответствующий точке (x_0, t_0) и $u(x, t)$ согласно определению регулярной точки. Рассуждения, аналогичные проведенным в § 1 главы 1 книги ([8]), позволяют доказать, что почти всюду в Q_T

$$D_x^\alpha u_k(x, t) = u_{k,\alpha}(x, t).$$

Основное утверждение работы – теорема 1 – следует из теоремы 4 и приводимой ниже теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1 *и пусть* (x_0, t_0) – *регулярная точка обобщенного решения* $u(x, t)$.

Тогда для произвольного положительного числа ϵ *существует* $\rho > 0$ *такое, что цилиндр* $Q_\rho(x_0, t_0) \subset Q_T$, *все точки* $Q_\rho(x_0, t_0)$ *регулярны для* $u(x, t)$ *и*

$$|u_{k,\alpha}(x, t) - u_{k,\alpha}(x_0, t_0)| < \epsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad (x, t) \in Q_\rho. \tag{7}$$

5. В данном пункте сформулировано утверждение, на котором основано доказательство теоремы 5. Ограничимся формулировкой только одной вспомогательной теоремы, относящейся к случаю системы (1), удовлетворяющей дополнительному условию

$$a_\alpha^k(x, t, 0) = 0, \quad |\alpha| \leqslant m, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Теорема 6. *Предположим, что выполнены все условия теоремы* 1, *равенство* (8) *и пусть заданы точка* $(x_0, t_0) \in Q_T$ *и произвольное положительное число* θ.

Существуют положительные постоянные R_0, ϵ_0, *зависящие от известных параметров,* θ *и констант Гёльдера вторых производных функций* $a_\alpha^k(x, t, \xi)$ *в окрестности точки* $(x_0, t_0, 0)$, *такие, что из неравенства* $J_r[u; x_0, t_0] = \epsilon^2 < \epsilon_0^2$, $r < R_0$, *следует*

$$J_{2r/3}[u - w; x_0, t_0] < \theta J_r[u; x_0, t_0] \tag{9}$$

с некоторой вектор-функцией $w(x, t) = (w_1(x, t), \ldots, w_N(x, t))$, *удовлетворяющей условиям*

$$w_k(x, t) \in C_{x}^{m+1+\mu,}\,{}_{t}^{(m+1+\mu)/(2m)}(Q_{2r/3}), \quad |D_x^\alpha w_k(x, t)| \leqslant C_0 \epsilon r^{m-|\alpha|}$$

при $|\alpha| \leqslant m + 1$, $(x, t) \in Q_{2r/3}(x_0, t_0)$.

Определение пространств $C_x^{l,}\,{}_t^{l/(2m)}(Q_T)$ имеется в монографии ([6]), стр. 705. Доказательство теоремы, как и в стационарном случае в (3), проводится от противного. При этом используются оценки линейных параболических систем ([9]).

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР, Донецк

Поступило
9 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Giusti, M. Miranda,* Boll. Unione mat. ital., v. 1, № 2, 219 (1968). [2] *В.Г. Мазья,* Функц. анализ и его прилож., т. 2, № 3, 53 (1968). [3] *C.B. Morrey,* J. Math. and Mech., v. 17, № 7, 649 (1968). [4] *M. Giaguinta, E. Giusti,* Ann. mat. pura ed appl., v. 97, 253 (1973). [5] *Г.И. Данилюк, И.В. Скрыпник,* Матем. физ., в. 22, 87 (1977). [6] *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева,* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., "Наука", 1967. [7] *М.И. Вишик,* Матем. сб., 59 (101), 289 (1962). [8] *О.И. Стейн,* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., "Мир", 1968. [9] *Г.И. Данилюк,* Доп. АН УРСР, сер. А, № 2, 105 (1978).