Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Одинец, О сильной единственности минимальных проекторов в пространствах Банаха,
Изв. вузов. Матем., 1984, номер 9, 75–77

https://www.mathnet.ru/ivm8342

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 18:36:20

3. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики.— Казань, 1976.—158 с.
4. Карчевский М. М., Ляшко А. Д., Павлова М. Ф. О разностных схемах для уравнения нестационарной нелинейной фильтрации.— Дифференц. уравнения, 1980, т. XVI, № 7, с. 1255—1264.
5. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.— Матем. сб., 1965, т. 67 (109) : 4, с. 609—642.

г. Казань

Поступила
16.02.1984

В. П. Одинец

УДК 517.98

О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Пусть D — дополняемое подпространство банахова пространства B, $\dim(B/D) \geqslant 2$, над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел. Известно [1], что существование минимального проектора на D (т. е. проектора, норма которого равна инфинуму норм всех проекторов из B на D) из всех $K \subset B$, $K \supset D$, $\dim(K/D) = 1$, не обеспечивает, вообще говоря, существования минимального проектора из B на D. С другой стороны, накоплено достаточно результатов (см., напр., [2]—[5]), обеспечивающих не только существование, но и единственность минимального проектора на подпространство коразмерности 1. Данная работа является обобщением результатов работ [6], [7] на минимальные проекторы с нормой $\geqslant 1$.

1. Пусть $\lambda(B, D)$ — относительная проекционная константа,

$$S_D = \{x \in D : \|x\| = 1\}, \quad W_D(y, r) = \{x \in D : \|y - x\| \leqslant r\}.$$

Для элемента $x \in B \setminus \theta$ пусть $A(x) = \{f \in S_{B^*} : f(x) = \|x\|\}$, $\mathfrak{G}_x = \{z \in B :$ существует конечный $\lim\limits_{t \to 0} t^{-1}(\|x + tz\| - \|x\|)\}$, $x \perp y \Longleftrightarrow \inf\limits_{t \in \boldsymbol{R}} \|x + ty\| = \|x\|$. Одномерное подпространство, содержащее элемент x, обозначим через $[x]$; прямую сумму подпространств D и M — через $D \oplus M$, т. е. $D \oplus M = D + M$ и $D \cap M = [\theta]$, где θ — нулевой элемент в B. Если из подпространства $K \supset D$ существует единственный минимальный проектор на D, то будем говорить, что пара (K, D) обладает свойством единственности, а сам проектор обозначать через P_K. Если пары (B, D) и (K, D) обладают свойством единственности для любого $K \subset B$, $\dim(K/D) = 1$, то минимальный проектор из B на D назовем сильно единственным.

2. Определение 1. Пусть D — подпространство в B и $x \in B$. Обозначим

$$B_D(x) = \bigcap_{y \in D} W_D(y; \lambda(B, D)\|x - y\|) \tag{1}$$

и назовем $B_D(x)$ множеством минимальности для D и x.

Предложение 1. *Пусть D — подпространство в B, $\dim(B/D) = 1$. Для существования минимального проектора на D необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x \in B \setminus D$ множество минимальности $B_D(x) \neq \varnothing$. Для единственности минимального проектора на D необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in B \setminus D$ множество минимальности $B_D(x)$ содержало ровно 1 элемент.*

Теорема 1. *Пусть подпространство $D \subset B$, и для любого подпространства $K \subset B$, $D \subset K$, $\dim(K/D) = 1$, пара (K, D) обладает свойством единственности. Пусть для любого $x \in B$*

$$P(x) = \begin{cases} P_K, & \text{если } x \in B \setminus D,\ K = D \oplus [x]; \\ x, & \text{если } x \in D. \end{cases} \tag{2}$$

Для существования минимального проектора на D из B достаточно, а когда $\|P_K\| = \lambda(B, D)$ для любого $K \supset D$, $\dim(K/D) = 1$, то и необходимо, чтобы оператор P был аддитивным. (При этом минимальный проектор окажется единственным и совпадающим с оператором P, а значит, и сильно единственным.)

Замечание 1. Множество минимальности было введено Г. Години в [7] для минимальных проекторов с единичной нормой в связи с обобщением понятия минимальных точек. (См. также [8]—[10].)

3. Пусть D — подпространство в B, и пусть для любого $x \in B \setminus D$ существует единственный минимальный проектор $P_x : D \oplus [x] \xrightarrow{\text{на}} D$. Обозначим через $OV_D(x) = \{z \in S_D : z \perp P_x^{-1}(\theta)\}$ [1]. Для произвольных $x_1, x_2, x_3 \in B \setminus D$ положим $F(x_1, x_2, x_3) = \bigcap_{i=1}^{3} OV_D(x_i)$.

Определение 2. Будем говорить, что подпространство D обладает в B свойством „сильного пересечения", если для любых трех элементов $x_1, x_2, x_3 \in B \setminus D$ множество $F(x_1, x_2, x_3) \neq \varnothing$ и некоторое семейство функционалов $\bigcup_{v \in F(x_1, x_2, x_3)} (f_v | D)$ тотально на D ($f_v | D$ — сужение на D произвольного функционала $f_v \in A(v)$).

Предложение 2. *Пусть подпространство D обладает в B свойством сильного пересечения. Пусть P — оператор, построенный по формуле* (2). *Пусть*: (i) *для любых $x, y \in B \setminus D$ и таких, что $x + y \in B \setminus D$, из трех элементов $x - P(x)$, $y - P(y)$, $((x + y) - P(x + y))$ по крайней мере два принадлежат подпространству $\mathfrak{G}_z$, для любого $z \in F(x, y, x + y)$.*

Тогда минимальный проектор на D существует и сильно единственен.

Схема доказательства. Условие (i) в сочетании со свойством сильного пересечения я обеспечивает аддитивность оператора P в случае $x, y, x + y \in B \setminus D$ (см. лемму 2 из [6]). В остальных случаях аддитивность оператора P доказываем непосредственно, используя единственность проектора P_z из $D \oplus [z] \xrightarrow{\text{на}} D$. Теперь утверждение следует из теоремы 1.

Замечание 2. Пусть для любого $x \in B \setminus D$ определено $OV_D(x)$. Если при этом минимальный проектор на D из $D \oplus [x]$ имеет норму, равную 1, то $OV_D(x) = S_D$. Так как условие (i) предложения 2 является обобщением леммы 2 из [6], то теорема 1 из [6] есть частный случай предложения 2. Заметим, что свойство сильного пересечения, вообще говоря, не связано обязательно с точками гладкости единичной сферы S_D, как в теореме 1 из [6]. Например, справедливо

Предложение 3. *Пусть D — двумерное подпространство банахова пространства B такое, что*:

а) $W_D(\theta; 1)$ *имеет ровно* 6 *экстремальных* (= *крайних*) *точек*;

б) *в любом трехмерном подпространстве $K \subseteq B$ минимальный проектор на D из K единственен.*

Тогда подпространство D обладает в B свойством сильного пересечения.

Доказательство предложения 3 основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть D — подпространство трехмерного банахова пространства B* ($\dim D = 2$). *Пусть P — минимальный проектор на D, проектирующий B на D вдоль некоторого z. Тогда существуют не менее* 6 *элементов $x_1, \ldots, x_6 \in S_D$ таких, что $x_i \perp z$ ($i = 1, \ldots, 6$).*

Замечание 3. Если в предложении 3 вместо условия б) дать условие:

в) $$D + \bigcap_{y \in S_D} \mathfrak{G}_y = B,$$

то хотя минимальный проектор на D будет обладать свойством сильного пересечения и даже, более того, он будет сильно единственным, но условия а) и в) инспирируют равенство его нормы 1.

В заключение приведем пример сильно единственного минимального проектора с нормой строго больше 1.

Пример 1. Пусть $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ раз}}, 1, 0, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots$, — естественный базис в (c_0). Пусть D — двумерное подпространство, натянутое на h_1 и h_2, где $h_1 = e_1 + e_2$, $h_2 = e_3 - e_1$. Тогда, используя результаты из [4] и [5], можно проверить, что выполнены условия предложения 3, и, следовательно, подпространство D обладает свойством сильного пересечения. Более того, в силу предложения 3.1 из [3] минимальный проектор на D из (c_0) единственен, а значит, и сильно единственен. При этом его норма равна 4/3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindenstrauss J. On projections with norm 1 an example.— Proc. Amer. Math. Soc., 1964, v. 15, № 3, p. 403—406.

2. Blatter J., Cheney E. W. Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces.— Ann. mat. pura ed appl., 1974, v. 101, № 4, p. 215—227.

[1] $x \perp M \Longleftrightarrow x \perp y$ для любого $y \in M$.

3. Одинец В. П. О единственности минимальных проекций в банаховых пространствах.— ДАН СССР, 1975, т. 220, № 4, с. 779—781.
4. Одинец В. П. О единственности минимальных проекций.— Изв. вузов. Матем., 1978, № 2, с. 73—75.
5. Odinec V. P. On the Uniqueness of Minimal Projections in l_∞^n $(n \geqslant 3)$.— Bull. Acad. polon. sci. Ser. math. 1980, v. 28, № 7—8, p. 347—350.
6. Одинец В. П. Об условиях существования и сильной единственности проектора с единичной нормой.— Матем. заметки, 1982, т. 32, № 5, с. 607—612.
7. Godini G. On minimal points.— Comment. math. Univ. carolinae, 1980, v. 21, № 3, p. 407—419.
8. Godini G. On generalized minimal points.— Proc. of the fourth conference on operator theory. Timisoara, 1980, p. 239—245.
9. Godini G. Some remarks on minimal points in normed linear space.— Anal. numer. et theor. approximat., 1981, t. 10, № 1, p. 17—22.
10. Beauzamy B. Points minimaux dans les espaces de Banach.— C.R.A.S., Paris, 1975, 280, № 11, A.717—A.720.

г. Ленинград

Поступила
03.05.1983

Х. Шадыев

УДК 514.1

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ГОМОТЕТИЯХ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Пусть V_n — риманово многообразие класса C^∞, а g_{ij} — компоненты его метрического тензора в локальных координатах x^i. Введем в касательном расслоении $T(V_n)$ индуцированные локальные координаты (x^i, x^{n+i}) $(i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n)$, где x^{n+i} — координаты касательного вектора в точке $M(x^i)$ многообразия V_n.

В работе [1] было изучено синектическое расширение полного лифта ${}^c g$ метрики g в $T(V_n)$ при помощи заданного на базисном многообразии поля симметричного тензора, который будем обозначать через h_{ij}. Эта метрика, названная синектической, определяется матрицей

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} x^{n+s}\partial_s g_{ij} + h_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

т. е. ее можно представить как сумму полного лифта ${}^c g$ и вертикального лифта ${}^V h$ тензора h_{ij}. Там же показано, что синектическое расширение метрики полного лифта приводит к синектическому расширению полного лифта связности ${}^c\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ в $T(V_n)$ при помощи тензора

$$(1/2)(\nabla_j h^i_k + \nabla_k h^i_j - \nabla^i h_{jk}), \tag{2}$$

который будем обозначать через H^i_{jk}. В свою очередь, тензор кривизны $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ полного лифта ${}^c\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ получит синектическое расширение $\overset{*}{R}_{ijk}{}^{n+r} = x^{n+s}\partial_s R_{ijk}^r + P_{ijk}^r$, где

$$P_{ijk}^r = 2\nabla_{[i} H^r_{j]k}, \tag{3}$$

а остальные $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ совпадают с $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$.

В [2] была изучена аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении $T(M_n)$ произвольного дифференцируемого многообразия M_n с заданной связностью Γ^i_{jk} без кручения и доказана

Теорема. *Для того чтобы векторное поле ξ^α порождало в касательном расслоении $T(M_n)$ инфинитезимальную аффинную коллинеацию синектической связности $\mathcal{Г}^\alpha_{\beta\gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы поле имело вид*

$$\xi = {}^c v + {}^V w + {}^{HX} F + {}^{VX} Q,$$

т. е.

$$\xi^\alpha = \{F^i_s x^{n+s} + v^i;\ -\Gamma^i_{sr} F^s_m x^{n+r} x^{n+m} + (Q^i_s + \partial_s v^i) x^{n+s} + w^i\}, \tag{4}$$

а тензорные поля v^i, w^i, F^i_j и Q^i_j на M_n удовлетворяли условиям: