



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ы. Бидайбеков, Об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 53–59

<https://www.mathnet.ru/mzm6839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

14 мая 2025 г., 20:41:01



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. Ы. Бидайбеков

В работе [1] приведена в качестве примера одна обратная задача для линейного дифференциального уравнения первого порядка, исследование которой проводится довольно просто. Нашей целью является исследование обратных задач для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_n(x)y^{(n-1)} + \dots + p_2(x)y' + p_1(x)y = f(x). \quad (1)$$

Рассматриваемые обратные задачи будут заключаться в отыскании либо всех коэффициентов $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. линейного дифференциального оператора L , либо правой части $f(x)$ уравнения (1). Везде в дальнейшем будем считать, что все коэффициенты и правая часть уравнения (1) непрерывны, и в этом предположении проведем исследование нижеследующих обратных задач.

1. Пусть для дифференциального уравнения (1) имеется серия прямых задач с данными

$$y^{(i-1)}(x, x_0)|_{x=x_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

зависящими от параметра x_0 . Будем считать, что коэффициенты $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, известны, а требуется найти функцию $f(x)$, если известно, что

$$y(x, x_0)|_{x=x_1} = \varphi(x_0), \quad (3)$$

т. е. по заданной функции $\varphi(x_0)$ найти неизвестную функцию $f(x)$. При этом полагаем, что $x, x_0 \in D_h =$

$= \{x : |x - x_1| \leq h\}$, где h — произвольное положительное число, а x_1 — фиксированная точка.

Так как решение задачи (1), (2) при известной функции $f(x) \in C(D_h)$ в любой точке $x = x_0$ из промежутка D_h имеет нуль n -го порядка и дифференцируемо по параметру x_0 , то для существования решения поставленной обратной задачи необходимо, чтобы функция $\varphi(x_0)$, $x_0 \in D_h$, была дифференцируемой и имела в точке $x_0 = x_1$ нуль n -го порядка, следовательно, ее производная $\varphi'(x_0)$ имела нуль $(n - 1)$ -го порядка в той же точке $x_0 = x_1$.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения обратной задачи (1), (2), (3).

ТЕОРЕМА 1. *Если*

$$\|p_i(x)\|_{C(D_h)} \leq M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где M_i — положительные постоянные, а функция $\varphi(x_0)$ удовлетворяет необходимым условиям, указанным выше, и принадлежит $C^1(D_h)$, то существует единственное решение обратной задачи (1), (2), (3) на любом промежутке D_h при $h < 2h_0$, где h_0 — наименьший положительный корень уравнения

$$M_1 \frac{h^n}{n!} + M_2 \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + M_n \frac{h}{1!} - 1 = 0. \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, решение задачи (1), (2) по методу Коши [2] представляется в виде

$$y(x, x_0) = \int_{x_0}^x G(x, t) f(t) dt, \quad (6)$$

где функция $G(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$LG = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G^{(k)}|_{x=t} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, n-2, \\ G^{(n-1)}|_{x=t} &= 1, & t &\in D_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Положив $x = x_1$ в равенстве (6) и дифференцируя по параметру x_0 , а затем разрешив относительно функции $f(x_0)$, имеем

$$f(x_0) = -\varphi'(x_0)/G(x_1, x_0). \quad (9)$$

Таким образом, мы получили явное выражение для определения функции $f(x_0)$, $x_0 \in D_h$. Покажем теперь,

что функция $G(x_1, x_0) \neq 0$ при любом $x_0 \in D_h$, $h < h_0$, $x_0 \neq x_1$. Для этого заметим, что справедлива следующая

ЛЕММА. Если имеет место неравенство (4), то при любом фиксированном t решение задачи (7), (8) $G(x, t) \neq 0$ для $x \in (t - h_0, t) \cup (t, t + h_0)$, где h_0 — наименьший положительный корень уравнения (5).

Доказательство сформулированной леммы непосредственно следует из доказательства теоремы Валле Пуссена [3].

Из этой леммы имеем, что функция $G(x_1, x_0) \neq 0$ при любом $x_0 \in D_h$, $h < h_0$, $x_0 \neq x_1$. А из того, что порядки нулей у функций $\varphi'(x_0)$ и $G(x_1, x_0)$ при $x_0 = x_1$ совпадают и равны $n - 1$, следует однозначность определения по формуле (9) функции $f(x_0)$, непрерывной на любом промежутке D_h при $h < 2h_0$. Что и требовалось доказать.

Отметим, что в случае уравнения второго порядка, как показано в работе [4],

$$h_0 = (\sqrt{9M_2^2 + 24M_1} - 3M_2) / (2M_1)$$

и возможно дальнейшее уточнение оценки h_0 [4], [5].

2. Рассмотрим следующую обратную задачу: определить оператор L , т. е. коэффициенты $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, если относительно решения уравнения

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_n(x)y^{(n-1)} + \dots + p_2(x)y' + p_1(x)y = 0 \quad (10)$$

со следующими n сериями прямых задач Коши с данными

$$y_i^{(k)}(x, x_0)|_{x=x_0} = \begin{cases} 1, & k = i - 1, \\ 0, & k \neq i - 1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (11)$$

зависящими от параметра x_0 , известно, что

$$y_i(x, x_0)|_{x=x_1} = \varphi_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться в том, что для существования решения данной обратной задачи необходимо, чтобы функции

$$\varphi_1'(x_0), \varphi_v'(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^{v-2}}{(v-2)!}, \quad v = 2, 3, \dots, n,$$

имели нули $(n - 1)$ -го порядка при $x_0 = x_1$. Покажем теперь, что при выполнении этих необходимых условий

решение обратной задачи (10), (11), (12) существует и единственно в классе непрерывных на некотором промежутке $D_h = \{x: |x - x_1| \leq h\}$ функций.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое положительное число h , что на промежутке D_h решение обратной задачи (10), (11), (12) существует и единственно в классе непрерывных функций, если выполнены необходимые условия, указанные выше, и $\varphi_i(x_0) \in C^1(D_h)$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, решения рассматриваемых задач Коши эквивалентны следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$y_i(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[- \sum_{j=1}^n p_j(t) y_i^{(j-1)}(t, x_0) \right] dt + \\ + (x - x_0)^{i-1} / ((i-1)!), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Положив в последних равенствах $x = x_1$ и дифференцируя по переменной x_0 , получим

$$\frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} p_i(x_0) = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[\sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial y_i^{(j-1)}(t, x_0)}{\partial x_0} \right] dt + \\ + F_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где

$$F_1(x_0) = \varphi_1'(x_0),$$

$$F_v(x_0) = \varphi_v'(x_0) - (x_1 - x_0)^{v-2} / ((v-2)!),$$

$$v = 2, 3, \dots, n.$$

Из равенства (13), вычисляя производные по переменной x любого порядка до $n - 1$, имеем

$$y_i^{(k-1)}(x, x_0) = \Phi_{i+kn}(x, x_0) - \\ - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!} \left[\sum_{j=1}^n p_j(t) y_i^{(j-1)}(t, x_0) \right] dt, \\ i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

в которых

$$\Phi_{i+kn}(x, x_0) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left[\frac{(x - x_0)^{i-1}}{(i-1)!} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

а дифференцируя равенства (15) по переменной x_0 , находим

$$\frac{\partial y_i^{(k-1)}(x, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi_{i+kn}(x, x_0) + p_i(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!} - \\ - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!} \left[\sum_{j=1}^n p_j(t) \frac{\partial y_i^{(j-1)}(t, x_0)}{\partial x_0} \right] dt, \\ i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Заметим, что из равенства (14) следует, что

$$p_i(x_1) = \lim_{x_0 \rightarrow x_1} ((n-1)! F_i(x_0)/(x_1-x_0)^{n-1}), \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

и принимают вполне определенные значения в силу выполнения необходимых условий для функции $\varphi_i(x_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Далее в уравнениях (14) заменим переменную x_0 на x , а в уравнениях (16) положим $x_0 = x_1$, тогда, вводя для удобства следующие обозначения:

$$(n-1)! F_i(x)/(x_1-x)^{n-1} = \Psi_i(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi_{i+kn}(x, x_1) + p_i(x_1) \frac{(x-x_1)^{n-k}}{(n-k)!} = \Upsilon_{i+kn}(x), \\ \partial y_i^{(k-1)}(x, x_1)/\partial x_0 = p_{i+kn}(x),$$

$i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$, получим следующую замкнутую систему из $n^2 + n$ интегральных уравнений второго рода:

$$p_i(x) = \Psi_i(x) - \int_{x_1}^x \frac{(x_1-t)^{n-1}}{(x_1-x)^{n-1}} \sum_{j=1}^n p_j(t) p_{i+jn}(t) dt, \quad (17)$$

$$p_{i+kn}(x) = \Upsilon_{i+kn}(x) - \int_{x_1}^x \frac{(x-t)^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{j=1}^n p_j(t) p_{i+jn}(t) dt,$$

$i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$, где функции $\Psi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n^2 + n$, — известные непрерывные функции.

Из теории интегральных уравнений [6], [1] известно, что можно подобрать такое $h = h(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, что на промежутке D_h система (17) имеет единственное непрерывное решение.

З а м е ч а н и е 1. Начальные условия (11) можно задавать и по-иному, лишь бы y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в совокуп-

ности составляли полную систему линейно независимых решений.

З а м е ч а н и е 2. Примененный при доказательстве теоремы 2 метод дает возможность не только найти решение обратной задачи, но также позволяет найти одновременно решения прямых задач (10), (11) с их производными до $(n - 1)$ -го порядка включительно при $x_0 = x_1$.

З а м е ч а н и е 3. Доказанная теорема 2, естественно, представляет собой теорему существования и единственности «в малом». Однако просто решается вопрос о единственности решения обратной задачи (10), (11), (12) «в большом». Действительно, если предположить, что существуют два решения $p_i^1, p_i^2, i = 1, 2, \dots, n$, данной обратной задачи, то, вводя обозначения $\tilde{p}_k = p_k^1 - p_k^2, k = 1, 2, \dots, n^2 + n$, и используя очевидное тождество

$$p_k^1 p_l^1 - p_k^2 p_l^2 = p_k^1 \tilde{p}_l + p_l^2 \tilde{p}_k,$$

которое имеет место при любых $k, l (k \neq l)$, из системы (17) получим

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j(x) &= - \int_{x_1}^x \frac{(x_1 - t)^{n-1}}{(x_1 - x)^{n-1}} \sum_{j=1}^n [p_j^1 \tilde{p}_{i+jn} + \tilde{p}_j p_{i+jn}^2] dt, \\ \tilde{p}_{i+mn}(x) &= - \int_{x_1}^x \frac{(x - t)^{n-m}}{(n - m)!} \sum_{j=1}^n [p_j^1 \tilde{p}_{i+jn} + \tilde{p}_j p_{i+jn}^2] dt, \\ i &= 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Полученная система представляет собой систему линейных однородных интегральных уравнений, которая с помощью замены $(x_1 - x)^{n-1} \tilde{p}_i = r_i, i = 1, 2, \dots, n$, может быть сведена к вольтерровой системе и поэтому имеет единственное решение $\tilde{p}_k \equiv 0, k = 1, 2, \dots, n^2 + n$, на любом конечном промежутке, содержащем точку x_1 . Отсюда и следует $p_i^1 \equiv p_i^2, i = 1, 2, \dots, n$.

Вычислительный центр
СО АН СССР

Поступило
5.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Романов В. Г., Обратные задачи для дифференциальных уравнений, Спецкурс для студентов Новосибирского гос. ун-та, Новосибирск, изд-во НГУ, 1973.

- [2] М а т в е е в Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Высшая школа», 1973.
- [3] С а н с о н е Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., ИЛ, 1953.
- [4] Т р и к о м и Ф., Дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1962.
- [5] Х а р т м а н Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
- [6] З а б р е й к о П. П., К о ш е л е в А. И., К р а с н о с е л ь с к и й М. А., М и х л и н С. Г., Р а к о в щ и к Л. С., С т е ц е н к о В. Я., Интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.