Пусть $r=0$. Используя (8), (9), (10), находим

$$|S(x-S_{r+1};t)| \le d_{12}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln\ln N + 2d_8\int_0^{1/N}\frac{\omega(x,t)\,dt}{t\ln(c/t)},\, r=0,$$

в силу (5) имеем

$$|S(x-S_{r+1};t)| \le (d_{12}+2d_8\cdot d_1)\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln\ln N,\; r=0. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует требуемая оценка

$$V_N(H_\omega^r) \le \sup_{x\in H_\omega^r}\|S(x-S_{r+1};t)\| \le \frac{d_{13}\cdot\ln\ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1 и свойства интерполяционных сплайнов первого порядка, легко доказывается

Т е о р е м а 2. Квадратурная формула

$$S(x;t) \approx S(S_N^1 x;t),\; -1<t<1,$$

где $S_N^1 x = S_N^1(x,t)$ – сплайн первого порядка, интерполирующий функцию $x(t)$ в узлах (6), оптимальна по порядку на классе $F=H_\omega^r$ при $r=0$, $r=1$ и любых модулях непрерывности $\omega=\omega(\delta)$, $0<\delta<2$.

Л и т е р а т у р а

1. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.– Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980.– 232 с.

П.М.Зиновьев, Ф.Ф.Майер

УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИСКОМОГО КОНТУРА

В теории обратных краевых задач (ОКЗ) (см. [1, гл.I; 2, § 33]) важное место занимает исследование однолистности их решения. Для спрямляемых контуров этой проблеме посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [3, § 3]). Менее изучена однолистная разрешимость ОКЗ в случае, когда искомый контур проходит через бесконечно удаленную точку. Постановку и решение таких задач дал М.Т.Нужин [4]. Напомним, что в плоскости z требуется определить область $\mathfrak{D}_z$, ограниченную бесконечной кривой L_z, и аналитическую в $\mathfrak{D}_z$ функцию $w(z)$, если на границе области заданы значения этой функции

$$w(z)\Big|_{z\in L_z} = w(s) = u(s) + i\,v(s), \qquad (1)$$

где $|s|$ – дуговая абсцисса контура, причем знак s указывает направление отсчета от некоторой фиксированной точки.

Получим условия однолистности решения таких ОКЗ в виде ограничений на данные функции $u(s)$ и $v(s)$, что по терминологии Л.А.Аксентьева [5] относится к сильной проблеме однолистной разрешимости ОКЗ. При этом мы рассмотрим два подхода.

I. Один из первых результатов в сильной проблеме однолистности получил Ф.Г.Авхадиев [6] при исследовании внешних ОКЗ. Мы применим его подход к изучению однолистной разрешимости ОКЗ, решения которых обладают симметрией сдвига.

Область $\mathfrak{D}$ называется областью с симметрией сдвига на вектор $a \neq 0$, если вместе с каждой точкой $z \in \mathfrak{D}$ точка $z+a \in \mathfrak{D}$. Функция $f(z)$, определенная в области $\mathfrak{D}$, называется функцией с симметрией сдвига, если $f(z+a) = f(z) + b$, $b \neq 0$.

Пусть граничные значения (I) искомой функции удовлетворяют условию

$$w(s+t) = w(s) + T, \quad t > 0, \; T \neq 0. \qquad (2)$$

Можно показать, что в этом случае решением ОКЗ является область с симметрией сдвига и функция с симметрией сдвига в этой области. Не ограничивая общности, в равенстве (2) T можно считать положительной величиной. В плоскости $w = u + iv$ проведем вертикальные прямые $u=0$ и $u=T$. Первую сверху точку пересечения прямой $u=0$ с заданным контуром L_w обозначим через A, а самую верхнюю точку пересечения прямой $u=T$ с L_w – через B. Пусть $\mathfrak{D}_{w_0} \subset \mathfrak{D}_w$ есть область, ограниченная прямыми $u=0, u=T$ и контуром L_W между точками A и B (длину этой части L_W будем обозначать через l_{AB}). С помощью функции $w=\varphi(\zeta)$, $\zeta=\xi+i\eta$, отобразим полуполосу $\mathcal{D}_\zeta=\{\zeta : \operatorname{Im}\zeta>0,\ 0<\operatorname{Re}\zeta<2\pi\}$ на область $\mathcal{D}_{W_0}$ с таким соответствием точек: $0\longleftrightarrow 0$, $T\longleftrightarrow 2\pi$, $\infty\longleftrightarrow\infty$. Заметим, что $\varphi(i\eta+2\pi)=\varphi(i\eta)+T$, откуда

$$\varphi'(i\eta+2\pi)=\varphi'(i\eta). \tag{3}$$

Предположим, что выполняется условие

$$|\arg e^{i\delta}\varphi'(\xi)|\leq \alpha\pi/2,\ 0<\alpha<1,\ |\delta|<\alpha\pi/2. \tag{4}$$

Тогда область $\mathcal{D}_W$ будет достижима извне углами раствора $(1-\alpha)\pi$, причем биссектрисы этих углов составляют с положительным направлением вещественной оси угол $\delta-\pi/2$.

С помощью функции $\zeta=-i\ln\tau$ отобразим единичный круг $E=\{\tau : |\tau|<1\}$ с разрезом по положительной части вещественной оси на полуполосу $\mathcal{D}_\zeta$ и введем функцию $F(\tau)=\varphi'(-i\ln\tau)/\varphi'(i\infty)=$ $=(2\pi/T)\varphi'(-i\ln\tau)$ $(F(0)=1)$, значения которой на верхнем и нижнем берегах разреза в силу (3) совпадают. Таким образом, функция $F(\tau)$ является регулярной в E, а условие (4) для $F(\tau)$ запишется в виде $|\arg F(\tau)+\delta|\leq\alpha\pi/2$. По принципу симметризации А.Бернстейна [7]

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta\leq\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|F_0(re^{i\theta})|^p d\theta,\quad \tau=re^{i\theta},$$

для любого $p>0$, где $F_0(\tau)=[(1+\tau)/(1-\tau)]^\alpha$ – отображение круга E на угол $\{\Delta : |\arg\Delta|<\alpha\pi/2\}$. Учитывая, что

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|F_0(re^{i\theta})|^p d\theta=\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|^{\alpha p}d\theta=2\int_0^{\pi}\operatorname{ctg}^{\alpha p}\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{\cos(\alpha p\pi/2)},$$

и возвращаясь к функции $\varphi(\zeta)$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi}|\varphi'(\xi)|^p d\xi\leq\left(\frac{T}{2\pi}\right)^p\frac{\pi}{\cos(\alpha p\pi/2)},\quad 1<p<1/\alpha. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $s(\zeta)=\ln\frac{dz}{dw}(\varphi(\zeta))$. Пусть

$$P(\sigma)=(-1/2)\ln[u'^2(s)+v'^2(s)]=\operatorname{Re}\ln(dz/dw)\big|_{w\in L_W}=\operatorname{Re}s(\xi).$$

Найдем, при каких ограничениях на коэффициент N в условии

$$|P(\sigma_1)-P(\sigma_2)| \le N\,|\sigma_1-\sigma_2|\,,\quad 0\le\sigma_1,\sigma_2<\ell_{AB}\,, \tag{6}$$

решение рассматриваемой ОКЗ будет однолистным. Имеем

$$|\operatorname{Re} s(\zeta_1)-\operatorname{Re} s(\zeta_2)| \equiv |\operatorname{Re}\ln z'(w_1)-\operatorname{Re}\ln z'(w_2)| \equiv |P(\sigma_1)-P(\sigma_2)| \le$$

$$\le N|\sigma_1-\sigma_2| = N\left|\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}|\varphi'(\zeta)|\,d\zeta\right| \le N\left|\int_0^{2\pi}|\varphi'(\zeta)|^p d\zeta\right|^{1/p}|\zeta_1-\zeta_2|^{1-1/p}.$$

Здесь мы применили неравенство Гельдера. Учитывая (5), получим

$$|\operatorname{Re} s(\zeta_1)-\operatorname{Re} s(\zeta_2)| \le \frac{NT}{2\pi}\cdot\frac{\pi^{1/p}}{\left(\cos\frac{\alpha p\pi}{2}\right)^{1/p}}\,|\zeta_1-\zeta_2|^{1-1/p}.$$

Теперь на основании точных оценок из [8] имеем

$$|\operatorname{Im} s(\zeta)| \equiv |\arg z'(w)| \le \frac{NT}{2\pi}\cdot\frac{\pi^{1/p}}{\left(\cos\frac{\alpha p\pi}{2}\right)^{1/p}}\,M(1-1/p)\,, \tag{7}$$

где $M(\nu)=\frac{2^\nu}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\tau^\nu}{\sin\tau}\,d\tau$. Заметим, что здесь мы использовали оценки, которые справедливы в единичном круге E. Но они останутся в силе и в полуполосе $\mathcal{D}_\xi$, так как достаточно рассмотреть отображение $\xi=-i\ln\tau$ и учесть, что $s(\xi+2\pi)= = s(\xi)$.

Принимая во внимание оценку [8] $M(\nu)\le(2^{\nu+1}G)/(\pi\nu)$, $G\approx 0{,}916$ — постоянная Каталана ([9, с.21]), и неравенство $\left(\cos\frac{\alpha p\pi}{2}\right)^{1/p}\ge 1-\alpha p$, придем к неравенству

$$|\arg z'(w)| \le \frac{2NTG}{\pi^2}\cdot\frac{(\pi/2)^{1/p}}{(1-1/p)(1-\alpha p)}\,.$$

Определяя минимум правой части, когда $1<p<1/\alpha$, получим

$$|\arg z'(w)| \le NTG\,\pi^{-1}\left(1-\sqrt{\alpha}\right)^{-2}. \tag{8}$$

Пусть $f(\xi)=z(\varphi(\xi))$ - функция, отображающая полуполосу $\mathcal{D}_\xi$ на один период искомой области. Тогда $\arg f'(\xi)= =\arg z'(w)+\arg\varphi'(\xi)$. Функция $f(\xi)$, а следовательно, и $z(w)$, будет однолистной, если выполняется условие [10] $|\arg e^{i\delta}f'(\zeta)|\le\pi/2$, $0\le\zeta\le 2\pi$. Поскольку $|\arg e^{i\delta}f'(\zeta)|\le \le|\arg z'(w)|+|\arg e^{i\delta}\varphi'(\zeta)|$, то с использованием оценок (4) и (8) получим, что однолистность $z(w)$ будет обеспечена, если

$$N \le \pi^2(1-\alpha)(1-\sqrt{\alpha})^2/(2TG). \qquad (9)$$

Выражая ограничения (4) и (6) через начальные данные, получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Пусть граничные значения искомой функции $w(s)=u(s)+i v(s)$ удовлетворяют условию (2). Решение ОКЗ будет однолистным, если выполняются условия

а) $|\operatorname{arctg}[v'(s)/u'(s)]+\delta| < \alpha\pi/2$, $0<\alpha<1$, $|\delta|<\alpha\pi/2$;

б) $\left|\dfrac{u''(s)u'(s)+v''(s)v'(s)}{[u'^2(s)+v'^2(s)]^{3/2}}\right| \le N$,

где N удовлетворяет условию (9).

З а м е ч а н и е 1. Аналогичное условие однолистности получено в работе [11]. Можно показать, что эти условия не следуют одно из другого.

2. Применим теперь другой подход к исследованию сильной проблемы однолистности, который развит Л.А. Аксентьевым и П.Л.Шабалиным в [11]. Этот подход основывается на построении условий вида

$$\sup_{w\in D_w}\left\{\rho^{-1}(D_w,w)\,|z''(w)/z'(w)|\right\} \le A,\quad A=A(D_w), \qquad (10)$$

где $\rho(D_w,w)$ – коэффициент гиперболической метрики области D_w относительно точки $w\in D_w$ для функций $z(w)$, аналитических в некоторых классах областей D_w. Дело в том, что частным случаем условия (10) является условие однолистности в виде

$$-A_1 \le \operatorname{Re}\ln z'(w) \le A_2,\ A_1+A_2 \le \pi A(D_w)/2,\ w\in D_w, \qquad (11)$$

которое сводится к (10) на основе принципа гиперболической метрики [12, с.326]. Последнее же условие нетрудно обеспечить по начально заданным функциям $u(s)$ и $v(s)$, ибо неравенство

$$-A_1 \le \operatorname{Re}\ln z'(w)\Big|_{w\in L_w} = -(1/2)\ln[u'^2(s)+v'^2(s)] \le A_2 \qquad (12)$$

в силу принципа максимума для гармонических функций равносильно условию (11).

Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$ кривых L_w (или областей $\mathfrak{D}_w$), который введем следующим образом.

Определение. Будем говорить, что контур $L_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$ (или область $\mathfrak{D}_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$), если при некоторых вещественных α и γ, $0 \le \alpha < 1$, $0 < \gamma < 2\pi$, выполняются условия:

1) $w=0 \in L_w$, $w=\infty \in L_w$;

2) $\left|\arg \dfrac{w'(s)}{w^2(s)}\right| \le \dfrac{\alpha\pi}{2}$;

3) $\operatorname{Re}\left[i e^{i\gamma} w(s)\right]^{\pi/\gamma} \ge 0$.

Исследуем геометрические свойства области $\mathfrak{D}_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$. Осуществляя преобразование $\omega = -1/w$, получим область $\mathfrak{D}_\omega$, граница которой проходит через точку $\omega=\infty$ и имеет параметрическое уравнение $\omega=\omega(s)=-1/w(s)$, причем выполняется условие $|\arg \omega'(s)| \le \alpha\pi/2$. Поэтому [11] область $\mathfrak{D}_\omega$ достижима извне углами раствора 2β, $\beta=(1-\alpha)\pi/2$, биссектрисы которых параллельны мнимой оси. Следовательно, внешность (внутренность) кривой $L_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$ может быть покрыта луночками с вершинами в точках $w=0$ и $w=w(s)$ и внутренним углом 2β, симметричными относительно окружности, проходящей через эти точки и ортогональной вещественной оси. Кроме того, области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{D}_w$ принадлежит угол раствора γ с биссектрисой $[0, i\infty)$ в силу пункта 3) определения.

Теорема 2. Пусть функция $z(w)$ регулярна в области $\mathfrak{D}_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$, $\lim\limits_{w\to\infty} [z(w)/w] > 0$. Если

$$\sup_{w\in\mathfrak{D}_w} \left\{ \rho^{-1}(\mathfrak{D}_w, w)\left|z''(w)/z'(w)\right| \right\} \le A,$$

где $A=A(\beta,\gamma)=\frac{2\beta}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\min(\gamma,\pi)}{4}$, то функция $z(w)$ однолистна в $\overline{\mathfrak{D}}_w$.

Доказательство теоремы проведем по методу Л.Альфорса [13, с.119]. При этом можно считать, что L_w – аналитическая кривая, а $z(w)$ – аналитическая в $\overline{\mathfrak{D}}_w$ функция. Как показано в работе [11], в плоскости $\omega=\mu+i\nu$ граница L_ω области $\mathfrak{D}_\omega=\{\omega: -1/\omega \in \mathfrak{D}\}$ имеет уравнение $\nu=\psi(\mu)$, где

функция $\psi(\mu)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале; там же найден явный вид квазиконформного отражения $\tilde{\lambda}(\omega)$ области $\mathcal{D}_\omega$ относительно кривой $L_\omega : \tilde{\lambda}(\omega) = \bar{\omega} + 2i\psi(\mu)$.
В плоскости w функция $\tilde{\lambda}(\omega)$ индуцирует квазиконформное отражение относительно кривой L_w по закону $\lambda(w) = -1/\tilde{\lambda}(-1/w)$.
Вычисления дают

$$\lambda_w(w) = -\frac{\lambda^2(w)}{w^2}\tilde{\lambda}_\omega(\omega) \quad , \quad \lambda_{\bar{w}}(w) = -\frac{\lambda^2(w)}{w^2}\tilde{\lambda}_{\bar{\omega}}(\omega),\ \omega = -1/w,$$

поэтому с учетом оценок из [II] получаем

$$|\lambda_w| \le \left|\frac{\lambda}{w}\right|^2 \operatorname{ctg}\beta \ , \quad |\lambda_{\bar{w}}| \le \left|\frac{\lambda}{w}\right|^2 \frac{1}{\sin\beta} \ . \tag{13}$$

Построим функцию

$$g(w) = \begin{cases} z(w) & , w \in \mathcal{D}_w , \\ z \circ \lambda(w) + (w - \lambda(w))\, z' \circ \lambda(w) & , w \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_w . \end{cases}$$

В силу условия $\lim\limits_{w \to \infty} z(w)/w > 0$ функция $g(w)$ переводит всякую последовательность точек, сходящуюся к бесконечности, в такую же. Для комплексного отклонения $g_{\bar{w}}/g_w$ в области $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_w$ имеет место оценка

$$\left|\frac{g_{\bar{w}}}{g_w}\right| \le \frac{|w-\lambda|\,|\lambda_{\bar{w}}|\,|(z''/z')\circ\lambda|}{1 - |w-\lambda|\,|\lambda_w|\,|(z''/z')\circ\lambda|} \ . \tag{14}$$

Нам необходимо показать, что $|g_{\bar{w}}/g_w| < 1$ для $w \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_w$. Тогда $g(w)$ – непрерывное отображение плоскости на себя, конформное в $\mathcal{D}_w$ и квазиконформное в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_w$. Отсюда в силу квазиконформности $g(w)$ во всей плоскости (ибо L_w – квазиокружность) по теореме о монодромии получим, что $g(w)$ – гомеоморфизм.

Убедимся теперь в справедливости неравенств

$$|w - \lambda(w)|\, \rho(\mathcal{D}_w, \lambda(w)) \left|\frac{\lambda(w)}{w}\right| \le \frac{\pi}{2\beta}, \left|\frac{\lambda(w)}{w}\right| \le \operatorname{ctg}\frac{\min(\gamma, \pi)}{4}, w \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_w . \tag{15}$$

Обозначим через G_ω угол раствора 2β с биссектрисой $[\omega, \operatorname{Re}\omega - i\infty)$, где $\omega \in L_\omega$, а через G'_w – луночку, соответствующую области G_ω при отображении $w = -1/\omega$. В силу инвариантности гиперболической метрики относительно конформного отображения имеем

$$\rho\left(G'_w, \lambda(w)\right) = \frac{1}{|w'(\omega)|}\, \mathring{\rho}\left(G_\omega, \omega\right), \quad w = -1/\omega .$$

Учитывая, что коэффициент гиперболической метрики угла раствора 2β в точке, лежащей на биссектрисе и отстоящей от вершины угла на расстоянии x, равен $\pi/(4\beta x)$, и используя свойства невозрастания величины $\rho(G'_w, \lambda)$ при расширении области G'_w, получаем

$$|w-\lambda(w)|\,\rho\left(\mathcal{D}_w, \lambda(w)\right)\left|\frac{\lambda(w)}{w}\right| \le |w-\lambda(w)|\,\rho\left(G'_w, \lambda(w)\right)\left|\frac{\lambda(w)}{w}\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\tilde{\lambda}(\omega)}\right| \cdot |\tilde{\lambda}(\omega)|^2 \frac{\pi}{4\beta\left[\operatorname{Im}\tilde{\lambda}(\omega)-\psi(\mu)\right]} \left|\frac{\omega}{\tilde{\lambda}(\omega)}\right| =$$

$$= |\tilde{\lambda}(\omega)-\omega| \cdot \frac{\pi}{4\beta\left[\operatorname{Im}\tilde{\lambda}(\omega)-\psi(\mu)\right]} = \frac{\pi}{2\beta} .$$

Для обоснования второго неравенства в (15) зафиксируем μ и оценим

$$\Delta(\nu) = \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2+(\nu-2\psi(\mu))^2} = \left|\frac{\omega}{\tilde{\lambda}(\omega)}\right|^2 = \left|\frac{\lambda(w)}{w}\right|^2, \quad \omega = \mu + i\nu .$$

Пусть $0<\gamma\le\pi$. Тогда, очевидно, $\psi(\mu)\le 0$. Средствами дифференциального исчисления нетрудно показать, что $\Delta(\nu)$ убывает на интервале $\nu_1<\nu<\nu_2$, где $\nu_{1,2} = \psi(\mu)\pm\sqrt{\psi^2(\mu)+\mu^2}$, и возрастает на остальных интервалах вещественной оси. Поэтому

$$\max_\nu \Delta(\nu) = \Delta(\nu_1) = \frac{\mu^2+\left[\psi(\mu)-\sqrt{\psi^2(\mu)+\mu^2}\right]^2}{\mu^2+\left[\psi(\mu)+\sqrt{\psi^2(\mu)+\mu^2}\right]^2} .$$

Поскольку $L_w \in \mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$, то в силу пункта 3) определения класса $\mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$

$$\psi(\mu) \ge -K\mu\cdot\operatorname{sign}\mu, \quad K = \operatorname{ctg}(\gamma/2) .$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\lambda(w)}{w}\right| \le \sqrt{\max_\nu \Delta(\nu)} \le \sqrt{\frac{\mu^2+\left(\sqrt{\mu^2+K^2\mu^2}+K\mu\right)^2}{\mu^2+\left(\sqrt{\mu^2+K^2\mu^2}-K\mu\right)^2}} =$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{1+K^2}+K}{\sqrt{1+K^2}-K}}\Bigg|_{K=ctg\frac{\gamma}{2}} = ctg\frac{\sigma}{4},$$

что и требовалось показать. При $\gamma \geqslant \pi$ вычисления приводят к оценке $\Delta(\nu) \leqslant \Delta(-\infty)=1$.

Подставляя оценки (13) и (15) в (14), получим $|g_{\bar{w}}/g_w|<1$, $w\in \mathbb{C}\setminus\mathfrak{D}_w$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Т е о р е м а 3. ОКЗ построения бесконечного контура L_z однолистно разрешима, если с точностью до перемещения функции $u(s)$ и $v(s)$ определяют контур L_w класса $\mathfrak{M}_{\alpha,\gamma}$ и выполняется условие $\rho_1 \leqslant u'^2(s)+v'^2(s) \leqslant \rho_2$, причем

$$\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} < 2\beta\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\min(\gamma,\pi)}{4}.$$

З а м е ч а н и е 2. В пункте 1) определения необязательно, вообще говоря, требовать принадлежность точки $w=\infty$ контуру L_w, при этом теорема 2 остается в силе. Поэтому теорема 2 применима и в случае построения конечного контура L_z.

Авторы искренне благодарны профессору Л.А.Аксентьеву за внимание к работе и ценные советы.

Литература

1. Т у м а ш е в Г.Г., Н у ж и н М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения.- 2-е изд., перераб. и доп.- Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965.- 333 с.

2. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи.- 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Наука, 1977. - 640 с.

3. А к с е н т ь е в Л.А., И л ь и н с к и й Н.Б., Н у ж и н М.Т., С а л и м о в Р.Б., Т у м а ш е в Г.Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения. - В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ.- М.: ВИНИТИ, 1980, т.18, с.67 - 103.

4. Н у ж и н М.Т. Отдельные случаи обратных краевых задач.- Учен.зап. Казан.ун-та, 1953, т.113, кн.10, с.3 - 8.

5. А к с е н т ь е в Л.А. Об однолистной разрешимости обратных краевых задач.- В сб.: Тр.семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, вып.10, с.11 - 24.

6. А в х а д и е в Ф.Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах.- В сб.: Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, вып. 10, с. 3-10.

7. Baernstein A. Integrals means, univalent functions and cirkular symmetrization. — Acta Math., 1975, v. 133, p. 139-169.

8. А к с е н т е ь в Л.А. Точные оценки гармонических в круге функций.- Изв.вузов. Матем., 1968, № 3, с.3 - 8.

9. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- 4-е изд.,перераб. - М.: Физматгиз, 1962. - 1100 с.

10. А к с е н т ь е в Л.А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации. - УМН, 1959, т.14, вып.4, с.133 - 140.

11. А к с е н т ь е в Л.А., Ш а б а л и н П.Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение.- Изв.вузов. Матем., 1983, № 2, с. 5 - 14.

12. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - 2-е изд. - М.: Наука, 1966.- 628 с.

13. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям.- М.: Мир, 1969.- 183 с.

А.А.Золотарев

О КОНУСЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1 ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА

Пусть φ - точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. В данной работе доказывается, что конус $L_1(\varphi)^+$ положительных элементов пространства $L_1(\varphi)$, построенного А.Н.Шерстневым и Н.В.Труновым в работах [1 - 4], совпадает с замыканием конуса $\mathcal{M}^+$ положительных элементов