Р. Ф. Шамоян, О мультипликативных свойствах произведений Бляшке в некоторых классах голоморфных в круге функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2003, номер 2, 80–82

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.518

Р.Ф. ШАМОЯН

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

1. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ — единичный круг, $T = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ — его граница, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, $m_2(z)$ и $m(t)$ — нормированные меры Лебега соответственно в круге D и на его границе T, X и Y — подпространства $H(D)$. Далее, пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < |z_k| < 1$, — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $|z_k| < |z_{k+1}|$, $k \in N$, $B(z, \{z_k\})$ — соответствующее произведение Бляшке [1].

Определение. Скажем, что произведение Бляшке $B(z, \{z_k\}) = B(z)$ порождает ограниченный оператор

$$T_B : (T_B f)(z) = \int_T f(rt) B(\overline{t} w) dm(t), \quad z = rw,$$

который действует из X в Y (или является мультипликатором из X в Y), если для любой функции $f \in X$ функция $T_B f \in Y$.

В случае, когда Q — произвольная голоморфная в круге (или поликруге) D функция, полное описание тех Q, для которых оператор T_Q действует ограниченно из X в Y, где X и Y — различные пары пространств (классы Харди H^p, $0 < p < 1$, пространства со смешанной нормой) голоморфных в круге (поликруге) функций, было дано в [2]–[4].

Цель статьи — нахождение необходимых и достаточных условий на $B(z, \{z_k\})$, в частности, в терминах последовательностей нулей $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $B(z, \{z_k\})$, при которых оператор T_B является ограниченным оператором из X в Y.

Отметим, что связи между тейлоровскими коэффициентами, ростом средних $M_p(B^{(m)}, r)$, где

$$M_p(f, r) = \int_T |f(rt)|^p dm(t), \quad r \in (0, 1), \quad f \in H(D), \quad 0 < p < \infty,$$

и распределением нулей $\{z_k\}$ произведений Бляшке исследовались в работах многих авторов (напр., [5], [6]).

2. Для изложения основных результатов статьи приведем

Определение ([1]). Скажем, что

1) произведение Бляшке $B(z, \{z_k\})$ с нулями $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ является интерполяционным (обобщенно интерполяционным), если

$$\delta(B) = \inf_j |B'(z_j)|(1 - |z_j|) > 0 \quad (\delta_\gamma(B) = \inf_j |B'(z_j)|(1 - |z_j|)^\gamma > 0, \quad \gamma > 0);$$

2) последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ ($|z_k| \uparrow 1$) удовлетворяет условию Карлесона (C), если $\inf\limits_j \prod\limits_{k \neq j} \frac{|z_k - z_j|}{|z_j - \overline{z}_k|} > 0$, и условию Ньюмана ($N$), если $\sup\limits_{k \geq 0} \frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|} \leq \gamma$, где $\gamma < 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00992.

В дальнейшем через $\widehat{B}(n)$ будем обозначать n-й коэффициент Тейлора функции $B(z,\{z_k\})$, и говорить, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN) или (CN) [6], если она представима в виде конечного объединения последовательностей, удовлетворяющих условиям (N) и (C) соответственно. Обозначим "весовые" пространства Харди и Бергмана–Джрбашяна в единичном круге D [3] через

$$H_\alpha^p(D)=\left\{f\in H(D):\sup_{r\in(0,1)}M_p(f,r)(1-r)^\alpha<\infty,\ 0<\alpha,p<\infty\right\},\quad H_o^p=H^p(D),$$

$$A_\alpha^p(D)=\left\{f\in H(D):\int_D|f(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_2(z)<\infty,\ 0<p<\infty,\ -1<\alpha<\infty\right\}.$$

Далее запись $T\in\widetilde{B}(X,Y)$, где X и Y — подпространства $H(D)$, означает, что T — ограниченный оператор, действующий из X в Y.

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{2}<s\le1$, $\alpha=\beta+1$, $2\le q\le\infty$, $0<t\le2$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) $T_B\in\widetilde{B}(A_{s/p+s-2}^s(D),\ H^p(D))$ *для некоторого* p, $1\le p$, $\frac{1}{s}-\frac{1}{p}<1$;

2) $\widehat{B}(k)=O(\frac{1}{k})$;

3) $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (WN);

4) $T_B\in\widetilde{B}(H_\alpha^q(D),\ H_\beta^t(D))$.

Теорема 2. a) *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (CN), $1\le q<\infty$, $0<\alpha<\frac{1}{q}$, $\frac{1}{\alpha+1}<p\le1$. *Тогда* $T_B\in\widetilde{B}(A_{p(\alpha+1)-2}^p(D),\ H^q(D))$ *в том и только том случае, когда* $1-|z_k|=O\big(k^{-\frac{1}{1-\alpha q}}\big)$.

b) *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *некасательно сходится к* 1,

$$\frac{1}{\alpha+1}<p\le1,\quad \alpha\in\left(\frac{1}{2q},\frac{1}{2}\right),\quad 1\le q<\infty.$$

Тогда $T_B\in\widetilde{B}(A_{p(\alpha+1)-2}^p(D),\ H^q(D))$ *в том и только том случае, если* $1-|z_k|=O\big(k^{-\frac{\alpha q}{1-\alpha q}}\big)$.

Для формулировки следующих двух утверждений напомним [1], что функция $\varphi\in H^\infty(D)$ называется внутренней, если $|\varphi(\xi)|=1$ при почти всех $\xi\in T$, при этом почти всюду существует предел $\varphi(\xi)=\lim_{r\to1-0}\varphi(r\xi)$. Далее $\widehat{\varphi}(n)$ — коэффициент Тейлора функции φ, а через $\Lambda_A^\alpha(D)$ $(0<\alpha\le1)$ обозначим известные классы Липшица–Зигмунда [1] в круге D.

Теорема 3. *Пусть* φ — *внутренняя функция,* $\frac{1}{p}-1<s<\frac{1}{q}$, $p\in(0,1]$. *Тогда следующие условия равносильны*:

$$1)\ \ T_\varphi\in\widetilde{B}(H_{s+1-1/p}^p(D),\ H^p(D));\qquad 2)\ \ \sum_{n=0}^{\infty}|\widehat{\varphi}(n)|^2n^{sp}<\infty.$$

Теорема 4. a) *Пусть* $f\in H^2(D)$, $B(z,\{z_k\})$ — *интерполяционное произведение Бляшке,* $\overline{\widehat{B}(k)}=\widehat{B}(k)$, *последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (WN). *Тогда следующие условия равносильны*:

$$1)\ \ T_Bf\in\Lambda_A^\alpha,\quad 0<\alpha\le1;\qquad 2)\ \ \sup_j M_\infty(f,|z_j|)(1-|z_j|)^{1-\alpha}<\infty.$$

b) *Пусть* $f\in\overline{H^2(D)}$, $B(z,\{z_k\})$ — *обобщенно интерполяционное произведение Бляшке,* $\delta_\gamma(B)>0$, $\gamma\ge4$, $\overline{\widehat{B}(k)}=\widehat{B}(k)$, *последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (WN). *Тогда следующие условия равносильны*:

$$1)\ \ T_Bf\in A_\alpha^1,\quad \alpha\in(-1,\infty);\qquad 2)\ \ \sup_j M_\infty(f,|z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha+3}<\infty.$$

Отметим здесь, что доказательства сформулированных выше утверждений существенным образом опираются на методы, примененные при доказательстве основного результата работы [2] и результаты работ [6] и [7].

Литература

1. Garnett J.B. *Bounded analytic functions.* – Academic Press. – Orlando, Fla, 1981. – 356 p.
2. Шамоян Р.Ф. *О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге* // Укр. матем. журн. – 2000. – № 10. – С. 1405–1415.
3. Yevtic M, Pavlovic M. *Coefficient multipliers on spaces of analytic functions* // Acta Sci. Math. – 1998. – V. 64. – P. 531–545.
4. Шамоян Р.Ф. *Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и теоретико-множественные вложения пространств типа Харди–Соболева–Джрбашяна* // Изв. НАН Армении. – 2000. – Т. 34. – № 4. – С. 43–59.
5. Ahern P. *The mean modulus and the derivative of an inner function* // Indiana Univ. Math. J. – 1979. – V. 29. – P. 311–348.
6. Вербицкий И.Э. *О коэффициентах Тейлора и модулях непрерывности произведений Бляшке* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1982. – Т. 107. – С. 27–36.
7. Вербицкий И.Э. *Внутренние функции, пространства Бесова и мультипликаторы* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276. – № 1. – С. 11–14.

Брянский государственный университет

Поступили
первый вариант 13.06.2000
окончательный вариант 07.10.2002