Дискретная математика

том 21 выпуск 3 * 2009

УДК 519.857

Оптимальные пути в ориентированных графах и собственные векторы в max-$\oplus$ системах

© 2009 г. В. Д. Матвеенко

В задачах исследования операций и математической экономики возникают аналоги линейного оператора, где операции сложения и умножения чисел заменены соответственно на взятие максимума и некоторую бинарную операцию $\otimes$. Ранее изучались, в основном, два примера (и их обобщения), где в качестве $\otimes$ выступают сложение и минимум. В статье вводится в рассмотрение два других примера, где $\otimes$ — это сложение с дисконтированием (известное по экономической модели Рамсея–Касса–Купманса) и минимум с дисконтированием. Для исследования всех четырех примеров предлагается метод, в основе которого лежат операции над характеристическими парами путей в ориентированном графе. Характеристическая пара путей определена как пара чисел, одно из которых представляет собой вес пути (он определен посредством операции $\otimes$), а другой — число дуг пути. Основное внимание уделяется вычислению и свойствам собственного вектора оператора, он представляет собой функцию-значение Беллмана для соответствующей оптимизационной задачи о путях на графе.

1. Введение

В задачах исследования операций и математической экономики возникают аналоги линейного оператора, где операции сложения и умножения чисел заменены на некоторые другие бинарные операции $\oplus$ и $\otimes$ на числовом множестве X. Цель статьи — расширить класс имеющих прикладной интерес примеров и предложить методы исследования, применимые как к традиционным, так и к новым примерам.

Обычно в литературе рассматриваются следующие два примера, в которых $\oplus = \max$ (а также их аналоги с операцией min). Через $\mathbf{0}$ обозначается нулевой элемент относительно операции $\otimes$, то есть $g \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes g = \mathbf{0}$ для каждого $g \in X$.

Пример 1. Пусть $\otimes$ — сложение чисел, $X = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $\mathbf{0} = -\infty$. (При мультипликативной записи $X = \mathbf{R}_+$, операция $\otimes$ представляет собой обычное умножение, $\mathbf{0} = 0$). Этот пример, известный как схема динамического программирования, изучался, в частности, в [1–8]. В [5, 6] указаны приводящие к нему задачи исследования операций, такие, как выбор оптимального расписания работы станков и задача управления лесным хозяйством. Аналогичным образом записывается модель экономического развития [9].

Пример 2. Пусть $\otimes$ — операция взятия минимума. Известны два варианта этого примера (см. [10–13]). В так называемой нечеткой алгебре вектор $x \in X$ интерпретируется как вектор нечетких характеристик системы, и предполагается, что $X \in [0, 1]$, $\mathbf{0} = 0$. Например, в [10] компоненты вектора x представляют собой симптомы болезни, а матрица A, на которую умножается (в смысле операций $\otimes = \min$, $\oplus = \max$) вектор x, отражает определенный метод лечения. В другом варианте теории, алгебре узких мест, $X = (-\infty, +\infty)$, элемент $\mathbf{0}$ отсутствует.

Конкретизация множества X в примере 2 обычно оказывается несущественной: большинство результатов сохраняется. Мы при рассмотрении примера 2 будем считать, что $X = \mathbf{R}_+$, $\mathbf{0} = 0$.

В этой статье наряду с примерами 1, 2 будем рассматривать еще два примера, в которых также $\oplus = \max$.

Пример 3. Операция $\otimes$ определяется следующим образом: $g \otimes h = g + \beta h$, где $g, h \in X$, $X = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in (0, 1)$ — заданное число (дисконтирующий множитель), $\mathbf{0} = -\infty$. Пример 3 соответствует схеме с дисконтированием [14], которая возникает в экономике (вариант модели Рамсея, см., напр., [15]), в финансовых расчетах и в исследовании операций (см., напр., гл. 11 в [16]).

Пример 4. Операция $\otimes$ определяется как $g \otimes h = \min\{g, \delta h\}$, где $X = \mathbf{R}_+$, $\delta > 1$ — заданное число, $\mathbf{0} = 0$. Пример 4 развивает пример 2 и может служить моделью ситуации, когда цель состоит в выборе траектории с максиминном доходом (то есть в том, чтобы избежать периода низких доходов), но при этом более отдаленный по времени будущий провал дохода воспринимается в момент принятия решения как менее существенный по сравнению с более близким по времени.

Элементы степенной матрицы $A^{\otimes t}$ (где степень определена в смысле операций max, $\otimes$) имеют вполне определенный смысл, существенный для приложений. В примере 1 элемент (i, j) степенной матрицы представляет собой значение задачи о построении в соответствующем матрице A ориентированном графе t-шагового пути, ведущего из вершины i в вершину j и обладающего максимальным суммарным весом, в примере 2 — значение задачи о максиминном пути, в примере 3 — о пути с максимальной суммарной дисконтированной полезностью, в примере 4 — о максиминном пути с дисконтированием.

Собственные векторы так же, как в обычной алгебре матриц, играют центральную роль для понимания структуры рекуррентных последовательностей, получаемых умножением матрицы на вектор, начиная с заданного начального вектора.

Рядом авторов предложены весьма общие математические конструкции, обобщающие примеры 1 и 2, они однако не могут быть непосредственно применены к примерам 3 и 4. Так, например, в [17, 18] рассматривается конструкция эндоморфизма полумодуля над полукольцом, обобщающая ситуацию примера 1. Однако наличие предположения о коммутативности операции $\otimes$ делает результаты работ [17, 18] неприменимыми к примерам 3, 4, а принятое там условие сокращения (из $a \otimes b = a \otimes c$, $a \neq \mathbf{0}$ следует равенство $b = c$) не соответствует примерам 2, 4. В [19], доказывая обобщенную теорему Перрона–Фробениуса, авторы опираются на свойство однородности ($A \otimes (\lambda \otimes b) = \lambda \otimes (A \otimes b)$, где A — матрица, λ — число, b — вектор, $\lambda \otimes b = (\lambda \otimes b_1, \lambda \otimes b_2, \ldots, \lambda \otimes b_n)'$, штрих – знак транспонирования), которое не выполняется для примеров 3, 4. В [20] предполагается ассоциативность операции $\otimes$, которая также не имеет места в примерах 3, 4.

В настоящей статье предлагается подход, применимый для анализа всех четырех примеров. Основную роль играют понятия характеристической пары и произведения характеристических пар, они вводятся в разделе 2. В разделе 3 перечислены основные свойства характеристических пар, которыми обладают все четыре примера и которые определяют структуру собственных векторов. В разделе 4 определено некоторое конечное множество бесконечных траекторий (класс K) и описано построение с его помощью собственного вектора. В разделе 5 получены условия единственности собственного вектора, доказано, что построенный собственный вектор является для примеров 3, 4 единственным, а для примера 2 максимальным. В разделе 6 с общих позиций обсуждаются известные алгоритмы вычисления максимального собственного вектора для примера 2 и предлагается алгоритм вычисления собственного вектора для примера 4. В разделе 7 для того же примера рассматривается задача построения множества всех собственных векторов. В разделе 8 дается определение левого собственного вектора, применимое для всех четырех примеров, и устанавливается роль левого собственного вектора в примере 3.

2. Основные понятия

Пусть задана матрица A размера $n \times n$, элементы a_{ij} которой принадлежат некоторому числовому множеству X, возможно, расширенному путем включения элемента $-\infty$. На множестве X определена бинарная операция $\otimes$, причем существует нулевой элемент $\mathbf{0}$.

Пусть a, b — n-мерные векторы с элементами из X. Их произведением называется число

$$a \otimes b = \max_{j=1,\dots,n} \{a_j \otimes b_j\}.$$

Заметим, что в примерах 3 и 4 произведение векторов (как и произведение чисел) не обладает ни коммутативностью, ни ассоциативностью.

Произведением матрицы A на вектор b называется n-мерный вектор $A \otimes b = c$ с элементами

$$c_i = \max_{j=1,\dots,n} \{a_j \otimes b_j\}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Пусть B — матрица размера $n \times n$. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $A \otimes B = C$ с элементами

$$c_{ij} = \max_{k=1,\dots,n} \{a_{ik} \otimes b_{kj}\}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Если T — натуральное число, то T-й степенью матрицы A называется матрица $A^{\otimes T} = A \otimes \dots \otimes A$, элементы которой равны

$$a_{ij}^{(T)} = \max_{i_0=i, i_1, \dots, i_{T-1}, i_T=j} a_{i_0 i_1} \otimes a_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_{T-1} i_T}, \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

При отсутствии ассоциативности, как обычно, операции выполняются, начиная справа.

Матрице A соответствует ориентированный граф $G = \langle M, N \rangle$ с множествами вершин $M = \{1, \dots, n\}$ и дуг $N = \{(i, j): i, j \in M,\ a_{ij} \neq \mathbf{0}\}$ с весами a_{ij}. Конечная последовательность $\{i_0, i_1, \dots, i_T\}$ называется T-шаговой (i_0, i_T)-траекторией или T-звенным (i_0, i_T)-путем, если $(i_k, i_{k+1}) \in N$, $k = 0, 1, \dots, T-1$. T-шаговая траектория называется элементарной, если все ее вершины $i_0, i_1, \dots, i_T$ различны. Аналогично, бесконечной траекторией с началом i_0 называется последовательность $\{i_0, i_1, \dots\}$ такая, что $(i_k, i_{k+1}) \in N$, $k = 0, 1, \dots$. Контуром называется T-шаговая траектория, начало и конец которой совпадают. Контур $\{i_0, i_1, \dots, i_T = i_0\}$ называется элементарным, если его вершины $i_0, i_1, \dots, i_{T-1}$ различны.

Будем предполагать, что граф G является вполне связным, то есть для любой пары вершин (i, j) существует (i, j)-путь. Как видно из (1), это предположение эквивалентно следующему: для каждой пары индексов (i, j) существует такое натуральное число T, что элемент (i, j) матрицы $A^{\otimes T}$ отличен от нулевого элемента, то есть $a_{ij}^{(T)} \neq \mathbf{0}$. Также эквивалентным является предположение о неразложимости матрицы A: не существует такого подмножества индексов S, что $a_{ij} = \mathbf{0}$ при всех $i \notin S$, $j \in S$.

Весом T-звенного пути $s = \{i_0, i_1, \dots, i_T\}$ будем называть величину

$$c_s = a_{i_0 i_1} \otimes \ldots \otimes a_{i_{T-1} i_T}.$$

Через $\nu(i, j, T)$ обозначим значение задачи о нахождении максимального веса T-звенного (i, j)-пути. Как видно из (1), элемент (i, j) матрицы $A^{\otimes T}$ равен $\nu(i, j, T)$.

Собственным вектором матрицы A будем называть вектор x, удовлетворяющий уравнению

$$x = A \otimes x, \tag{2}$$

то есть такой, что

$$x_i = \max_{j=1,\dots,n} \{a_{ij} \otimes x_j\}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

В частности, в примере 3 это равенство принимает вид

$$x_i = \max_{j=1,\dots,n} \{a_{ij} + \beta x_j\}, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

и представляет собой рекуррентное соотношение динамического программирования, определяющее функцию-значение Беллмана.

В литературе (см., напр., [20]) встречается и иное определение: вектор y называется собственным вектором, а λ — собственным числом матрицы A, если

$$\lambda \otimes y = A \otimes y, \tag{3}$$

где $\lambda \otimes y = (\lambda \otimes y_1, \dots, \lambda \otimes y_n)'$. Для примеров 2, 3, 4 естественным представляется определение (2). В примере 1 имеется простая связь между указанными двумя определениями. Матрица A называется определенной [6], если ее собственное число равно 0. Посредством простого преобразования (вычитания собственного числа λ из всех весов) произвольная матрица A может быть сведена к определенной (см., напр., [4, 6, 7]), при этом равенство (3) заменяется на (2).

В примерах 1 и 2 собственный вектор матрицы A, вообще говоря, не единствен. Нахождению множества всех собственных векторов в примере 2 посвящен раздел 7.

Ниже $\oplus$ представляет собой максимум чисел или покоординатный максимум векторов.

В каждом из примеров 1–4 выполняется свойство дистрибутивности:

$$g \otimes (h \otimes p) = (g \otimes h) \oplus (g \otimes p), \qquad g, h, p \in X.$$

Укажем некоторые свойства, которые вытекают из дистрибутивности.

Предложение 1. *При наличии дистрибутивности, если x, y — собственные векторы матрицы A, то их сумма $x \oplus y$ также является собственным вектором.*

Доказательство очевидно.

Упорядоченное множество, состоящее из k различных векторов $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, назовем собственным циклом порядка k матрицы A, если

$$x^{(s+1)} = A \otimes x^{(s)}, \quad s = 1, \dots, k-1; \quad x^{(1)} = A \otimes x^{(k)}.$$

Предложение 2. *При наличии дистрибутивности, если векторы $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ составляют собственный цикл порядка k матрицы A, то их сумма $x^{(1)} \oplus \ldots \oplus x^{(k)}$ является собственным вектором.*

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} A \otimes (x^{(1)} \oplus \ldots \oplus x^{(k)}) &= (A \otimes x^{(1)}) \oplus \ldots \oplus (A \otimes x^{(k)}) \\ &= x^{(2)} \oplus \ldots \oplus x^{(k)} \oplus x^{(1)} = x^{(1)} \oplus \ldots \oplus x^{(k)}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 3. *При наличии дистрибутивности, если векторы $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ составляют собственный цикл порядка k матрицы A, то каждый из них является собственным вектором матрицы $A^{\otimes k}$ и не является собственным вектором матрицы $A^{\otimes l}$ ни для какого $l < k$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, докажем второе утверждение.

Если $x^{(i)} = A^{\otimes l} \otimes x^{(i)}$, $l < k$, то

$$x^{(i)} = \begin{cases} x^{(i+l)}, & i \leqslant k - l, \\ x^{(i+l-k)}, & i > k - l, \end{cases}$$

то есть не все векторы в наборе $x^{(1)} \ldots x^{(k)}$ различны, что противоречит определению собственного цикла порядка k. Предложение доказано.

Выполнения ассоциативности можно добиться, если перейти от множества X к множеству $X \times \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Характеристической парой назовем (a, k), где $a \in X$, $k \in \mathbf{N}$. В частности, характеристической парой T-звенного пути s с весом c_s назовем (c_s, T).

Пусть определена операция умножения характеристической пары на число, которая ставит в соответствие характеристической паре (a, k) и элементу $b \in X$ некоторый элемент $(a, k) \otimes b \in X$ так, что

$$(a, 1) \otimes b = a \otimes b.$$

Положим в примерах 1 и 2 $(a, k) \otimes b = a \otimes b$; в примере 3 $(a, k) \otimes b = a + \beta^k b$; в примере 4 $(a, k) \otimes b = \min\{a, \delta^k b\}$.

Определим произведение двух характеристических пар следующим образом:

$$(a_1, k_1) \otimes (a_2, k_2) = ((a_1, k_1) \otimes a_2, k_1 + k_2).$$

Видим, что характеристическая пара T-звенного пути $s = \{i_0, \ldots, i_T\}$ равна

$$(c, T) = (a_{i_0 i_1}, 1) \otimes \ldots \otimes (a_{i_{T-1} i_T}, 1).$$

Пусть (a, k) — характеристическая пара. Ее t-й степенью, $t \in \mathbf{N}$, назовем характеристическую пару

$$(a, k)^{\otimes t} = (a, k) \otimes \ldots \otimes (a, k).$$

Рассмотрим контур $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1\}$ с числом дуг, равным k. Вершина i_1 фиксирована в качестве начальной. Вес (одного обхода) контура равен

$$c_\sigma(i_1) = (a_{i_1 i_2}, 1) \otimes \ldots \otimes (a_{i_{k-2} i_{k-1}}, 1) \otimes a_{i_{k-1} i_k}.$$

Характеристической парой контура σ является $(c_\sigma(i_1), k)$. Характеристическая пара пути, состоящего из r полных обходов контура σ, равна $(c_\sigma(i_1), k)^{\otimes r}$. Весом бесконечного обхода контура σ естественно назвать (в случае его существования в множестве X) предел

$$\nu_\sigma(i_1) = \lim_{r\to\infty} (c_\sigma(i_1), k)^{\otimes r} \otimes c_\sigma(i_1).$$

3. Свойства характеристических пар

Перечислим некоторые свойства, которые выполняются в каждом из примеров 1–4. Мы увидим далее, что эти свойства гарантируют существование собственного вектора.

1. Монотонность. Пусть $a_1, a_2, b \in X$, $k \in \mathbf{N}$. Если $a_1 \leqslant a_2$, то

$$(a_1, k) \otimes b \leqslant (a_2, k) \otimes b, \qquad (b, k) \otimes a_1 \leqslant (b, k) \otimes a_2.$$

В частности, $a_1 \otimes b \leqslant a_2 \otimes b$, $b \otimes a_1 \leqslant b \otimes a_2$.

2. Невозрастание при умножении на нулевую характеристическую пару. Если $b \in X$, $b \geqslant 0$, $k \in \mathbf{N}$, то $(0, k) \otimes b \leqslant b$.

Из свойств 1, 2 следует, что если $a, b \in X$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, $k \in \mathbf{N}$, то

$$(a, k) \otimes b \leqslant b. \tag{4}$$

3. Однородность. Пусть $a, b, c \in X$, $k \in \mathbf{N}$ — натуральное число. Если $(a, k) \otimes b = c$, то $(\lambda a, k) \otimes \lambda b = \lambda c$ для любого числа $\lambda > 0$.

Лемма 1. *Пусть выполняются свойства монотонности и однородности, и числа $a_1, a_2, s \in X$, $k \in \mathbf{N}$ таковы, что $sa_1 > 0$, $a_2 a_1 > 0$, $a_1 = (s, k) \otimes a_1$, $a_2 > (s, k) \otimes a_2$. Тогда $a_1 < a_2$.*

Доказательство. По свойству однородности

$$a_1 \frac{a_2}{a_1} = \left(s\frac{a_2}{a_1}, k\right) \otimes a_1 \frac{a_2}{a_1},$$

то есть

$$a_2 = \left(s\frac{a_2}{a_1}, k\right) \otimes a_2.$$

Следовательно,

$$\left(s\frac{a_2}{a_1}, k\right) \otimes a_2 > (s, k) \otimes a_2.$$

Отсюда с учетом монотонности следует, что $s\frac{a_2}{a_1} > s$, и значит, $a_2 > a_1$. Лемма доказана.

4. Ассоциативность произведения характеристических пар. Пусть $a_1, a_2, a_3 \in X$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{N}$. Тогда

$$((a_1, k_1) \otimes (a_2, k_2)) \otimes (a_3, k_3) = (a_1, k_1 \otimes)((a_2, k_2) \otimes (a_3, k_3)).$$

5. Существование веса бесконечного обхода контура. В примере 1 с определенной матрицей вес бесконечного обхода контура $\nu_\sigma(i_1)$ всегда принимает одно из двух возможных значений 0 или **0**. В примере 3

$$\nu_\sigma(i_1) = \frac{c_\sigma(i_1)}{1-\beta^k}.$$

В примерах 2 и 4

$$\nu_\sigma(i_1) = c_\sigma(i_1).$$

4. Траектории класса K и собственный вектор матрицы A

Определим класс K как множество траекторий, включающее

(1) бесконечные обходы элементарных контуров (с указанием вершины начала обхода) и

(2) траектории, состоящие из элементарного пути и бесконечного обхода элементарного контура (с указанием вершины начала обхода).

В случае 1 вес траектории равен весу бесконечного обхода контура. В случае 2 определим вес траектории как $(c_s, k_s) \otimes \nu_\sigma(i)$, где c_s, k_s — соответственно, вес и число дуг элементарного пути s, i — вершина, в которой заканчивается путь s и с которой начинается обход элементарного контура σ, $\nu_\sigma(i)$ — вес бесконечного обхода контура σ.

Например, пусть в примере 1

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 1 \\ -1 & -\infty \end{pmatrix}.$$

Имеются две траектории класса K с началом в вершине 1. Одна из них представляет собой бесконечный обход контура, начиная с вершины 1, ее вес равен 0. Другая траектория состоит из дуги $(1,2)$ и бесконечного обхода контура, начиная с вершины 2; вес этой траектории равен 1. Имеются также две траектории класса K с началом в вершине 2, их веса равны 0 и -1.

В классе K конечное число траекторий. Следовательно, для каждой вершины $i \in M$ в этом классе существует траектория с началом i, обладающая максимальным весом $V(i)$; всякую такую траекторию будем называть оптимальной. Таким образом, определена функция $V(i)$, $i \in M$.

Теорема 1. *Вектор V с координатами $V(i)$, $i \in M$, является собственным вектором матрицы A.*

Доказательство. Докажем, что для любой дуги (i, j) графа $\langle M, N\rangle$ выполняется неравенство

$$V(i) \geqslant a_{ij} \otimes V(j). \tag{5}$$

Предположим противное: существует дуга (i, j), для которой

$$V(i) < a_{ij} \otimes V(j). \tag{6}$$

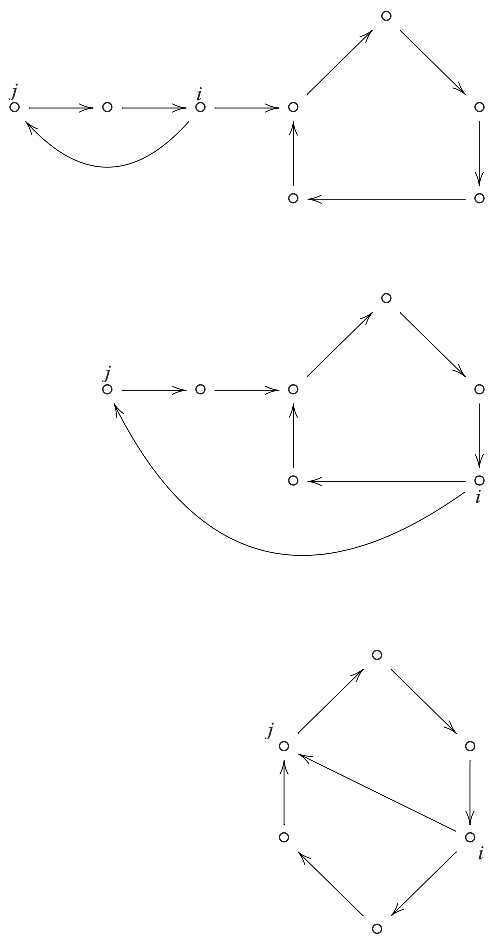

Рис. 1.

Пусть τ — оптимальная траектория класса K с началом j, а $\tilde{\tau}$ — траектория, составленная из дуги (i, j) и траектории τ. Правая часть неравенства (6) представляет собой вес траектории $\tilde{\tau}$.

Если τ не проходит через вершину i, то $\tilde{\tau} \in K$, и неравенство (6) противоречит определению функции V.

Пусть теперь τ проходит через вершину i. Вершина i может лежать на участке траектории τ до выхода на контур или на контуре σ. Возможные случаи показаны на рис. 1.

Обозначим через ξ участок траектории τ от вершины j до i, пусть он имеет вес $s(\xi)$ и число дуг $l(\xi)$. Этот участок не имеет самопересечений, поэтому контур, образованный добавлением дуги (i, j), элементарен. Пусть $\bar{v}(i)$ — вес участка (хвоста) траектории τ, начинающегося в вершине i. Тогда

$$V(j) = (s(\xi), l(\xi)) \otimes \bar{v}(i).$$

Поскольку $\bar{v}(i) \leqslant V(i)$, с учетом монотонности имеет место неравенство

$$V(j) \leqslant (s(\xi), l(\xi)) \otimes V(i).$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$V(j) < (a_{ij}, 1) \otimes (s(\xi), l(\xi)) \otimes V(i). \tag{7}$$

Здесь $(a_{ij}, 1) \otimes (s(\xi), l(\xi))$ представляет собой характеристическую пару элементарного контура σ, образованного дугой (i, j) и (j, i)-путем ξ. Пусть $\nu_\sigma(i)$ — вес бесконечного обхода контура σ, начиная с вершины i. Тогда

$$\nu_\sigma(i) = (a_{ij}, 1) \otimes (s(\xi), l(\xi)) \otimes \nu_\sigma(i). \tag{8}$$

Если $a_{ij} \otimes s(\xi) > 0$, то, как следует из определения величин $V(i)$ и $\nu_\sigma(i)$, выполняется неравенство $V(i) \geqslant \nu_\sigma(i) > 0$. Если $a_{ij} \otimes s(\xi) \leqslant 0$, то из (4) и (7) следует, что $V(i) < 0$, кроме того, $\nu_\sigma(i) < 0$. Равенство $a_{ij} \otimes s(\xi) = 0$ невозможно (оно влечет неравенство $\nu_\sigma(i) = 0 > V(i)$, противоречащее определению функции V).

Таким образом, величины $a_{ij} \otimes s(\xi)$, $\nu_\sigma(i)$, $V(i)$ имеют одинаковый знак. По лемме 1 из (7) и (8) вытекает неравенство $V(i) < \nu_\sigma(i)$, что противоречит определению функции V.

Полученное противоречие означает справедливость неравенства (5).

Пусть теперь (i, j) — дуга оптимальной траектории класса K с началом в вершине i. На этой дуге $V(i) = a_{\overline{ij}} \otimes V(\bar{j})$. Следовательно,

$$V(i) = \max_{j \in M}\{a_{ij} \otimes V(i)\}$$

при всех $i \in M$. Теорема доказана.

5. О единственности собственного вектора

Как уже отмечалось, из определения функции V следует, что для каждой вершины $i \in M$ и для каждого элементарного контура σ, содержащего вершину i, выполняется неравенство

$$V(i) \geqslant \nu_\sigma(i). \tag{9}$$

Введем в рассмотрение условие

$$\lim_{t\to\infty} (\nu_\sigma(i), t) \otimes V(i) = \nu_\sigma(i). \tag{10}$$

В примере 1 с определенной матрицей A, условие (10) справедливо, если единственным оптимальным контуром является петля. Этот случай часто встречается на практике. В примере 2 условия (9) и (10) эквивалентны. В примерах 3 и 4 равенство (10) выполняется автоматически.

Предложение 4. *Возможен не более чем один собственный вектор, удовлетворяющий условию* (10) *для любого* $i \in M$ *и для любого элементарного контура* σ*, содержащего* i.

Доказательство. Пусть V_i — собственный вектор, обладающий указанным свойством. Для любой вершины i можно указать траекторию τ класса K с началом i, для каждой дуги которой $(\bar{i}, \bar{j})$ выполняется равенство

$$V_1(\bar{i}) = a_{\bar{i}\,\bar{j}} \otimes V_1(\bar{j}).$$

В общем случае, траектория τ включает элементарный путь ξ из вершины i в некоторую вершину k и бесконечный обход некоторого контура σ, начиная с вершины k. Тогда, с учетом (10),

$$V_1(i) = (s(\xi), l(\xi)) \otimes \nu_\sigma(k),$$

то есть величина $V_1(i)$ равна весу траектории τ класса K с началом i.

Рассмотрим теперь произвольную траекторию τ_1 класса K с тем же началом i, пусть она включает элементарный путь ξ из вершины i в вершину k_1 и обход контура σ_1, начинающийся с вершины k_1. Поскольку V_1 — собственный вектор, для каждой дуги $(\bar{i}, \bar{j}) \in N$ выполняется соотношение $V_1(\bar{i}) = (a_{\bar{i}\bar{j}}, 1) \otimes V_1(\bar{j})$, и значит, с учетом условия (10),

$$V_1(i) = (s(\xi), l(\xi)) \otimes \nu_{\sigma_1}(k_1).$$

Следовательно, $V_1(i)$ представляет собой максимальный вес траектории класса K с началом i, и значит, $V_1(i) = V(i)$, $i \in M$. Предложение доказано.

Следствие 1. *В примерах* 3 *и* 4 *собственный вектор является единственным.*

Предложение 5. *В примере* 2 *собственный вектор V является максимальным, то есть для любого другого собственного вектора $\bar{V}$ выполняются неравенства $V(i) \geqslant \bar{V}(i)$, $i \in M$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.*

Доказательство. Для произвольной вершины i рассмотрим траекторию τ класса K с началом i такую же, как в доказательстве предложения 4. Пусть траектория τ включает элементарный путь ξ и обход контура σ, начинающийся с вершины k. Тогда

$$\bar{V}(i) = s(\xi) \otimes \bar{V}(k), \qquad \bar{V}(i) = c_\sigma(k) \otimes \bar{V}(k).$$

Поскольку $\otimes = \min$, отсюда следует, что $\bar{V}(i) \leqslant c_\sigma(k) = \nu_\sigma(k)$, и значит,

$$\bar{V}(i) = s(\xi) \otimes \nu_\sigma(k) \leqslant V(i), \qquad i \in M.$$

С учетом эквивалентности условий (9) и (10) из предложения 4 следует существование вершины i_1 и контура σ_1 таких, что $\bar{V}(i_1) < \nu_\sigma(i_1) \leqslant V(i_1)$. Предложение доказано.

6. Поведение рекуррентной последовательности $x^{(k+1)} = A \otimes x^{(k)}$ и построение собственного вектора

Рассмотрим последовательность векторов $\{x^{(k)}\}$, заданную рекуррентными соотношениями

$$x^{(k+1)} = A \otimes x^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Можно убедиться, что в примере 4, независимо от начального вектора $x^{(1)}$, последовательность стабилизируется, совпадая с некоторого момента с собственным вектором матрицы. Как показано в [7, 8], в примерах 1 (с определенной матрицей) и 3 аналогичное свойство имеет место, если подматрица, соответствующая дугам оптимальных контуров, неразложима и примитивна.

Для примера 2 известно, что, хотя при произвольном начальном векторе $x^{(1)}$ последовательность $\{x^{(k)}\}$ не обязана сходиться (возможны циклы), сходимость к максимальному собственному вектору имеет место, если в качестве начального вектора $x^{(1)}$ взять вектор, составленный из максимальных элементов строк матрицы A,

$$x_i^{(1)} = \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Этот факт связан со следующим свойством, которое справедливо для всех четырех примеров.

Предложение 6. *Пусть последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *определена рекуррентными соотношениями* (11)*, а начальный вектор* $x^{(1)}$ *составлен из максимальных элементов строк матрицы* A*. Тогда каждый вектор* $x^{(k)}$*,* $k = 2, 3, \dots$*, состоит из максимальных элементов строк матрицы* $A^{\otimes k}$*, то есть*

$$x_i^{(k)} = \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}^{(k)}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} &= \max_{j=1,\dots,n} \{(a_{ij}^{(k-1)}, k-1) \otimes x_j^{(1)}\} \\ &= \max_{j=1,\dots,n} \{(a_{ij}^{(k-1)}, k-1) \otimes \max_{s=1,\dots,n} a_{js}\} \\ &= \max_{s=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} \{(a_{ij}^{(k-1)}, k-1) \otimes a_{js}\} \\ &= \max_{s=1,\dots,n} a_{is}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Для примера 2 свойства последовательности $\{x^{(k)}\}$ уточняются следующим образом.

Предложение 7. *В примере* 2 *в условиях предложения* 6 *последовательность* $\{x^{(k)}\}$ *стабилизируется не позднее шага* n*, при этом* $x^{(k)} = V$*,* $k = n, n+1, \dots$*, где* V *— максимальный собственный вектор матрицы* A*.*

Доказательство. Пусть $i \in M$, и τ – траектория с началом i (T-шаговая или бесконечная), имеющая в своем составе хотя бы один контур. Вводной частью траектории τ назовем ее участок, который начинается в вершине i и заканчивается первой повторившейся вершиной. Заметим, что

– число дуг во вводной части не превышает n;

– всякая T-шаговая траектория при $T > n$ имеет вводную часть;

– если $\nu(\tau)$ — вес траектории τ, $\nu_{in}(\tau)$ — вес ее вводной части, $\bar{\nu}(\tau)$ — вес (бесконечной) траектории класса K с той же вводной частью, то

$$\nu(\tau) \leqslant \nu_{in}(\tau) = \bar{\nu}(\tau) \leqslant V(i);$$

– вес всякой траектории класса K совпадает с весом любого ее начального участка с числом дуг k, $k \geqslant n$.

Таким образом, величина $V(i)$ представляет собой максимум весов k-шаговых траекторий, $k \geqslant n$, с началом i, то есть

$$V(i) = \max_{k=n,n+1,\dots} \max_{s=1,\dots,n} a_{is}^{(k)},$$

и поэтому $x^{(k)} = V$, $k = n, n+1 \dots$, в силу предложения 6. Предложение доказано.

Введем в рассмотрение множества

$$I_{\min}(x^{(k)}) = \operatorname{Arg} \min_{i=1,\dots,n} x_i^{(k)} = \{s \colon x_s^{(k)} = \min_{i=1,\dots,n} x_i^{(k)}\}.$$

Предложение 8. *В примерах* 2 *и* 4 *в условиях предложения* 6, *если* $\bar{i} \in I_{\min}(x^{(1)})$, *то есть, если*

$$x_{\bar{i}}^{(1)} = a = \min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} a_{ij},$$

то

$$\bar{i} \in I_{\min}(x^{(k)}), \quad x_{\bar{i}}^{(k)} = a, \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Доказательство. Покажем, что при всех $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства $x_i^{(k)} \geqslant a$, $i = 1, \dots, n$, причем при $i \in I_{\min}(x^{(1)})$ имеют место равенства.

Базу индукции получаем при $k = 1$. Покажем, что если указанные свойства выполняются при некотором $k = s$, то они выполняются и при $k = s + 1$. Действительно,

$$x_i^{(s+1)} = \max_{j=1,\dots,n} (a_{ij} \otimes x_j^{(s)}) \geqslant \max_{j=1,\dots,n} (a_{ij} \otimes a) = (\max_{j=1,\dots,n} a_{ij}) \otimes a = a, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Если $\bar{i} \in I_{\min}(x^{(1)})$, то $\max_{j=1,\dots,n} a_{ij} = a$, и значит

$$x_{\bar{i}}^{(s+1)} = \max_{j=1,\dots,n} (a_{\bar{i}j} \otimes x_j^{(s)}) \leqslant a \otimes \max_{j=1,\dots,n} x_j^{(s)} = a,$$

следовательно,

$$x_{\bar{i}}^{(s+1)} = a = \min_{i=1,\dots,n} x_i^{(s+1)}.$$

Предложение доказано.

Для примера 2 в [10, 12, 13] предложен алгоритм вычисления максимального собственного вектора, менее трудоемкий по сравнению с непосредственным применением рекуррентного соотношения (11). Этот алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Положим $K = \{1, \dots, n\}$, $\tilde{b} = 0$.

Шаг 2. Вычислим значения $b_i = \max_{j \in K} a_{ij}$ при $i \in K$; вычислим $b = \min_{i \in K} b_i$ и положим $\tilde{I} = \{i \colon b_i = b\}$.

Шаг 3. Если $b > \tilde{b}$, то положим $\tilde{b} = b$.

Шаг 4. Положим $x_i^* = \tilde{b}$ при $i \in \tilde{I}$.

Шаг 5. Исключим из множества K индексы, входящие в множество $\tilde{I}$.

Шаг 6. Если $K = \varnothing$, то вычисление максимального собственного вектора x^* закончено. В противном случае перейдем к шагу 2.

На каждой итерации вычисляются оптимальные значения одного или нескольких элементов максимального собственного вектора. Обоснование этого алгоритма легко проводится на основе предложений 6–8.

Для вычисления собственного вектора в примере 4 можно предложить следующий алгоритм того же типа.

Шаг 1. Положим $K = \{1, \dots, n\}$, $L = \varnothing$.

Шаг 2. Вычислим значения $b_i = \max_{j \in K \cup L} a_{ij}$ при $i \in K$; вычислим $b = \min_{i \in K} b_i$, и положим $\tilde{I} = \{i : b_i = b\}$.

Шаг 3. Положим $x_i^* = b$ при $i \in \tilde{I}$.

Шаг 4. Исключим из множества K индексы, входящие в множество $\tilde{I}$.

Шаг 5. Если $K = \varnothing$, то вычисление максимального собственного вектора x^* закончено. В противном случае перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Вычислим значения

$$c_i = \min\{\max_{j \in \tilde{I}} a_{ij}, \delta b\}, \qquad i \in K.$$

Шаг 7. Включим в множество L новый индекс l. Положим $a_{il} = c_i$, $i \in K$. Перейдем к шагу 2.

7. Другие собственные векторы в примере 2

В примере 2, помимо максимального собственного вектора, представляет интерес множество всех собственных векторов. Например, в медицинской интерпретации (см. раздел 1) максимальный собственный вектор описывает наихудшее состояние больного, которое остается стабильным при данном методе лечения, а другие собственные векторы — другие стабильные состояния.

Лемма 2. *В примере* 2 *вектор x является собственным вектором матрицы A тогда и только тогда, когда*

(1) *для любой вершины i, $i = 1, \dots, n$, в графе G существует дуга (i, j) такая, что $a_{ij} \geqslant x_i$, $x_j \geqslant x_i$, и*

(2) *не существует дуги (i, j) такой, что $a_{ij} > x_i$, $x_j > x_i$.*

Утверждение непосредственно следует из определения собственного вектора.

Следствие 2. *Если x — собственный вектор матрицы A, то*

$$x_i \leqslant \max_{j=1,\dots,n} a_{ij}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_{\bar{i}} > \max_{j=1,\dots,n} a_{\bar{i}j}$ для некоторого индекса $\bar{i}$. Тогда нарушено первое условие леммы 2, и в силу этой леммы вектор x не является собственным, что противоречит условию.

Следующие три следствия были доказаны в [12] как самостоятельные теоремы.

Следствие 3. *Произвольный вектор $x = (\mu, \ldots, \mu)$ (тривиальный в терминологии* [12]*) при $0 \leqslant \mu \leqslant \min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}$ является собственным вектором матрицы A.*

Доказательство. Поскольку $\max_{j=1,\ldots,n} a_{ij} > \mu$ для любой вершины i, выполняется первое условие леммы 2. Второе условие леммы выполнено тривиально. В силу этой леммы, x является собственным вектором.

Следствие 4. *При $\mu > \min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} a_{ij}$ ни один вектор $x = (\mu, \ldots, \mu)$ не является собственным вектором матрицы A.*

Утверждение непосредственно вытекает из следствия 2.

Пусть фиксировано некоторое вещественное число μ. Пороговым графом $G(\mu)$ называется подграф с множеством дуг, состоящим из всех дуг множества N с весами $a_{ij} \geqslant \mu$.

Вершина i в некотором графе называется предциклической, если в данном графе существует путь с началом i, ведущий в какой-либо контур.

Следствие 5. *Если x — собственный вектор матрицы A, то каждая вершина $i = 1, \ldots, n$ является предциклической в пороговом графе $G(x_i)$.*

Доказательство. В силу леммы 2 выполняется ее первое условие, откуда следует существование траектории класса K с началом i, последовательность весов дуг которой не убывает, и при этом все веса не меньше x_i. Таким образом, вся траектория лежит в графе $G(x_i)$.

Теорема 2. *В примере* 2 *вектор x является собственным вектором матрицы A тогда и только тогда, когда выполняется следующее свойство: неравенство $x_i \geqslant \mu$ справедливо для тех и только тех индексов i, для которых в пороговом графе $G(\mu)$ имеется путь, ведущий из вершины i в вершину j такую, что $x_j \geqslant \mu$ и j принадлежит некоторому контуру графа $G(\mu)$.*

Доказательство. Пусть x — собственный вектор. Докажем необходимость в условии теоремы. Предположим, что $x_i \geqslant \mu$ для некоторого индекса i и числа μ. Тогда в силу первого условия леммы 2 существует траектория $\{i_k\}$ класса K с началом i, на которой $x_{i_k} \geqslant \mu$, $a_{i_k i_{k+1}} \geqslant \mu$, $k = 0, 1, \ldots$

Докажем достаточность условий теоремы. Предположим противное, пусть $x_i < \mu$. Тогда в графе $G(\mu)$ на (i, j)-пути можно указать дугу (i_k, i_{k+1}) такую, что $x_{i_k} < \mu$, $x_{i_{k+1}} \geqslant \mu$, $a_{i_k i_{k+1}} \geqslant \mu$, то есть $a_{i_k i_{k+1}} > x_{i_k}$, $x_{i_{k+1}} > x_{i_k}$. Это противоречит второму условию леммы 2, то есть сделанное предположение неверно, значит, $x_i \geqslant \mu$.

Пусть выполняется условие теоремы. Проверим условия леммы 2.

Докажем первое условие. Пусть i — некоторый индекс. Положим $\mu = x_i$. В силу условия теоремы в графе $G(\mu)$ имеется (i, j)-путь, для всех дуг которого $a_{i_k i_{k+1}} \geqslant \mu$, $x_{i_k} \geqslant \mu$. Следовательно, выполняется первое условие леммы 2.

Докажем второе условие леммы 2. Предположим противное, пусть в графе G существует дуга (i, j), для которой $a_{ij} > x_i$, $x_j > x_i$. Выберем μ так, что

$$x_i < \mu < \min\{a_{ij}, x_j\}. \tag{12}$$

Тогда в силу условия теоремы в графе $G(\mu)$ существует путь τ, ведущий из вершины j в такой контур σ, что $x_k \geqslant \mu$ для некоторой вершины $k \in \sigma$. Поскольку $a_{ij} > \mu$, в графе $G(\mu)$ имеется также (i, k)-путь. Следовательно, в силу достаточности в условии теоремы выполняется неравенство $x_i \geqslant \mu$, противоречащее (12), что означает справедливость второго условия леммы 2.

В силу леммы 2 вектор x является собственным вектором матрицы A. Теорема доказана.

Следствие 6. *Пусть x — собственный вектор матрицы A. Тогда, если σ — контур в пороговом графе $G(\mu)$, то либо $x_i \geqslant \mu$ для всех $i \in \sigma$, либо $x_i < \mu$ для всех $i \in \sigma$.*

Доказательство. Возможны два случая: либо $x_i < \mu$ для всех $i \in \sigma$, либо существует вершина $j \in \sigma$, для которой $x_j \geqslant \mu$. В последнем случае всякая вершина $i \in \sigma$ обладает свойством, составляющим правую часть свойства в теореме 2. Согласно теореме 2, $x_i \geqslant \mu$. Следствие доказано.

Теорема 2 и следствие 6 могут быть непосредственно использованы для построения множества всех собственных векторов матрицы A.

Пусть $\bar{\mu}$ — максимальное значение параметра μ, при котором в пороговом графе $G(\mu)$ существует контур. Будем рассматривать пороговые графы $G(\mu)$, постепенно уменьшая значение параметра μ, начиная с $\bar{\mu}$. При этом некоторым элементам x_i собственного вектора (каким именно, уточняется ниже) будет присваиваться значение μ. В каждый текущий момент будем называть помеченными вершины i, для которых уже определены значения x_i, а остальные вершины будем называть непомеченными.

Значения x_i устанавливаются по следующим правилам, которые вытекают из теоремы 2 и следствия 6.

(1) Если при текущем значении μ в графе $G(\mu)$ имеется дуга (i, j), ведущая из непомеченной вершины i в помеченную вершину j, то должно быть присвоено значение $x_i = \mu$.

    В частности, если в графе $G(\mu)$ имеется контур σ, некоторые, но не все вершины которого помечены, то все непомеченные вершины $i \in \sigma$ должны быть помечены с присвоением значения $x_i = \mu$.

(2) Если при текущем значении μ в графе $G(\mu)$ имеется контур σ, ни одна из вершин которого не помечена, то могут быть присвоены (или нет) значения $x_i = \mu$ для всех вершин $i \in \sigma$ одновременно.

(3) Переход к меньшему значению параметра μ производится, когда в графе $G(\mu)$ закончен перебор контуров с непомеченными вершинами, и не осталось ни одной дуги, ведущей из непомеченной вершины в помеченную.

Из теоремы 2 и следствия 6 вытекает, что каждый построенный вектор x является собственным вектором матрицы A и каждый собственный вектор может быть построен таким образом.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1{,}5 \end{pmatrix},$$

тогда $\bar{\mu} = 2$. Пороговый граф $G(2)$, как и все графы $G(\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 2$, содержит петлю $(1, 1)$. При каждом μ, если вершина 1 не помечена, может быть присвоено значение $x_1 = \mu$, после чего в графе $G(\mu)$ имеется дуга $(2, 1)$, ведущая из непомеченной вершины в помеченную, и должно быть присвоено значение $x_2 = \mu$. Таким образом, в множестве собственных векторов имеется семейство $x = (\mu, \mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 2$.

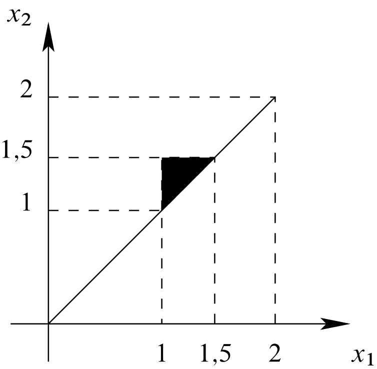

Рис. 2.

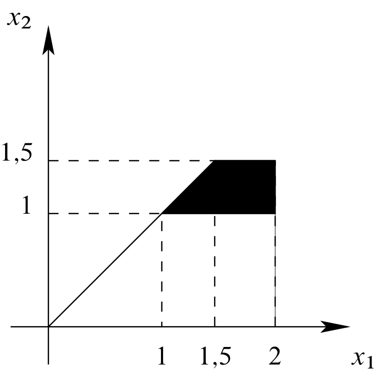

Рис. 3.

При $1 \leqslant \mu \leqslant 1{,}5$ граф $G(\mu)$ содержит петлю $(2, 2)$, поэтому, если вершина 2 не помечена, может быть присвоено значение $x_2 = \mu$. Вершину 1 при этом оставляем непомеченной, иначе будет получен собственный вектор из уже найденного выше семейства. Зафиксировав значение $x_2 = \mu$ (пометив вершину 2), изменяем другой параметр ν. При $1 \leqslant \nu \leqslant \mu$ может быть присвоено значение $x_1 = \nu$. В случае же, когда вершина $i = 1$, по мере уменьшения ν, все же осталась непомеченной, она должна быть помечена при $\nu = 1$, поскольку в графе $G(1)$ имеется дуга $(1, 2)$, ведущая из непомеченной вершины в помеченную. Таким образом, построено еще одно семейство собственных векторов $x = (\nu, \mu)$, $1 \leqslant \nu < \mu \leqslant 1{,}5$. Множество всех собственных векторов матрицы A изображено на рис. 2.

Пример 6. Множество собственных векторов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

изображено на рис. 3.

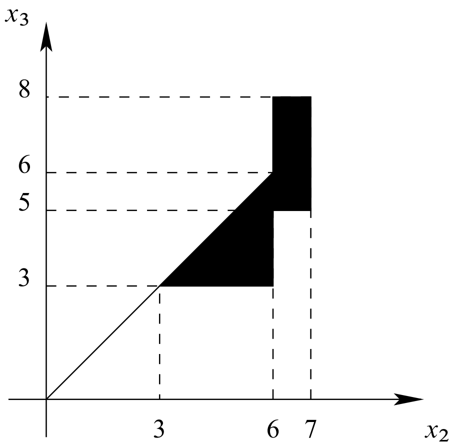

Рис. 4.

Пример 7. Множество собственных векторов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

состоит из следующих семейств:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} b & b & a & b & b \end{pmatrix}, \quad 5 \leqslant b \leqslant a \leqslant 7; \\
&\begin{pmatrix} a & a & b & a & a \end{pmatrix}, \quad a \in [6, 7],\ b \in (6, 8],\ a \leqslant b; \\
&\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \end{pmatrix}, \quad a \in [0, 7]; \\
&\begin{pmatrix} 5 & b & a & a & b \end{pmatrix}, \quad a \in [3, 5),\ b \in (5, 6]; \\
&\begin{pmatrix} b & b & a & a & b \end{pmatrix}, \quad 3 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5; \\
&\begin{pmatrix} b & c & a & b & c \end{pmatrix}, \quad 5 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant 6.
\end{aligned}$$

На рис. 4 изображена проекция этого множества на плоскость (x_2, x_3).

Помимо собственных векторов данная матрица A обладает также собственными циклами порядка 2, то есть имеются пары векторов x^1, x^2 такие, что $A \otimes x^1 = x^2$, $A \otimes x^2 = x^1$. Замечая, что каждый из таких векторов является собственным вектором матрицы $A^{\otimes 2}$, находим следующие семейства собственных циклов:

$$\begin{aligned}
&x^1 = \begin{pmatrix} a & b & a & a & c \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} a & c & a & a & b \end{pmatrix}, \quad 5 \leqslant a < b < c \leqslant 6; \\
&x^1 = \begin{pmatrix} b & b & a & b & c \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} b & c & a & b & b \end{pmatrix}, \quad 5 < c < b < a \leqslant 6; \\
&x^1 = \begin{pmatrix} 5 & c & a & a & b \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} b & b & a & a & c \end{pmatrix}, \quad 3 < a \leqslant b < 5 < c \leqslant 6; \\
&x^1 = \begin{pmatrix} c & c & a & a & b \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} b & b & a & a & c \end{pmatrix}, \quad 3 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5, \quad c \in (b, 6); \\
&x^1 = \begin{pmatrix} b & d & a & b & c \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} b & c & a & b & d \end{pmatrix}, \quad 5 < a < b < c < d < 6.
\end{aligned}$$

8. Левые собственные векторы

Левые собственные векторы наряду с правыми определяют структуру T-шаговых оптимальных траекторий (см. [7], где исследуется пример 1). В примерах 1, 2 и 4 естественно определить левый собственный вектор симметрично правому собственному вектору. Иначе обстоит дело в примере 3, там, как мы сейчас увидим, при естественном определении левого собственного вектора левое собственное число не равно правому.

Определение левого собственного вектора, пригодное для всех четырех примеров, сформулируем по аналогии с очевидным свойством левого собственного вектора в обычной алгебре: если p — левый собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ, то $\lambda^k pA = \lambda^{k+1} p$ при всех $k = 0, 1, \dots$

Если b — вектор (строка), A — матрица, через $(b, k) \otimes A$ обозначим вектор с элементами, равными $\max_j ((b_j, k) \otimes a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$.

Вектор p назовем левым собственным вектором (в смысле операций max, $\otimes$) матрицы A, а число μ — левым собственным числом, если

$$(\mu^k p, k+1) \otimes A = \mu^{k+1} p, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Предложение 9. *В примере 3 левое собственное число равно коэффициенту дисконтирования β.*

Доказательство. По определению,

$$\max_{i=1,\dots,n} \{\mu^k p_i + \beta^{k+1} a_{ij}\} = \mu^{k+1} p_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

следовательно,

$$\max_{i=1,\dots,n} \{p_i/\mu + (\beta/\mu)^{k+1} a_{ij}\} = p_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

при всех $k = 0, 1, \dots$

Если $\mu \neq \beta$, то при изменении k левая часть равенства изменяется (хотя бы для одного j, за исключением случая, когда $A = 0$), тогда как правая часть постоянна. Следовательно, $\mu = \beta$. Предложение доказано.

Следствие 7. *В примере 3 левый собственный вектор является решением уравнения $p \otimes A = \beta p$, то есть*

$$\max_{i=1,\dots,n} \{p_i + \beta a_{ij}\} = \beta p_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, в примере 3 левый собственный вектор представляет собой вторую функцию-значение (см. [14, 15]).

Предложение 10. *В примере 3, если p — левый собственный вектор, а $\bar{x}$ — правый собственный вектор, то*

$$p \otimes \bar{x} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим, что для любых n-мерных векторов s (строки) и x (столбца)

$$(s \otimes A, 2) \otimes x = s \otimes (A \otimes x). \tag{14}$$

Действительно, левая часть равна $\max_{i=1,\dots,n}\{\max_{j=1,\dots,n}\{s_i + \beta a_{ij}\} + \beta^2 x_j\}$, а правая часть есть $\max_{i=1,\dots,n}\{s_i + \beta \max_{j=1,\dots,n}\{a_{ij} + \beta x_j\}\}$. Эти величины совпадают.

Возьмем в качестве s левый собственный вектор p, а в качестве x — правый собственный вектор $\bar{x}$. Тогда левая часть (14) с учетом следствия 7 равна $(\beta p, 2) \otimes \bar{x} = \beta(p \otimes \bar{x})$, а правая часть равна $p \otimes \bar{x}$. Отсюда вытекает (13). Предложение доказано.

Исследуем поведение последовательностей $\{x^{(k)}\}$ и $\{p^{(k)}\}$, определенных рекуррентными соотношениями

$$x^{(k+1)} = A \otimes x^{(k)}, \quad p^{(k+1)} = p^{(k)} \otimes A, \quad k = 0, 1, \dots$$

Вспомним (см., напр., [21, 22]), что в обычной алгебре, если A — неразложимая примитивная матрица с неотрицательными элементами, α, $\bar{x}$, p — соответственно ее фробениусово собственное число, правый и левый фробениусовы собственные векторы такие, что

$$p\bar{x} = 1, \tag{15}$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^{-k} A^k = \bar{A}, \tag{16}$$

где

$$\bar{A} = \bar{x}\, p,$$

то есть элементы матрицы $\bar{A}$ равны $\bar{a}_{ij} = \bar{x}_i p_j$. Если последовательности $\{x^{(k)}\}$, $\{p^{(k)}\}$ определены равенствами

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}, \quad p^{(k+1)} = p^{(k)}A, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \alpha^{-k} x^{(k)} = \bar{A}^k x^{(0)} = (px^{(0)})\bar{x}, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha^{-k} p^{(0)} = p^{(0)} \bar{A}^k = (p^{(0)}\bar{x})p. \tag{18}$$

Таким образом, предельные векторы представляют собой правый и левый фробениусовы собственные векторы, нормированные, соответственно, множителями, зависящими от начальных состояний.

В [14] показано, что в примере 3 при упоминавшемся уже условии неразложимости и примитивности подматрицы, соответствующей дугам оптимальных контуров при достаточно больших k, аналогично (16),

$$A^{\otimes k} = (\bar{x}, k-1) \otimes p.$$

Отсюда следует, что

$$x^{(k)} = (A^{\otimes k}, k) \otimes x^{(0)} = (\bar{x}, k-1) \otimes (p, 1) \otimes x^{(0)} = \beta^{k-1}(p \otimes x^{(0)}) \boxplus \bar{x}, \tag{19}$$

$$p^{(k)} = p^{(0)} \otimes A^{\otimes k} = (p^{(0)}, 1) \otimes (\bar{x}, k-1) \otimes p = (p^{(0)} \otimes \bar{x})\beta^{(k)} \boxplus p. \tag{20}$$

Здесь символ $\boxplus$ означает, что число $\beta^{k-1}(p \otimes x^{(0)})$ в (19) и число $(p^{(0)} \otimes \bar{x})\beta^k$ в (20) прибавляются ко всем элементам вектора. Эти слагаемые аналогичны нормирующим множителям в (17) и (18). Заметим также, что равенство (15) аналогично (13).

Из (19) следует, что $x^{(k)} \to \bar{x}$ при $k \to \infty$, при этом, начиная с некоторого k, сходимость становится монотонной: если $p \otimes x^{(0)} > 0$ ($p \otimes x^{(0)} < 0$), то $x^{(k)} > \bar{x}$ (соответственно, $x^{(k)} < \bar{x}$) при всех достаточно больших k.

Список литературы

1. Беллман Р., *Динамическое программирование*. ИЛ, Москва, 1960.
2. Воробьев Н. Н., Экстремальная алгебра положительных матриц. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1967) **3**, 39–71.
3. Воробьев Н. Н., Экстремальная алгебра неотрицательных матриц. *Elektron. Inform.-verarb. Kybernetik* (1970) **6**, 303–312.
4. Романовский И. В., Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом. *Кибернетика* (1967), № 2, 66–78.
5. Романовский И. В., *Алгоритмы решения экстремальных задач*. Наука, Москва, 1977.
6. Cuninghame-Green R., *Minimax algebra*. Springer, Berlin, 1979.
7. Матвеенко В. Д., Оптимальные траектории схемы динамического программирования и экстремальные степени неотрицательных матриц. *Дискретная математика* (1990) **2**, №1, 59–71.
8. Матвеенко В. Д., О дискретных сублинейных и суперлинейных операторах. *Дискретная математика* (1998) **10**, №2, 87–100.
9. Matveenko V. D., Development with positive externalities: the case of the Russian economy. *J. Policy Modeling* (1995) **17**, №3, 207–221.
10. Sanchez E., Resolution of eigen fuzzy sets equations. *Fuzzy Sets Syst.* (1978) **1**, 69–74.
11. Butkovič P., Cechlárová K., Szabó P., Strong linear independence in bottleneck algebra. *Linear Algebra Appl.* (1987) **94**, 133–155.
12. Cechlárová K., Eigenvectors in bottleneck algebra. *Linear Algebra Appl.* (1992) **175**, 63–73.
13. Cechlárová K., Efficient computation of the greatest eigenvector in fuzzy algebra. *Tatra Mt. Math. Publ.* (1997) **12**, 73–79.
14. Матвеенко В. Д., Структура оптимальных траекторий дискретной детерминированной схемы с дисконтированием. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 100–114.
15. Матвеенко В. Д., Структура траекторий и вторая функция-значение в оптимизационных динамических системах с дисконтированием. *Автоматика и телемеханика* (1999), № 1, 26–34.
16. Вагнер Г., *Основы исследования операций*. Мир, Москва, 1973.
17. Дудников П. И., Самборский С. Н., *Эндоморфизмы полумодуля над полукольцом с идемпотентной операцией*, Препринт. ИМ АН УССР, Киев, 1987.
18. Дудников П. И., Самборский С. Н., Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией. *Изв. АН СССР, сер. матем.* (1991) **55**, №1, 93–109.
19. Маслов В. П., Колокольцев В. Н., *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*. Физматлит, Москва, 1994.
20. Zimmermann U., Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures. *Ann. Discrete Math.* (1981) **10**, 1–380.
21. Seneta E., *Nonnegative matrices. An introduction to theory and applications*. Allen & Unwin, London, 1973.
22. Ашманов С. А., *Введение в математическую экономику*. Наука, Москва, 1984.

Статья поступила 2.06.2005.