УДК 514.82; 514.76

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ*

Ю. Г. Лумисте

Среди областей теоретической физики, которые благодаря современным приложениям дали мощные стимулы развития методов дифференциальной геометрии, ведущее место принадлежит калибровочным теориям, основными математическими средствами которых являются главные и присоединенные расслоения и связности в них. Ниже будет освещено и систематизировано то новое, что принесли калибровочные теории в изучение этих средств. Основное внимание будет уделено построению вспомогательных расслоений и разработке правоинвариантного формализма: алгебры Ли правоинвариантных вертикальных векторных полей $\mathrm{cal}\, P$ вместо алгебры фундаментальных полей $\mathrm{fund}\, P$, соответствующих 1-форм как средств для истолкования «духов» Фаддеева—Попова и т. п.

§ 1. Связности и поле Янга — Миллса

Связности в дифференциальной геометрии возникли в работах Леви—Чивита (1917) и Г. Вейля (1920) о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии и в пространстве аффинной связности. Общий подход к связностям в расслоениях со структурной группой Ли сформировался в 1950-му году в работах В. В. Вагнера, Г. Ф. Лаптева, Эресмана, А. Картана и др. (см., например, исторический обзор в [11]).

В 1954 г. Янгом и Миллсом [38] был совершен переход от теории электродинамики Вейля (1929), основанной на принципе калибровочной инвариантности заряженного поля относительно группы $U(1)$, к более общему случаю взаимодействия изоспинов с группой Ли $G=SU(2)$. Частное дифференцирование

* В расширенном и дополненном виде излагается содержание пленарного доклада автора «Дифференциально-геометрические методы в калибровочных теориях» на VII Всес. геометр. конф. (Одесса, 18—19 сентября 1984 г.)

$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ по координатам пространства-времени M_4 заменялось оператором $\nabla_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, где A_μ принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{l}(G)$ группы G и составляют так называемое поле Янга—Миллса, обобщающее электромагнитное поле. В теории Вейля замена калибровки $\psi^\lambda(x) = \psi(x)\,e^{i\lambda(x)}$, где $\lambda(x)$ — комплексный параметр в $U(1)$, зависящий от $x \in M_4$, приводит к преобразованию $A_\mu^\lambda(x) = A_\mu(x) + i\partial_\mu\lambda(x)$. В теории Янга—Миллса аналогичная замена

$$\psi^g(x) = \mathscr{L}(g(x)^{-1})\,\psi(x), \tag{1.1}$$

где $g(x) \in G$ и $\mathscr{L}$ — некоторое левое представление, приводит к

$$A_\mu^g(x) = g(x)^{-1} A_\mu(x)\, g(x) + g(x)^{-1}\partial_\mu g(x). \tag{1.2}$$

Лагранжиан этой теории содержит член, составленный из величин $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, A_\nu]$, которые дают аналог тензора напряженности электромагнитного поля и преобразуются по закону

$$F_{\mu\nu}^g(x) = g(x)^{-1} F_{\mu\nu}(x)\, g(x). \tag{1.3}$$

Введение геометрического языка в теорию Янга—Миллса было подготовлено работой Утиямы [34] в 1956 г. и в значительной мере осуществлено в работе Лубкина [29], вышедшей в 1963 г. В первой из них построен общий аналитический подход к электромагнитному полю, к полю Янга—Миллса и к гравитационному полю, причем последнее трактуется, естественно, с помощью связности и ковариантного дифференцирования на пространственно-временном многообразии. Лубкин обобщил эти понятия с целью применить их и к общему подходу, не отмечая, что это было уже сделано представителями дифференциальной геометрии. Он независимо построил «расслоение представлений со связностью» для истолкования величин теории Янга—Миллса.

С 1964 г. стали появляться работы Н. П. Коноплева и др., в которых систематически развивается дифференциально-геометрическая интерпретация теории Янга—Миллса (см. литературу, указанную в [8], гл. III). Операторы ∇_μ трактуются как операторы ковариантного дифференцирования некоторой связности в расслоении, а величины A_μ и $F_{\mu\nu}$ как объекты связности Γ_μ и кривизны $R_{\mu\nu}$ в теории Г. Ф. Лаптева. Формулы (1.2) и (1.3) в их инфинитезимальном варианте отождествляются с дифференциальными системами для этих объектов по Лаптеву. Трактовки этих вопросов с помощью связностей в расслоенных пространствах дали в 1968—1970 гг. также Кернер, Траутман и др. (см. обзор [26]), применяя методику, разработанную в дифференциальной геометрии Эресманом, Чжэнем, Номидзу, Кобаяси и др.

Необходимость перехода к связностям в нетривиальных расслоениях показали в 1975 г. Ву и Янг (см. [36], исторический обзор в [37]). В этом же 1975 г. по идее А. М. Полякова были найдены инстантоны — решения вакуумных уравнений Янга—Миллса с автодуальной формой кривизны на сфере S_4 (см. [13], [14]). Эти работы открыли широкий путь к геометризации калибровочных теорий уже в глобальном подходе. Появились изложения нового направления Д. А. Попова, Чжо, Езава и Цзе, Майера и др., глубокие исследования Атьи, Зингера и др. Отметим некоторые работы за последние годы: [33], [21], [22], [24], [25], [26], [27]; в них можно найти более подробные указания на литературу. Теория связностей вошла прочно в математический арсенал теоретической физики, получая при этом новые стимулы развития.

§ 2. Группа калибровочных преобразований

Геометрическая трактовка калибровочных теорий основывается, как выяснилось, на понятии главного расслоения $\pi: P\to M$, причем применяются и присоединенные к нему расслоения [7]. Калибровочное преобразование (1.1) порождается локально некоторой функцией $g: U\to G$, где $U\subset M$. Для случая нетривиального расслоения, когда такая функция на всем M не существует, пришлось найти другой подход [21].

Диффеоморфизм $f: P\to P$ называется автоморфизмом главного расслоения $\pi: P\to M$ со структурной группой Ли G, если

$$f(pg)=f(p)g \tag{2.1}$$

для любых $p\in P$ и $g\in G$, и калибровочным преобразованием, если, кроме того,

$$\pi(f(p))=\pi(p). \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует существование диффеоморфизма $f_M: M\to M$ такого, что $\pi\circ f=f_M\circ\pi$, а из (2.2) следует, что $f_M=\mathrm{Id}_M$. Последнее свойство влечет, в силу того, что правое действие G на P свободное, существование такого гладкого отображения $g^f: P\to G$, что

$$f(p)=pg^f(p), \tag{2.3}$$

а из (2.1) вытекает

$$g^f(pa)=a^{-1}g^f(p)a. \tag{2.4}$$

Обратно, каждое калибровочное преобразование f восстанавливается однозначно по g^f.

Все автоморфизмы $f: P\to P$ составляют группу $\mathrm{Aut}\,P$, для которой π устанавливает гомоморфизм $\mathrm{Aut}\,P\to\mathrm{Diff}\,M$. Ядром гомоморфизма является группа всех калибровочных преобразований $\mathfrak{G}=\mathrm{Cal}\,P$. Для $f_1, f_2\in\mathfrak{G}$ из (2.3) следует

$$(f_2\circ f_1)(p)=f_2(pg^{f_1}(p))=p(g^{f_2}(p)g^{f_1}(p)),$$

т. е. $f_2f_1\in\mathfrak{G}$ задается отображением $p\mapsto g^{f_2}(p)g^{f_1}(p)$, где справа стоит произведение в G.

Функция $x \mapsto g(x)$, участвующая в (1.1), получается теперь локально на области $U \subset M$ с помощью локального сечения $\sigma: U \to P$ формулой $x \mapsto g^f(\sigma(x))$. Группа $(\mathrm{Cal}\, P)_U$ сужений элементов из $\mathrm{Cal}\, P$ на $\pi^{-1}(U)$ изоморфна группе $\mathfrak{G}_U$ G-значных функций на U.

База M имеет такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, что существуют сечения $\sigma_\alpha: U_\alpha \to P$. С помощью $p \mapsto (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$, где $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ определяется из $p = \sigma_\alpha(x)\varphi_\alpha(p)$, $x = \pi(p)$, задается диффеоморфизм $\pi^{-1}(U_\alpha)$ на $U_\alpha \times G$. На $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ возникают функции перехода $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ такие, что

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x), \tag{2.5}$$

причем из $p = \sigma_\alpha(x)\varphi_\alpha(p) = \sigma_\beta(x)\varphi_\beta(p)$ следует,

$$\varphi_\alpha(p) = \psi_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(p). \tag{2.6}$$

Калибровочное преобразование $f \in \mathfrak{G}$ задается набором функций $g^f_\alpha: U_\alpha \to G$, $g^f_\alpha(x) = g^f(\sigma_\alpha(x))$, которые на любом $U_\alpha \cap U_\beta \neq \neq \varnothing$ связаны формулой

$$g^f_\beta(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} g^f_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x), \tag{2.7}$$

вытекающей из (2.4) и (2.5). Группа $\mathfrak{G}$ равносильна, таким образом, набору групп $\mathfrak{G}_{U_\alpha}$, согласованных по (2.7).

Эта же формула (2.7) покажет, что набор функций $g_\alpha{}^f$ определяет сечение $g_M{}^f$ в присоединенном к P расслоении $P \times_G G = E_G(P)$ с типичным слоем G и с левым действием на нем группы G путем внутренних автоморфизмов: $L_a(g) = aga^{-1}$. Построение расслоения $E_G(P)$ и его сечения $g_M{}^f$ по формуле (2.7), принимающей вид

$$g^f_\alpha(x) = L_{\psi_{\alpha\beta}(x)}(g^f_\beta(x)),$$

можно провести, например, согласно [19] теореме 3.2.

Роль функции $x \mapsto g(x)$, участвующей в (1.1), принимает на себя сечение $g_M{}^f: M \to E_G(P)$, в случае нетривиального $\pi: P \to M$. При этом существует биекция между $\mathfrak{G} = \mathrm{Cal}\, P$ и пространством $\Gamma(E_G(P))$ этих сечений, устанавливаемая, например, с помощью набора функций $g_\alpha{}^f$ (см. также [26]).

§ 3. Алгебра Ли инфинитезимальных калибровочных преобразований

Векторное поле Z на P называется инфинитезимальным автоморфизмом главного расслоения $\pi: P \to M$, если порождаемая им локальная 1-параметрическая группа $(t, p) \mapsto f_t(p)$ удовлетворяет условию

$$f_t(pg) = f_t(p)g \tag{3.1}$$

при всех тех t, p и g, для которых она определена.

Свободное правостороннее действие $R:P\times G\to P$, $R(p, g)=$ $=R_g(p)=pg$, порождает действие $R_*:TP\times TG\to TP$. Обозначая $R_*(Z_p, 0_g)=(R_g)_*(Z_p)=Z_pg$ и $R_*(0_p, A_g)=pA_g$, где 0_p и 0_g — нулевые векторы, соответственно, в $T_p(P)$ и $T_g(G)$, имеем $R_*(Z_p, A_g)=Z_pg+pA_g$. Аналогично, групповая операция $G\times G\to G$ порождает $TG\times TG\to TG$, где $(0_a, A_g)\mapsto aA_g$ и $(A_g, 0_a)\mapsto A_ga$. Векторное поле A на G называется левоинвариантным (соответственно правоинвариантным), если $A_{ag}=aA_g$ (соответственно $A_{ga}=A_ga$), $\forall a, g\in G$; оно определяется однозначно вектором $A_e\in T_e(G)$, причем $A_e=g^{-1}A_g$ (соответственно $A_e=A_gg^{-1}$). Алгебра Ли левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей на G обозначается $\mathfrak{l}(G)$ (соответственно $\mathfrak{r}(G)$), или $T_e{}^l(G)$ (соответственно $T_e{}^r(G)$), если она интерпретируется как $T_e(G)$ со скобочной операцией, взятой из $\mathfrak{l}(G)$ (соответственно $\mathfrak{r}(G)$). Изоморфизм $J:G\to G$, $g\mapsto g^{-1}$ определяет изоморфизм $J_*:\mathfrak{l}(G)\to\mathfrak{r}(G)$, $A_e\mapsto -A_e$.

Правое действие G на P позволяет ввести следующее понятие. Векторное поле Z на P называется правоинвариантным, если $Z_{pa}=Z_pa$, $\forall(p, a)\in P\times G$.

Предложение 3.1. Векторное поле Z на P со связной структурной группой Ли G является инфинитезимальным автоморфизмом тогда и только тогда, если оно правоинвариантно.

Доказательство. Пусть имеют место (3.1) и $[f_t(p)]^{\cdot}{}_{t=0}=$ $=Z_p$. Для функции $F\in\mathscr{F}(P)$ имеем

$$Z_{pa}(F)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[F(f_t(p)a-F(pa)]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(R_a{}^*F)(f_t(p))-(R_a{}^*F)(p)]=Z_p(R_a{}^*F)=((R_a)_*Z_p)(F).$$

Отсюда видно, что $Z_{pa}=Z_pa$ для всех a из некоторой окрестности $\mathscr{V}_e\subset G$, но так как $\mathscr{V}_e$ является системой образующих для G, то Z правоинвариантно.

Обратно, если Z правоинвариантно, то R_a отображает его интегральную кривую $f_t(p)$, проходящую через p, в интегральную кривую $f_t(pa)$, проходящую через pa, т. е. удовлетворяется (3.1). Предложение доказано.

Из этого предложения и тождества $[Z, W]a=[Za, Wa]$ следует, что инфинитезимальные автоморфизмы главного расслоения P составляют алгебру Ли, которая обозначается $\operatorname{aut} P$ (ср. [16]).

Инфинитезимальный автоморфизм Z называется инфинитезимальным калибровочным преобразованием, если, кроме (3.1), имеет место

$$\pi(f_t(p))=\pi(p), \tag{3.2}$$

т. е. если векторное поле Z вертикально. Такие поля Z — правоинвариантные вертикальные поля на P — составляют подалгебру Ли в $\mathrm{aut}\, P$, которую мы обозначим $\mathrm{cal}\, P$.

Относительно линейных операций $\mathrm{cal}\, P$ оказывается (при весьма общих предположениях) свободным модулем ранга r над кольцом $\mathscr{F}(M)$, где $r = \dim G$, как показывает

Предложение 3.2. На каждом главном расслоении P со связной паракомпактной базой M существуют r элементов из $\mathrm{cal}\, P$, линейной комбинацией которых (с коэффициентами из $\mathscr{F}(M)$) является произвольный элемент модуля $\mathrm{cal}\, P$.

Доказательство. В таком P существует связность Q ([7], гл. II, § 2), т. е. правоинвариантное гладкое распределение $p \mapsto Q_p$, где Q_p — прямое дополнение вертикального подпространства $V_p(P)$ в $T_p(P)$. Возьмем в некоторой фиксированной точке p_0 базис β_0 пространства $V_{p_0}(P)$. Правостороннее действие R_* распространяет его с помощью $\beta_0 \mapsto \beta_0 g$, где g — произвольный элемент из G, на весь слой $p_0 G$. В произвольную точку $p \in P$ можно его перенести с помощью связности Q. Для этого нужно взять некоторый путь в M, соединяющий точки $x_0 = \pi(p_0)$ и $x = \pi(p)$, и определить параллельный перенос $\tau : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x)$ вдоль него. Образ $\tau_* \beta_0$ является базисом в $V_{\tau(p_0)}(P)$, распространяемым путем R_* на весь слой pG, в частности в точку p. Полученный при этом базис β в $V_p(p)$ не зависит от выбора пути, так как переход к другому пути между x_0 и x приводит к $\tau_*' \beta_0 = (\tau_* \beta_0) a$, где a — такой элемент группы голономии $\Phi_{\tau(p_0)}$, что $\tau'(p_0) = \tau(p_0) a$. Если теперь $p = \tau(p_0) g = \tau'(p_0) g'$, то $g = a g'$ и $\beta = (\tau_* \beta_0) g = (\tau_*' \beta_0) g'$.

Тем самым на P получено правоинвариантное поле базисов β в вертикальных подпространствах. Любое вертикальное векторное поле является линейной комбинацией соответствующих базисных полей, составляющих поле β, с коэффициентами из $\mathscr{F}(P)$. При этом для правоинвариантного вертикального поля эти коэффициенты постоянны на слоях, т. е. принадлежат $\mathscr{F}(M)$. Предложение доказано.

Для $\mathrm{cal} P$ существует биекция, аналогичная биекции между $\mathrm{Cal} P$ и $\Gamma(E_G(P))$. Пусть $Z \in \mathrm{cal} P$; тогда из (3.1) и (3.2) следует существование такого $g^{f_t}(p)$, что аналогично (2.3) и (2.4)

$$f_t(p) = p g^{f_t}(p), \qquad g^{f_t}(pa) = a^{-1} g^{f_t}(p)\, a.$$

Если взять здесь производные по t при $t=0$, то получается

$$Z_p = p A^z(p), \qquad A^z(pa) = a^{-1} A^z(p)\, a,$$

где $A^z(p) = [g^{f_t}(p)]^{\cdot}{}_{t=0} \in T_e(G)$.

Подобно (2.7), для $g_\alpha^{f_t}(x) = g^{f_t}(\sigma_\alpha(x))$ получим

$$g_\beta^{f_t}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} g_\alpha^{f_t}(x)\, \psi_{\alpha\beta}(x)$$

и отсюда дифференцированием по t при $t=0$ имеем

$$A^z_\beta(x)=\mathrm{Ad}(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1})\,A^z_\alpha(x), \qquad (3.3)$$

где $A^z_\alpha(x)=A^z(\sigma_\alpha(x))$.

Полученная формула покажет, что каждому $Z\in\mathrm{cal}\,P$ соответствует сечение A^Z_M в присоединенном к P векторном расслоении $P\times_G T_e(G)$ с типичным слоем $T_e(G)$ и с левым действием на нем группы G путем присоединенного представления

$$l_g(A)=\mathrm{Ad}(g)\,A. \qquad (3.4)$$

Сечение A^Z_M определено набором функций A^Z_α (локальных сечений расслоения $P\times_G T_e(G)$), удовлетворяющим (3.3). Возникает биекция между $\mathrm{cal}\,P$ и пространством сечений $\Gamma(P\times_G T_e(G))$ этого расслоения.

Векторное расслоение $P\times_G T_e(G)$ допускает и другую интерпретацию, полезную в дальнейшем. Рассмотрим расслоение $V(P)$ вертикальных касательных векторов на P. Правое действие группы Ли G на P определяет естественным образом действие G на $V(P)$, орбитами которого являются правоинвариантные классы векторов в $V(P)$. При этом классы векторов, касательных к одному слою $\pi^{-1}(x)$, составляют векторное пространство, канонически изоморфное с $T_e(G)$. Поэтому факторрасслоение $V(P)/G$ имеет типичный слой $T_e(G)$ и базу $P/G=M$ и является изоморфным с $P\times_G T_e(G)$. Ясно, что правоинвариантные вертикальные векторные поля $Z\in\mathrm{cal}P$ на P находятся во взаимно однозначном соответствии с сечениями в $V(P)/G$.

Посмотрим, во что превращается правое действие элемента $a\in G$ на P, если его сузить на $\pi^{-1}(U_\alpha)$ и применить диффеоморфизм $\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times G$, где $p\mapsto(x,\varphi_\alpha(p))$ при $p=\sigma_\alpha(x)\varphi_\alpha(p)$, $x=\pi(p)$. Так как $pa=\sigma_\alpha(x)\varphi_\alpha(p)a$, то $pa\mapsto(x,\varphi_\alpha(p)a)$ и это действие сводится к правому сдвигу на элемент a в G. Поэтому $Z\in\mathrm{cal}\,P$, суженное на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, сводится к семейству $\{A^Z_\alpha(x)\,|\,x\in U_\alpha\}$ правоинвариантных векторных полей на G, причем эти семейства связаны на $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ формулой (3.3). Базис в модуле $\mathrm{cal}\,P$, существование которого установлено предложением 3.2, дает при этом семейство базисов в $\mathfrak{r}(G)$, зависящих от $x\in U_\alpha$, где $\mathfrak{r}(G)$ — алгебра Ли правоинвариантных векторных полей на G.

Для алгебры Ли $(\mathrm{cal}\,P)_\alpha$, состоящей из сужений полей $Z\in\mathrm{cal}\,P$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, существует образ постоянного базиса в $\mathfrak{r}(G)$ при обратном диффеоморфизме $U_\alpha\times G\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, но на $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ эти образы в $(\mathrm{cal}\,P)_\alpha$ и $(\mathrm{cal}\,P)_\beta$ связаны с матрицей, зависящей, вообще говоря, от $x\in U_\alpha\cap U_\beta$.

В этом $\mathrm{cal}\,P$ отличается от алгебры Ли $\mathrm{fund}\,P$ фундаментальных векторных полей на P, для которой имеется канонический изоморфизм с $\mathfrak{l}(G)$, устанавливаемый с помощью $\mathfrak{l}(G)\ni A\mapsto A^v\in\mathrm{fund}\,P$, где $A_p{}^v=pA_e$.

Если рассматривать алгебру Ли $(\mathrm{cal}\, P)_x$, состоящую из сужений полей $Z\in\mathrm{cal}\, P$ на слое $\pi^{-1}(x)$, проходящем через p, то указанный выше изоморфизмом $J_*:\mathfrak{l}(G)\to\mathfrak{r}(G)$ позволяет установить изоморфизм $j_p:(\mathrm{cal}\, P)_x\to\mathfrak{l}(G)$, положив $j_p(Z)=A$ при $Z_p=-A_p{}^v=-pA_e$. От точки p данного слоя этот изоморфизм зависит следующим образом: $j_{pa}(Z)=\mathrm{Ad}(a^{-1})A$, т. е. если $Z_p=-A_p{}^v$, то

$$Z_{pa}=-[\mathrm{Ad}(a^{-1})A]^v_{pa}=-pa[\mathrm{Ad}(a^{-1})A]_e \tag{3.4}$$

(ср. [7], гл. I, предложение 5.1).

§ 4. Расслоение струй сечений и фундаментальные 1-формы

С дифференциальными формами на P дело обстоит сложнее, чем с векторными полями. Возьмем, например, левоинвариантное векторное поле $A\in\mathfrak{l}(G)$ на G. Если мы перенесем его естественным образом на $U_\alpha\times G$ и затем на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, то перенесенные поля объединяются на каждом $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ и дают фундаментальное векторное поле $A^v\in\mathrm{fund}P$ на P, но с левоинвариантной 1-формой ω на G так не получается. С помощью $\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to G$ определяются естественно $\omega_\alpha=\varphi_\alpha{}^*\omega$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, но ω_α и ω_β не объединяются в одну 1-форму на $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$. Причиной является то, что подпространства тех векторов в касательных к P пространствах в точках $p\in\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$, на которых аннулируются ω_α и ω_β, связаны нетривиально.

Эти подпространства для всевозможных локальных тривиализаций главного расслоения P составляют так называемое расслоение струй сечений J^1P, которое состоит из всевозможных прямых дополнений S_p к вертикальным подпространствам $V_p(P)$ во всех касательных к P пространствах $T_p(P)$ ([4], [5]). Каждое $S_p\in J^1P$ канонически изоморфно к $T_{\pi(p)}(M)$ и поэтому является n-мерным векторным пространством, $n=\dim M$; изоморфизм $S_p\to T_{\pi(p)}(M)$ устанавливается сужением π_* на S_p, его обратный изоморфизм называется поднятием с $T_{\pi(p)}(M)$ в S_p.

Предложение 4.1. Расслоение $\pi^1:J^1P\to P$, $\pi^1(S_p)=p$, является главным расслоением, структурная группа которого есть аддитивная группа $H=\mathrm{Lin}(n,\ T_e(G))$ всех линейных отображений n-мерного векторного пространства в $T_e(G)$, действие $J^1P\times H\to J^1P$ которой определяется согласно

$$(S_p,\ \lambda)\to S_p\lambda=S_p+p[\lambda(S_p)],$$

где правая часть обозначает подпространство $\{Z+p\lambda(Z)\,|\,Z\in S_p\}$ в T_pP.

Доказательство. Действие сохраняет слои $(\pi^1)^{-1}(p)$ и является свободным на них, так как для двух произвольных S_p и S_p' определяется однозначно такой $\lambda\in H$, что $S_p'=S_p\lambda$, если положить $\lambda(Z_p)=A$ для любого $Z_p \in S_p$, где pA получается проектированием на $V_p(P)$ поднятия $\pi_*(Z_p)$ в S_p' параллельно к S_p. Существуют локально тривиализующие диффеоморфизмы

$$(\pi^1)^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha)) \to \pi^{-1}(U_\alpha) \times H, \quad S_p \mapsto (p, \varphi_\alpha^1(S_p)),$$

где $\varphi_\alpha^1(S_p) \in H$ определяется тем, что при $p=\sigma_\alpha(x)\varphi_\alpha(p)$ касательное подпространство к секущей поверхности $\sigma_\alpha(U_\alpha)\varphi_\alpha(p)$ в точке p переводится им в S_p. Предложение доказано.

Замечание. Образ $\lambda(Z_p)$ не меняется, если Z_p заменить эквивалентным ему вектором в $T_p(P)$ по модулю $V_p(P)$, так как при его определении существенную роль играет лишь поднятие вектора $X_x=\pi_*(Z_p)$ в S_p'; здесь $x=\pi(p)$. Поэтому этот образ зависит фактически только от X_x. В силу этого можно было бы в предложении 4.1 в символической записи образа S_p при λ вместо $\lambda(S_p)$ писать также $\lambda(T_x(M))$, $x=\pi(p)$.

В силу предложения 4.1 возникает цепь главных расслоений

$$J^1P \xrightarrow{\pi^1} P \xrightarrow{\pi} M,$$

которая определяет новое расслоение $\pi_J: J^1P \to M$, где $\pi_J = \pi \circ \pi^1$.

Предложение 4.2. Расслоение $\pi_J: J^1P \to M$ является главным расслоением, структурная группа которого есть полупрямое произведение G_J группы $H=\mathrm{Lin}(n, T_e(G))$ на G по присоединенному представлению G в $T_e(G)$, а действие $J^1P \times G_J \to J^1P$ определяется согласно

$$S_p(g, \lambda) = S_p g + (pg)[\lambda(S_p)]. \tag{4.1}$$

Доказательство. Действие сохраняет слои $\pi_J^{-1}(x)$. Оно свободно на них, так как для двух S_p и $S'_{p'}$ при $\pi(p)=\pi(p')=x$ определяется однозначно такой $g \in G$, что $p'=pg$, и далее однозначно такой $\lambda \in H$, что $S'_{pg}=S_p g+(pg)[\lambda(S_p)]$ (см. доказательство предложения 4.1). При этом

$$(S_p(g, \lambda))(g', \lambda') = (S_p(g, \lambda))g' + (pgg')[\lambda'(T_{\pi(p)}(M))],$$

где мы учитывали замечание к предложению 4.1 и то, что $\pi(pg)=\pi(g)$. Подставовив сюда (4.1), получим

$$S_p((g, \lambda)(g', \lambda')) = S_p gg' + (pgg')[(\mathrm{Ad}(g'^{-1})\lambda + \lambda')(T_{\pi(p)}(M))],$$

следовательно,

$$(g, \lambda)(g', \lambda') = (gg', \mathrm{Ad}(g'^{-1})\gamma + \gamma') + \lambda') \tag{4.2}$$

и все (g, λ) составляют действительно указанное в теореме полупрямое произведение G_J (ср. [20], п. 6.5). Существуют локально тривиализующие диффеоморфизмы

$$\pi_J^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G_J, \quad S_p \mapsto (\pi(p), (\varphi_\alpha(p), \varphi_\alpha^1(S_p))),$$

где $\varphi_\alpha^1: \pi_J^{-1}(U_\alpha) \to H$ определены в доказательстве предложения 4.1. Предложение доказано.

Если в формуле (4.2) рассматривать элемент $(g', \lambda') \in G_J$ гладко зависящим от вещественного параметра $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbf{R}$, так что при $t=0$ получается единичный элемент $(e, 0)$ и затем произвести дифференцирование по t при $t=0$, то имеем

$$(g, \lambda)(A, \Lambda) = (gA, -(\mathrm{ad}\, A)\lambda + \Lambda), \tag{4.3}$$

где $A = \dot{g}_{t=0}$, $\Lambda = \dot{\lambda}_{t=0}$, а ad является присоединенным представлением $T_e(G)$ в $T_e(G)$.

§ 5. Пространство связностей и действие группы калибровочных преобразований

Формула (4.1) при $\lambda=0$ определяет естественное действие G на J^1P, что позволяет от $\pi^1: J^1P \to P$ перейти к факторрасслоению

$$\pi^1/G: J^1P/G \to P/G = M.$$

Слой последнего состоит из орбит в J^1P по G, т. е. из классов таких S_p, которые отличаются друг от друга правосторонним действием некоторого $g \in G$.

Сечение $\Gamma: M \to J^1P/G$ этого факторрасслоения есть связность в P; при паракомпактном M такое Γ всегда существует ([7], гл. II, § 2). Элементы всех классов $\Gamma(x)$, где $x \in M$, составляют горизонтальное распределение Q связности Γ, которое представляет собой такое сечение $Q: P \to J^1P$ расслоения $\pi^1: J^1P \to P$, что $Q_{pg} = (R_g)_* Q_p = Q_p g$ для любого $g \in G$; короче, $(R_g)_* Q = Q$.

Пространство $\Gamma(J^1P/G)$ всех сечений Γ называется пространством связностей. На нем естественным образом определяется действие группы $\mathrm{Aut}P$, а следовательно, и подгруппы калибровочных преобразований $\mathfrak{G} = \mathrm{Cal}P$. Действительно, если $f \in \mathrm{Aut}P$, то имеет место (2.1), записываемое в виде $f \circ R_g = R_g \circ f$. Отсюда для горизонтального распределения Q связности Γ получим $(R_g)_* (f_* Q) = f_*((R_g)_* Q) = f_*(Q)$, т. е. $f_*(Q)$ является также горизонтальным распределением некоторой связности, которую мы обозначим $f^1(\Gamma)$.

Пространство связностей $\Gamma(J^1P/G)$ с действующей на нем группой $\mathfrak{G} = \mathrm{Cal}\,P$ является одним из основных математических объектов калибровочной теории в ее современной трактовке. Классическое поле Янга—Миллса A_μ получается здесь для данной связности Γ путем локального сечения (локальной калибровки) $\sigma: U \to P$ над $U \subset M$ с локальными координатами x^μ следующим образом: $A_\mu(x) = \lambda(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$, где $\lambda(x) \in \mathrm{Lin}(n, T_e(G))$ как элемент структурной группы главного расслоения $\pi^1: J^1P \to P$ преобразует касательное подпространство в точке $\sigma(x)$ к секущей поверхности $\sigma(U)$ в элемент $Q_{\sigma(x)}$ горизонтального распределения Q связности Γ, согласно теореме 4.1. Элемент $g(x)$, участвующий в формуле (1.2) калибровочного преобразования поля $A_\mu(x)$, получается для данного $f \in \mathrm{Cal} P$ в виде $g^f(\sigma(x))$.

В духе программы Клейна можно говорить о «калибровочной геометрии связностей» для данного P. Ее результаты существенные для калибровочных теорий, где ставится условие калибровочной инвариантности. Прежде всего, нетрудно выяснить геометрическую структуру пространства связностей $\Gamma(J^1P/G)$. Если фиксировать некоторую связность Γ_0, то произвольная связность Γ представляется формулой $\Gamma(x) = \Gamma_0(x) + \alpha(x)(T_x(M))$, где $\alpha(x): T_x(M) \to (\mathrm{cal} P)_x$ — некоторое линейное отображение, гладко зависящее от $x \in M$. Все такие $\alpha(x)$ составляют (бесконечномерное) векторное пространство $\mathfrak{A}$, а $\Gamma(J^1P/G)$ является соответствующим ему аффинным пространством $\Gamma_0 + \mathfrak{A}$.

Если рассматривать $j_p \circ \alpha(x)$: $T_x(M) \to \mathfrak{l}(G)$ для всех $p \in P$ и $x = \pi(p)$, то $A_\Gamma = j \circ \alpha \circ \pi_*$ можно интерпретировать как $\mathfrak{l}(G)$-значную 1-форму на P.

Эта форма A_Γ полубазова (обращается в нуль на вертикальных векторах); ее естественно называть формой Янга — Миллса данной связности Γ при начальной связности Γ_0. Локально она сводится к $A_\mu dx^\mu$ (если в качестве Γ_0 над U взять плоскую связность в $\pi^{-1}(U)$ с интегральными поверхностями $\sigma(U)a$ и считать $p = \sigma(x)$).

В случае группы G с нетривиальным центром действие группы $\mathfrak{G} = \mathrm{Cal} P$ на этом аффинном пространстве $\Gamma(J^1P/G) = \Gamma_0 + \mathfrak{A}$ оказывается неэффективным. Ядро неэффективности состоит из всех тех $f \in \mathfrak{G}$, у которых $g^f(pa) = g^f(p)$ для любых $p \in P$ и $a \in G$; соответствующий $g^f(x)$ принадлежит, в силу (2.4), этому центру. Важное значение в квантовой калибровочной теории имеет факторпространство орбит связностей по $\mathfrak{G}$ (см. [32], [30], [35]); фейнмановский континуальный интеграл вычисляется в этой теории именно по этому факторпространству (см. [26]).

§ 6. Каноническая 1-форма и форма связности

Вернемся к поставленной в начале § 4 задаче о перенесении левоинвариантной 1-формы с G на P. Пусть дана $\omega \in \mathfrak{l}(G)^*$. Каноническая проекция полупрямого произведения G_J на его компоненту G поднимает 1-форму ω с G на G_J, причем получаемая 1-форма аннулируется на векторных полях, проектирующихся при этом в 0. Так как левый сдвиг в G_J переводит эти поля в такие же, как следует из (4.3), то поднятая на G_J 1-форма ω будет левоинвариантна и на G_J.

Обозначая $\varphi_{J\alpha}(S_p) = (\varphi_\alpha(p), \varphi^1_\alpha(S_p)) \in G_J$, получим $\varphi_{J\alpha}: \pi_J^{-1}(U_\alpha) \to G_J$ и можем определить 1-форму

$$\omega_{J\alpha} = \varphi^*_{J\alpha}\omega$$

на $\pi_J^{-1}(U_\alpha)$. Оказывается, что $\omega_{J\alpha}$ и $\omega_{J\beta}$ совпадают на любом $\pi_J^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Действительно, локально тривиализующий диффеоморфизм в доказательстве предложения 4.2 построен на основе локального сечения $\sigma_{J\alpha}: U_\alpha \to J^1P$, где $\sigma_{J\alpha}(x)$ является касательным подпространством к секущей поверхности $\sigma_\alpha(U_\alpha)$ в точке $\sigma_\alpha(x)$. Получаются аналогичные к (2.5) и (2.6) формулы

$$\sigma_{J\beta}(x) = \sigma_{J\alpha}(x)\,\psi_{J\alpha\beta}(x), \quad \varphi_{J\alpha}(S_p) = \psi_{J\alpha\beta}(x)\,\varphi_{J\beta}(S_p),$$

вторая из которых покажет, что

$$\varphi_{J\alpha} = L_{\psi_{J\alpha\beta}\circ\pi}\circ\varphi_{J\beta}.$$

Поэтому

$$\varphi^*_{J\alpha} = \varphi^*_{J\beta}\circ L^*_{\psi_{J\alpha\beta}\circ\pi}$$

и так как $L^*_{(g,\lambda)}\omega = \omega$ для любого $(g,\lambda)\in G_J$, то $\omega_{J\alpha} = \omega_{J\beta}$ на $\pi_J^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Получается 1-форма на J^1P, которую мы обозначим ω_J.

Из построения ясно, что ω_J аннулируется на касательных к J^1P векторах, вертикальных для π^1, и поэтому ее значение зависит только от $S_p \in J^1P$ и касательного к P вектора Z_p.

1-фóрму ω_J можно определить и непосредственно. Чтобы получить $\omega_J(S_p, Z_p)$, следует Z_p проектировать на $V_p(P)$ параллельно к S_p, найти по проекции Z_p^V такой элемент $A\in\mathfrak{l}(G)$, что $Z^V_p = pA_e$, и тогда $\omega_J(S_p, Z_p) = \omega(A)$. Это следует из того, что распространенная на $U_\alpha \times G_J = U_\alpha \times G \times H$ 1-форма ω получает на векторе $X_x + Y_g + \Lambda_\lambda$ свое значение $\omega(Y_g)$ именно этим способом, причем $\omega_{J\alpha}$ является ее образом при кодифференциале локально тривиализующего диффеоморфизма, который $X_x + \Lambda_\lambda$ отображает в подпространство S_p, являющееся прообразом (x, g, λ).

Так полученная 1-форма ω_J на J^1P называется фундаментальной 1-формой, соответствующей левоинвариантной 1-форме ω на G. Другое описание следующее. Изоморфизм между $\mathfrak{l}(G)$ и $\mathrm{fund}\,P$ определяет изоморфизм между сопряженными пространствами $\mathfrak{l}(G)^*$ и $(\mathrm{fund}\,P)^*$, который левоинвариантной 1-форме $\omega\in\mathfrak{l}(G)^*$ ставит в соответствие $\tilde{\omega}\in(\mathrm{fund}\,P)^*$. Теперь ω_J определяется равенством

$$\omega_J(S_p, Z_p) = \tilde{\omega}(Z_p^V). \tag{6.1}$$

Если в этой конструкции форму ω заменить канонической 1-формой θ на G, определяемой как левоинвариантная $\mathfrak{l}(G)$-значная 1-форма такая, что $\theta(A) = A$ для любого $A\in\mathfrak{l}(G)$, то на J^1P получается фундаментальная каноническая 1-форма θ_J. Она определяется равенством $\theta_J(S_p, Z_p) = A$, где $Z_p^V = pA_e$.

Пусть в P дана связность Γ. Ее горизонтальное распределение Q является правоинвариантным сечением расслоения $\pi^1: J^1P \to P$. Формой ω_Γ связности Γ называется сужение формы θ_J на секущей поверхности $Q(P)$. Из правоинвариантности Q следует, что при $Z \in \operatorname{aut} P$ поле $Z^\Gamma: p \mapsto p[\omega_\Gamma(Z_p)]_e$ принадлежит $\operatorname{cal} P$. Отсюда и из (3.4) следует известное свойство формы связности: $R_a{}^*\omega_\Gamma = \operatorname{Ad}(a^{-1})\omega_\Gamma$.

Имеет место структурное уравнение Картана ([7], гл. II, § 5; [18], гл. VII, § 1)

$$d\omega_\Gamma + \frac{1}{2}[\omega_\Gamma \wedge \omega_\Gamma] = \Omega_\Gamma, \tag{6.2}$$

где 2-форма Ω_Γ полубазова (обращается в нуль на касательных к P векторах, хотя бы один из которых вертикален) и называется формой кривизны связности Γ. Локально над $U \subset M$ с координатами x^μ она выражается в виде $\Omega_\Gamma = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, где $F_{\mu\nu}$ — величины из (1.3).

Полубазовость формы (6.2) является характерной для формы связности. Пусть $S: P \to J^1P$ является произвольным сечением расслоения $\pi^1: J^1P \to P$ и θ_S сужением формы θ_J на секущей поверхности $S(P)$. Теорема Картана—Лаптева ([6], гл. II, § 1) утверждает, что $S = Q$ и $\theta_S = \omega_\Gamma$ для некоторой связности Γ тогда и только тогда, если 2-форма $d\theta_S + \frac{1}{2}[\theta_S \wedge \theta_S]$ полубазова.

При фиксированной начальной связности Γ_0 форма Янга—Миллса A_Γ связности Γ выражается в виде

$$A_\Gamma = \omega_\Gamma - \omega_{\Gamma_0}. \tag{6.3}$$

Если локально над $U \subset M$ взять в качестве Γ_0 плоскую связность, связанную с сечением $\sigma: U \to P$, то $\sigma^*\omega_{\Gamma_0} = 0$ и получается

$$\sigma^*\omega_\Gamma = A_\mu dx^\mu.$$

Так как ω_Γ и ω_{Γ_0} оба удовлетворяют (6.2), то из (6.3) нетрудно получить структурное уравнение для A_Γ:

$$dA_\Gamma = [A_\Gamma \wedge \omega_{\Gamma_0}] + B_\Gamma, \tag{6.4}$$

где $B_\Gamma = \Omega_\Gamma - \Omega_{\Gamma_0} - \frac{1}{2}[A_\Gamma \wedge A_\Gamma]$ — полубазова 2-форма со значениями в $\mathfrak{l}(G)$.

§ 7. Правоинвариантные 1-формы

Для исследования группы калибровочных преобразований $\operatorname{Cal} P$ бо́льшее значение, чем изоморфная к $\mathfrak{l}(G)$ алгебра Ли $\operatorname{fund} P$, имеет бесконечномерная алгебра Ли $\operatorname{cal} P$ правоинвариантных вертикальных векторных полей, которую можно рассматривать как алгебру Ли группы $\operatorname{Cal} P$ (см. Предложение 3.1). По этой причине, наряду с 1-формами ω_J, построенными в

§ 6 с помощью $\tilde{\omega}\in(\mathrm{fund}\,P)^*$, важное значение имеют также 1-формы ϑ_J на J^1P, построенные с помощью $\tilde{\vartheta}\in(\mathrm{cal}\,P)^*$, где $(\mathrm{cal}\,P)^*$ обозначает модуль, сопряженный к модулю $\mathrm{cal}\,P$ над кольцом $\mathscr{F}(M)$ (см. [3], с. 223).

Рассмотрим ближе это построение. Напомним, что существует естественная биекция между $\mathrm{cal}\,P$ и пространством сечений векторного расслоения $V(P)/G$ правоинвариантных классов вертикальных векторов на P. Эта биекция определяет биекцию между $(\mathrm{cal}\,P)^*$ и пространством сечений сопряженного векторного расслоения $(V(P)/G)^*$ (см. [15], с. 23). Элемент $\tilde{\vartheta}\in(\mathrm{cal}\,P)^*$ получает следующее истолкование.

С одной стороны, он является линейной формой $\tilde{\vartheta}:\mathrm{cal}\,P\to\mathscr{F}(M)$, с другой стороны, сечением в векторном расслоении $(V(P)/G)^*$ правоинвариантных классов гладких линейных отображений $V(P)\to\mathbf{R}$. Как выяснилось в § 3, сужение $Z\in\mathrm{cal}\,P$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$ сводится к функции $U_\alpha\to\mathfrak{r}(G)$, или семейству правоинвариантных векторных полей $U_\alpha\ni x\mapsto A^Z_\alpha(x)$ на G. Аналогично $\tilde{\vartheta}\in(\mathrm{cal}\,P)^*$, суженное на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, дает гладкое семейство $U_\alpha\ni x\mapsto\vartheta_\alpha(x)$ правоинвариантных 1-форм на G, т. е. гладкую функцию $U_\alpha\to\mathfrak{r}(G)^*$.

1-форма ϑ_J на J^1P определяется по $\tilde{\vartheta}\in(\mathrm{cal}\,P)^*$ формулой

$$\vartheta_J(S_p, Z_p)=\tilde{\vartheta}(Z_p^V), \tag{7.1}$$

аналогичной к (6.1); напомним, что здесь Z_p^V — проекция вектора $Z_p\in T_p(P)$ на $V_p(P)$ параллельно к $S_p\in J^1P$. Полученная 1-форма ϑ_J правоинвариантна относительно действия группы Ли G на J^1P в силу правоинвариантности $\tilde{\vartheta}$ и того, что проекцией $(Z_pg)^V$ параллельно к S_pg является Z_p^Vg. Из (7.1) видно, что ϑ_J, как и ω_J, является полубазовой относительно расслоения $\pi^1:J^1P\to P$, т. е. аннулируется на касательных к J^1P векторах, вертикальных для π^1.

Сужение 1-формы ϑ_J на $\pi_J^{-1}(U_\alpha)$ дает

$$\vartheta_{J\alpha}(S_{(x,g)}, Z_{(x,g)})=\vartheta_\alpha(x)(g, Z^V_{(x,g)}),$$

где $S_{(x,g)}\subset T_{(x,g)}(U_\alpha\times G)$, являющееся образом S_p, дополняет $T_g(G)$, вектор $Z^V_{(x,g)}$ есть проекция вектора $Z_{(x,g)}\in T_{(x,g)}(U_\alpha\times G)$ на $T_g(G)$ параллельно к $S_{(x,g)}$, а $\vartheta_\alpha(x)$ есть правоинвариантная 1-форма на G, гладко зависящая от $x\in U_\alpha$.

В силу предложения 3.2, в модуле $\mathrm{cal}\,P$ существует конечный базис из r элементов $Y_1, \ldots, Y_r$, где $r=\dim G$; каждый Y_ρ является правоинвариантным вертикальным векторным полем на P. Пусть $\tilde{\vartheta}^1, \ldots, \tilde{\vartheta}^r$ составляют сопряженный к нему базис в $(\mathrm{cal}\,P)^*$. По каждому $\tilde{\vartheta}^\rho$ по формуле (7.1) определяется 1-форма ϑ_J^ρ на J^1P, правоинвариантная относительно G и полубазовая для π^1.

Пусть в P фиксирована некоторая начальная связность Γ_0 с горизонтальным правоинвариантным распределением $Q_0: P \to J^1P$. Сужение формы $\vartheta_J{}^\rho$ на $Q_0(P)$ обозначим $\vartheta_0{}^\rho$; они при фиксированной Γ_0 становятся правоинвариантными 1-формами на P, аннулирующимися на векторах $Z \in Q_0(P)$. Их можно дополнить до полного базиса для 1-форм на P. С этой целью предположим сперва, что база M является параллелизуемой, т. е. на M существует $n(=\dim M)$ векторных полей $X_{r+1}, \ldots, X_{r+n}$, линейно независимых в каждой точке $x \in M$. (Если это не так, то придется сначала ограничиться параллелизуемой областью $U \subset M$ и вместо P рассматривать $\pi^{-1}(U)$.) Существуют горизонтальные поднятия $Z_{r+1}{}^0, \ldots, Z_{r+n}{}^0$ этих векторных полей $X_{r+1}, \ldots, X_{r+n}$ в связности Γ_0, которые вместе с базисными $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathrm{cal}\, P$ составляют полный базис модуля векторных полей на P. Рассмотрим сопряженный к нему базис в сопряженном модуле 1-форм на P. В этот базис входят введенные выше 1-формы $\vartheta_0{}^1, \ldots, \vartheta_0{}^r$, которые дополняются до полного базиса некоторыми 1-формами $\vartheta_0{}^{r+1}, \ldots, \vartheta_0{}^{r+n}$, аннулирующимися на вертикальных векторах.

Нетрудно получить структурные уравнения для этих базисных форм. Из правоинвариантности Q_0 следует, что $[Y_\rho, Z^0_\mu] \in Q_0(P)$ при любых $1 \leqslant \rho \leqslant r$, $r+1 \leqslant \mu \leqslant r+n$ (см. [7], с. 81; правда, там в доказательстве встречается фундаментальное векторное поле вместо нашего правоинвариантного Y_ρ, но фактически в доказательстве существенное значение имеет лишь его значение в данной точке $p \in P$, вернее — определенная им 1-параметрическая подгруппа в G). Далее, из инволютивности вертикального распределения следует, что $[Y_\rho, Y_\sigma] = K^\tau_{\rho\sigma} Y_\tau$, причем из правоинвариантности $Y_1, \ldots, Y_r$ вытекает, что $K^\tau_{\rho\sigma}$ зависит только от точки $x \in M$, т. е. $K^\tau_{\rho\sigma} \in \mathcal{F}(M)$. Используя теперь известную взаимосвязь оператора внешнего дифференцирования d для 1-форм и скобочной операции [,] для векторных полей, несложно вывести следующие уравнения

$$d\vartheta_0^\tau = -\frac{1}{2} K^\tau_{\rho\sigma} \vartheta_0^\rho \wedge \vartheta_0^\sigma + \Theta_0^\tau, \tag{7.2}$$

$$d\vartheta_0^\mu = \vartheta_0^\nu \wedge \vartheta_\nu^\mu, \tag{7.3}$$

где $\Theta_0^\tau = -\frac{1}{2} R^\tau_{\mu\nu} \vartheta_0^\mu \wedge \vartheta_0^\nu$ являются формами кривизны начальной связности Γ_0, записанные относительно базиса $Y_1 \ldots, Y_r$ в $\mathrm{cal}\, P$.

Здесь следует заметить, что локально на области $\pi^{-1}(U_\alpha)$, изоморфной к $U_\alpha \times G$, можно вместо базиса $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathrm{cal}\, P$ выбрать образ $Y_{1'}, \ldots, Y_{r'} \in (\mathrm{cal}\, P)_\alpha$ постоянного базиса в $\mathfrak{r}(G)$, как отмечено в конце § 3. Тогда $[Y_{\rho'}, Y_{\sigma'}] = -C^{\tau'}_{\rho'\sigma'} Y_{\tau'}$, где $C^{\tau'}_{\rho'\sigma'}$ — структурные постоянные алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$ в соответствующем базисе. При этом

$$K^{\tau}_{\rho\sigma}(x) = -a^{\rho'}_{\rho}(x)\, a^{\sigma'}_{\sigma}(x)\, C^{\tau'}_{\rho'\sigma'} a^{\tau}_{\tau'}(x),$$

где $\|a^{\rho'}_{\rho}\|$ совершает переход от $\{Y_{\rho'}\}$ к сужению $\{Y_\rho\}$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, а $\|a^{\tau}_{\tau'}\|$ является ее обратной матрицей. На $\pi^{-1}(U_\alpha)$ можно от (7.2) перейти к более простым

$$d\vartheta^{\tau'}_0 = \frac{1}{2} C^{\tau'}_{\rho'\sigma'} \vartheta^{\rho'}_0 \wedge \vartheta^{\sigma'}_0 + \Theta^{\tau'}_0,$$

которые, однако, не обладают глобальным характером.

Что касается формул (7.2) и (7.3), то их можно сделать глобальными и в том случае, когда M не является параллелизуемым. Для этого нужно от $X_{r+1}, \ldots, X_{r+n}$ перейти в каждой точке $x \in M$ к произвольному элементу $\{e_\mu\}$ расслоения $L(M)$ линейных реперов на M, принимая $e_\mu = C^{\nu}_{\mu} X_\nu$, где C^{ν}_{μ} — такие новые параметры, что $\det|C^{\nu}_{\mu}| \neq 0$. Роль векторных полей X_ν на областях, которыми можно покрывать M, тогда исчезает. Если теперь ввести полубазовы 1-формы ϑ^μ на $L(M)$ формулами $\vartheta^\nu_0 = C^\nu_\mu \vartheta^\mu$ и сделать подстановки в (7.2) и (7.3), то их внешний вид, как нетрудно проверить, сохраняется, лишь у ϑ^μ_0 и ϑ^ν_0 исчезает нижний индекс 0.

Аналогично можно освободиться от роли начальной связности Γ_0, если дополнительно к предыдущему ввести параметры A^ρ_μ элемента $S_p \in J^1 P$ в базисе $\{Y_\rho, e_\mu\}$ и обозначить $\tilde{\vartheta}^\rho = \vartheta^\rho_0 - A^\rho_\mu \vartheta^\mu$. Опять несложно проверить, что из (7.2) получаются структурные уравнения

$$d\tilde{\vartheta}^\tau = \frac{1}{2} K^{\tau}_{\rho\sigma} \tilde{\vartheta}^\rho \wedge \tilde{\vartheta}^\sigma + \vartheta^\mu \wedge \tilde{\vartheta}^\tau_\mu, \tag{7.4}$$

которые глобальны и вместе с (7.3) представляют собой некоторую модификацию структурных уравнений Г. Ф. Лаптева [9] для главного расслоения P.

Если для $V(P)$-значных 1-форм $\varphi = \varphi^\rho Y_\rho$ и $\psi = \psi^\sigma Y_\sigma$ на P обозначить $[\varphi \wedge \psi] = \varphi^\rho \wedge \psi^\sigma [Y_\rho, Y_\sigma]$, $d\varphi = d\varphi^\rho Y_\rho$, то (7.2) и (7.4) принимают соответственно вид

$$d\vartheta_0 = \frac{1}{2}[\vartheta_0 \wedge \vartheta_0] + \Theta_0, \quad d\tilde{\vartheta} = \frac{1}{2}[\tilde{\vartheta} \wedge \tilde{\vartheta}] + \vartheta^\mu \wedge \tilde{\vartheta}_\mu. \tag{7.5}$$

Здесь ϑ_0 является правоинвариантной $V(P)$-значной 1-формой связности Γ_0, а полубазова Θ_0 — соответствующей $V(P)$-значной 2-формой кривизны связности Γ_0. Заметим, что cal-P-значное ограничение 1-формы ϑ_0 на aut P является самой связностью Γ_0, рассматриваемой как проектор aut $P \to$ cal P.

§ 8. Правоинвариантная 1-форма Янга — Миллса

В § 5 была введена $\mathfrak{l}(G)$-значная 1-форма Янга—Миллса A_Γ для данной связности Γ при начальной связности Γ_0. Она имеет правоинвариантный аналог $\alpha = \vartheta - \vartheta_0$, где ϑ и ϑ_0 — рассмотренные выше правоинвариантные $V(P)$-значные 1-формы связностей Γ и Γ_0. Здесь α так же, как и A_Γ, полубазова и поэтому может быть представлена в виде

$$\alpha = a_\mu \vartheta^\mu, \tag{8.1}$$

где $a_\mu = a_\mu^\rho Y_\rho$, а a_μ^ρ — координаты поля Янга — Миллса в базисе $\{Y_\rho, e_\mu\}$. Она называется правоинвариантной $V(P)$-значной 1-формой Янга — Миллса.

Здесь можно освободиться от роли начальной связности Γ_0, если заменить ϑ_0 $V(P)$-значной 1-формой $\tilde{\vartheta}$ на J^1P и обозначить $\tilde{\alpha} = \vartheta - \tilde{\vartheta}$. Получается 1-форма Янга — Миллса $\tilde{\alpha}$ на J^1P для данной связности Γ.

Так как ϑ удовлетворяет первому уравнению (7.5) с формой кривизны Θ, то для α и $\tilde{\alpha}$ получаются следующие структурные уравнения

$$d\alpha = -[\vartheta_0 \wedge \alpha] + \Delta, \quad d\tilde{\alpha} = -[\tilde{\vartheta} \wedge \tilde{\alpha}] + \vartheta^\mu \wedge \tilde{\beta}_\mu, \tag{8.2}$$

где $\Delta = \Theta - \Theta_0 - [\alpha \wedge \alpha]$ является полубазовой 2-формой, т. е. выражается в виде $\Delta = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu$, а $\tilde{\beta}_\mu$ — некоторые 1-формы на J^1P.

Уравнения (8.2) равносильны уравнениям Г. Ф. Лаптева [10] для объекта связности — для объекта Γ_μ^ρ в обозначениях Г. Ф. Лаптева. Связь следующая: $\tilde{\alpha} = \Gamma_\mu^\rho \vartheta^\mu Y_\rho$. С точки зрения калибровочных теорий, замечательным является тот факт, что если в уравнениях писать $\tilde{\vartheta} = c^\rho Y_\rho$ и c^ρ интерпретировать как «духи» Фаддеева — Попова квантовой калибровочной теории, то уравнения (7.5) и (8.2) совпадают с уравнениями BRS-преобразования (см. [23] и [17], с. 171). Ранее аналогичное совпадение было отмечено несколькими авторами (см. литературу в [12]), но для $\mathfrak{l}(G)$-значных форм, построенных с помощью fund P, причем сперва в случае ограничений формы ω_{Γ_0} на $V(P)$, а затем в общем случае [12]. Недостатком этих построений является то, что так построенные «духи» составляют базис конечномерной алгебры, что недостаточно для целей квантовой калибровочной теории; на это было обращено внимание в [28]. Предыдущие интерпретации «духов» и BRS-преобразования носят, таким образом, формальный характер, вопреки попытке их оправдания [31]. Данная выше интерпретация свободна от указанного в [28] недостатка, так как введенные выше 1-формы c^ρ зависят уже существенным образом от точки $x \in M$.

Дальнейший путь геометрической трактовки квантовой калибровочной теории проходит через построение бесконечномерной алгебры Березина—Грассмана с образующими $c^\rho(x)$ и через переход к супермногообразию, построенному над подстилающим пространством связностей $\Gamma_0 + \mathfrak{A}$ (см. § 5) с этой алгеброй. Основные конструкции этого пути даны в [1], [2], где эффективный лагранжиан теории интерпретируется как функция $\mathscr{L}$ на построенном супермногообразии Sup $\mathfrak{A}$ и BRS-преобразование получает истолкование как векторное поле на Sup $\mathfrak{A}$, аннулирующее $\mathscr{L}$. Найдены два больших семейства векторных полей на Sup $\mathfrak{A}$, являющихся инфинитезимальными симметриями функции $\mathscr{L}$; одно из них включает поле BRS-преобразования. Для некоторых из этих полей найдены в явном виде и соответствующие 1-параметрические группы симметрии.

Более подробное рассмотрение этих вопросов выходит, однако, за рамки настоящей статьи и будет дано в одной из наших следующих публикаций (совместно с В. Абрамовым).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов В.*, Обобщенные p-формы и поле Фаддеева — Попова. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1984, № 665, 3—13 (РЖМат, 1984, 8А784)
2. —, Супермногообразия связностей и симметрии квантового эффективного действия. Препринт FI-28 (1985). Отд. физ.-мат. и техн. наук АН ЭстССР, Тарту, 1985, 45 с.
3. *Бурбаки Н.*, Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Перев. с франц. М.: Физматгиз, 1962, 516 с. (РЖМат, 1964, 1А198К)
4. —, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975, 220 с. (РЖМат, 1975, 9А444К)
5. *Васильев А. М.*, Дифференциальная алгебра. Ковариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии. В сб. «Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1978, *10*, 5—24 (РЖМат, 1979, 5А608)
6. *Евтушик Л. Е.*, *Лумисте Ю. Г.*, *Остиану Н. М.*, *Широков А. П.*, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ)». М., 1979, *9*, 247 с. (РЖМат, 1980, 1А800К)
7. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.*, Основы дифференциальной геометрии. Т. I. Пер. с англ. М.: Наука, 1981, 344 с. (РЖМат, 1981, 11А686К)
8. *Коноплева Н. П.*, *Попов В. Н.*, Калибровочные поля. 2-е изд. М., 1980, 238 с. (РЖФиз, 1980, 9Б412К)
9. *Лаптев Г. Ф.*, Структурные уравнения главного расслоенного многообразия. В сб. «Тр. Геометр. семинара. Т. 2 (Ин-т научн. информ. АН СССР)». 1969, 161—178 (РЖМат, 1970, 4А623)
10. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. мат. съезда, 1961. Т. 2. Л.: Наука, 1964. 226—233 (РЖМат, 1964, 12А391)
11. *Лумисте Ю. Г.*, Теория связностей в расслоенных пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1969 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 123—168 (РЖМат, 1971, 10А1К)
12. —, Связности при геометрической интерпретации полей Янга — Миллса и Фаддеева — Попова. Изв. вузов. Мат., 1983, № 1, 46—54 (РЖМат, 1983, 8А725)
13. *Манин Ю. И.*, Калибровочные поля и голоморфная геометрия. В сб. «Соврем. пробл. матем., (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1981, 17, 3—55 (РЖМат, 1981, 10А492)
14. —, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984, 336 с.
15. *Мищенко А. С.*, Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984, 208 с.

16. *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А., Фаддеев Л. Д.,* Квантовые аномалии и коциклы на калибровочных группах. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 4, 64—72 (РЖМат, 1985, 2А801)
17. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.,* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978, 238 с. (РЖФиз, 1979, 4Б285)
18. *Стернберг С.,* Лекции по дифференциальной геометрии. Перев. с англ. М.: Мир, 1970, 412 с. (РЖМат, 1971, 7А754К)
19. *Стинрод Н.,* Топология косых произведений. Перев. с англ. М.: Изд-во ин. лит., 1953, 274 с.
20. *Холл М.,* Теория групп. Перев. с англ. М.: Изд-во ин. лит., 1962, 468 с. (РЖМат, 1963, 3А168К)
21. *Atiah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M.,* Self duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London, 1978, *A362*, № 1711, 425—461 (РЖМат, 1979, 5А538)
22. —, *Jones J. D. S.,* Topological aspects of Yang-Mills theory. Commun. Math. Phys., 1978, *61*, № 2, 97—118 (РЖФиз, 1979, 1Б280)
23. *Becchi C., Rouet A., Stora R.,* Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble model. Commun. Math. Phys., 1975, *42*, № 2, 127—162
24. *Bourguignon J. P., Lawson H. B., Jr.* Yang-Mills theory: its physical origins and differential geometric aspects. Ann. Math. Stud., 1982, № 102, 395—421 (РЖМат, 1982, 10А589)
25. *Bruschi M. L.,* About Singer theorem. Lett. Nuovo cim., 1983, *38*, № 14, 485—490 (РЖМат, 1984, 7А672)
26. *Daniel M., Viallet C. M.,* The geometrical setting of the gauge theories of Yang-Mills type. Rev. Mod. Phys., 1980, *52*, 175—197 (РЖФиз, 1980, 8Б360); Пер. на рус. яз.: Успехи физ. наук, 1982, *136*, вып. 3, 377—419 (РЖФиз, 1982, 8Б238)
27. *Friedrich Th., Habermann L.,* The Yang-Mills equation over the two-dimensional sphere. Prepr. Humboldt-Univ. Berlin. Sekt. Math., 1984, № 78, 19 p. (РЖМат, 1985, 2А795)
28. *Leinaas J. M., Olaussen K.,* Ghosts and geometry. Phys. Lett., 1982, *B108*, № 3, 199—202 (РЖФиз, 1982, 8Б257)
29. *Lubkin E.,* Geometric definition of gauge invariance. Ann. Phys. (N. Y.), 1963, *23*, № 2, 233—283
30. *Mitter P. K., Viallet C. M.,* On the bundle of connections and the gauge orbit manifold in Yang-Mills theory. Commun. Math. Phys., 1981, *79*, № 4, 457—472 (РЖФиз, 1981, 11Б136)
31. *Ne'eman Y.,* Proposed geometrizations for unitarity-imposing superalgebras of the field/ghost systems. Coll. on Group theor. Methods in Phys. Trieste, 1983, TAUP 151—183
32. *Singer I. M.,* Some remarks on the Gribov ambiguity. Commun. Math. Phys., 1978, *60*, № 1, 7—12 (РЖФиз, 1978, 11Б255)
33. *Sternberg S.,* On the role of field theories in our physical conception of geometry. Lect. Notes Math., 1978, *676*, 1—80 (РЖФиз, 1979, 5Б129)
34. *Utiyama R.,* Invariant theory of interaction. Phys. Rev., 1956, *101*, 1597—1607 (Пер. в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М., Мир, 1964, 250—273)
35. *Vergeles S.,* Some properties of orbit space in Yang-Mills theory. Lett. Math. Phys., 1983, *7*, № 5, 399—406 (РЖМат, 1984, 4А740)
36. *Wy T., Yang C. N.,* Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. Phys. Rev., 1975, *D12*, № 12, 3845—3857
37. *Yang C. N.,* Fibre bundles and the physics of the magnetic monopole. Chern Symp., 1979. Proc. Int. Symp. Differ. Geom. honor S.-S. Chern, Berkeley, Calif. June, 1979, New-York e. a., 1980, 247—253 (РЖМат, 1982, 10А596)
38. —, *Mills R. L.,* Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. Phys. Rev., 1954, *96*, 191—195 (Пер. в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М.: Мир, 1964, 28—38)